Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1998

Exercice
Commun à tous les candidats
Dans une toire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant . Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A
Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier acheté deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.
   Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible, puis à 10^{-3} prés.
2. Xavier revient chaque jour, pendant trois tours, acheter deux billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
   Le résultat sera donné à 10^{-3} près.
3. Un autre tour, Xavier achète six billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant Le resultat sera donné à 10^{-3} près.

Partie B
Soit n un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n, qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \dfrac{2n-1}{2(2n-1)}$.
2. **a.** Étudier les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer la limite de p_n, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice **(spécialité)**
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).
On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].
Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que

$$z' = -\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}.$$

   a. Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\text{i}$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.
   b. Determiner les images par s des points O, A, B, C.
2. **a.** Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{B}},\ \overrightarrow{\Omega\text{B}}\right)$.
   En déduire que les points A, B et Ω sont alignés.
   b. Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.
   c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.

3. a. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI].
   b. Démontrer que $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.
   c. Demontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.
   Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 3cm). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.
4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$; on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. a. Determiner la limite de φ en $-\infty$.
   b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right].$$

   En déduire la limite de φ en $+\infty$.
3. Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en un point et un seul.
   On désigne par α l'abscisse de ce point.
   Montrer que $0,3 < \alpha < 0,4$.