Baccalauréat S La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(\text{A})$. On désigne par $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A.

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(\text{A}/\text{B})$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
   soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
   soit P l'évènement : « on obtient PILE » .

   a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).

   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
   – si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
   – dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».

   a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

   c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$.

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $\text{i}\sqrt{3}$.
   Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B$'$ et C$'$ sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?
2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation
   $$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$
   En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. **a.** Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z-1)^3.$$

b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z-1$ et α un argument de $z-1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z'-1$ en fonction de r et de α.

Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que, si M appartient à une demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite D$'$'que l'on déterminera.
Justifier l'appartenance du point B$'$ à Γ' et à D$'$.
Compléter la figure avec les différents éléments : Γ, Γ', D et D$'$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\text{i}\overline{z}$.

a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe 1 - i.

b. Soit D$'$ la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D$'$.
Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right)$. Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

c. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question un considére l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}\text{i}\overline{z} = \dfrac{z+z'}{2}$.

a. Soit le point A d'affixe $z = 2+\text{i}$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.

b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.

c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construire l'image A$'$ du point A par f.
Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentalive de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1 ; 0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathcal{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$, calculer en fonction de x la distance AM.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{2}.$$

   a. Calculer $g'(x)$.

   b. On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g. Calculer $g''(x)$.
   Montrcr que pour tout x réel : :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2.$$

   c. En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   d. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0 ; 1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.
   Vérifier l'inégalité suivante : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$.
   Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

   e. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

3. Établir que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathcal{C}$.
   Placer le point M_α sur le graphique.
4. En utilisant la définition de α, montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$$

   puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4}\left[f(2\alpha)\right]^2 + \left[f(\alpha)\right]^2.$$

   Utiliser les variations de f et le résultat suivant, $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_α d'amplitude 2.10^{-2}.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f_2, f_3, f_4, f_5, et f_6 soit respectivement les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_6$ obtenues à l'aide d'un logiciel.

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 f_1\,dx$.

2. On considère pour n entier naturel non nul l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n\,dx$.
Interpréter géométriquement I_n.
Calculer pour n entier naturel quelconque, I_n en fonction de n.

3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (I_n) ?
Montrer que $I_n = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]$ et en déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.