# Baccalauréat S Centres étrangers1 juin 2002

**Calculatrice autorisée**

**Exercice 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On définit deux suites $u$ et $v$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)\\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n)\end{array}\right.$$

**1.** On appelle $w$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $w_n = v_n - u_n$.

   **a.** Montrer que $w$ est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

   **b.** Déterminer la limite de la suite $w$.

**2.** **a.** Montrer que la suite $u$ est croissante.

   **b.** Montrer que la suite $v$ est décroissante.

   **c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

**3.** On admet que les suites $u$ et $v$ convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera $l$.

**4.** On appelle $t$ la suite définie pour tout entier natureI $n$ par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

   **a.** Montrer que $t$ est une suite constante. Déterminer cette constante.

   **b.** Déterminer alors la valeur de $l$.

**Exercice 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\text{i}}{2}$.

$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point $M$, d'affixe $z$, distinct de A, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$2zz' = \text{i}(z + z').$$

**1.** On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\text{I}} = 1$, $z_{\text{J}} = \text{i}$ . Soit K le milieu du segment [IJ].

   **a.** Déterminer l'affixe $z_{\text{K}}$ de K.

   **b.** Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.

   **c.** En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.

**2.** Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.

**3.** Montrer que $M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \dfrac{\text{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\text{i}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

**4.** En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

**Exercice 2** **5 points**

**Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Soit $p$ un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\textbf{E} : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
   On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.
2. Le but de cette question est de prouver que $x$ et $y$ sont premiers entre eux.
   - **a.** Montrer que $x$ et $y$ sont de parités différentes.
   - **b.** Montrer que $x$ et $y$ ne sont pas divisibles par $p$.
   - **c.** En déduire que $x$ et $y$ sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que $p$ est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où $u$ et $v$ sont deux entiers naturels strictement positifs.
   - **a.** Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
   - **b.** Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque $p$ n'est pas somme de deux carrés.
   - **a.** $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
   - **b.** Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

**PROBLÈME** **11 points**

Pour chaque entier naturel $n$, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction notée $f_n$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

**Partie A : Étude du cas particulier $n = 0$**

$f_0$ est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
   - **a.** Justifier graphiquement l'inégalité suivante :

     $$\text{pour tout réel } u,\ e^u \geqslant u + 1.$$

   - **b.** En déduire que pour tout réel $x$,

     $$e^{-x} + x - 1 \geqslant 0, \text{ puis que, } 1 + (x-1)e^x \geqslant 0.$$

3. Limites :
   - **a.** Déterminer la limite de $f_0$ en $+\infty$.
   - **b.** Déterminer la limite de $f_0$ en 0.
4. Sens de variations :
   - **a.** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenantà l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $f_0'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.
   - **b.** En déduire le sens de variation de $f_0$.

5. On appelle $\mathscr{C}_0$ la courbe représentative de $f_0$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
   Tracer $\mathscr{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.

**Partie B : Étude de la famille de fonctions $f_n$ pour $n \geqslant 1$**

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de $f_n$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de $f_n$ en $+\infty$ et en 0.
   En déduire que $\mathscr{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_1$, appartenant à l'intervalle $[0{,}2\,;\,0{,}9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
   **b.** Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
   **c.** Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n$ appartenant à l'intervalle $[\alpha_1\,;\,1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

   **a.** En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$,
   $$\frac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1.$$
   **b.** En déduire que, pour tout entier naturel non nul $n$, $\ln(\alpha_n) \leqslant \dfrac{1-e}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant e^{\frac{1-e}{n}}$.
   **c.** Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)$.
6. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

**Partie C : Étude d'une suite d'intégrales**

Pour tout entier naturel $n$, on appelle $I_n$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,dx.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)$.
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$, et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.