

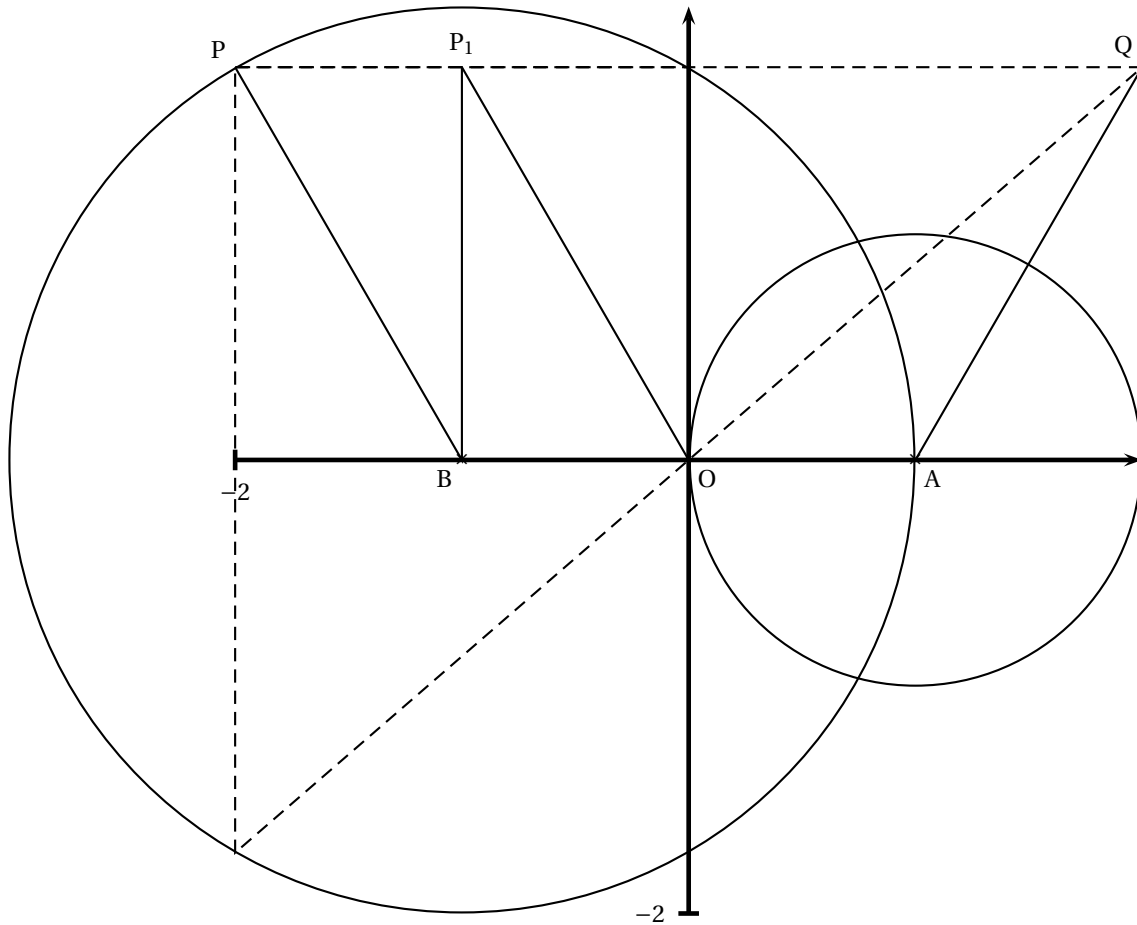
Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ∞
juin 2006

EXERCICE 1

5 points

1. Si $z \neq -1$, $z = \frac{z-1}{z+1} \iff z^2 + z = z - 1 \iff z^2 = -1 \iff z = i$ ou $z = -i$.
Les points invariants par f sont les deux points d'affixes i et $-i$.
2.
 - a. $z \neq -1$, $(z' - 1)(z + 1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z + 1) = z - 1 - z - 1 = -2$.
 - b. L'égalité de ces deux complexes entraîne l'égalité de leurs modules soit $|(z' - 1)(z + 1)| = |-2| \iff |z' - 1| \times |z + 1| = 2 \iff AM' \times BM = 2$.
Même chose pour les arguments : $\arg[(z' - 1)(z + 1)] = \arg(-2) \iff \arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi \quad [2\pi] \iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi \quad [2\pi]$.
3. M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 si et seulement si $BM = 2 \iff |z - (-1)| = 2 \iff |z + 1| = 2$. En reportant dans la première relation trouvée à la question précédente, il suit que $2AM' = 2 \iff AM' = 1$ qui signifie que M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4.
 - a. $p + 1 = -2 + 1 + i\sqrt{3}$. D'où $|p + 1|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \implies |p + 1| = 2$. Donc $p + 1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 - b. On vient de trouver que $|p + 1| = 2 \iff BP = 2$ qui signifie que P appartient au cercle (C).
 - c. Soit P_1 le point d'affixe $p + 1$. Les points P_1 et O sont les images respectives des points P et B dans la translation de vecteur \vec{u} . (OBPP₁) est donc un parallélogramme. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et \overrightarrow{BP} ont la même affixe, d'où le même argument $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ d'après la a. et le même module 2.
D'autre part la construction classique (opposé du conjugué) montre que P et Q sont symétriques autour de l'axe (O, \vec{v}) et B et A le sont aussi. Donc [BP] et [AQ] sont symétriques dans la symétrie autour de (O, \vec{v}) .
Donc par complémentarité $(\vec{u}, \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{3}$
Or d'après 2. b. $(\vec{u}, \overrightarrow{BP}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AP'}) = \pi$. Conclusion : le point P' appartient à la droite (AQ), ou encore les points A, P' et Q sont alignés.
 - d. On en déduit la construction simple de P' :
 - Construire Q symétrique de P autour de l'axe des ordonnées ;
 - Le segment [AQ] coupe le cercle(C) en P'.



Exercice 2

5 points

Proposition 1 : Faux

Avec $M(x; y; z)$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff 2x - 4y + 0(x - 2) = 0 \iff 2x - 4y = 0 \iff x - 2y = 0$ qui est l'équation d'un plan. Or les coordonnées $(1; 2; 0)$ du point I ne vérifient pas cette équation.

Proposition 2 : Vrai

$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \iff \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{CB}\| \iff IM = \frac{1}{2}BC \iff M$ appartient à la sphère de centre I et de diamètre [BC].

Proposition 3 : Faux

En prenant comme base de ce tétraèdre le triangle rectangle OBC, [OA] est une hauteur. Le volume est donc $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}(OBC) \times OA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$.

Proposition 4 : Vrai

Les coordonnées des trois points vérifient bien l'équation donnée.

Le vecteur $\overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; il est donc bien normal au plan (ABC). Enfin

les coordonnées de H vérifient bien l'équation du plan (ABC).

Proposition 5 : Vrai

De $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ on en déduit que $G \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right)$ puis que \overrightarrow{AG} a

pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une équation

tion paramétrique de la droite (AG) est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + 2 \times t \\ z = 2 + (-2) \times t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 2 \times t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Proposition 1 : Vrai**

Par récurrence : initialisation $3|2^{2 \times 0} - 1 \iff 3|0$. Vrai

Hérédité : supposons que $3|2^{2n} - 1 \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $2^{2n} - 1 = 3k \iff 2^{2n} = 3k + 1$.

Or $2^{2(n+1)} = 2^{2n+2} = 2^{2n} \times 2^2 = 4 \times 2^{2n} = 4(3k + 1) = 12k + 4$.

Finalement $2^{2(n+1)} - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ qui est un multiple de 3.

Autre méthode : $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$, d'où $(2^2)^n \equiv 1 \pmod{3} \iff 2^{2n} \equiv 1 \pmod{3} \iff 2^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{3} \iff 2^{2n} - 1$ est un multiple de 3.

Proposition 2 : Faux

$x^2 + x \equiv 0 \pmod{6} \iff x(x+1) \equiv 0 \pmod{6}$. Or les entiers x et $x+1$ sont consécutifs ; il en résulte donc que ou $x \equiv 0 \pmod{3}$ (si $x+1$ est pair), ou $x+1 \equiv 0 \pmod{3}$ (si x est pair) et dans ce dernier cas $x \equiv 0 \pmod{3}$ est faux. Exemple : $2^2 + 2 \equiv 0 \pmod{6}$ et $2 \equiv 0 \pmod{3}$ est faux.

Proposition 3 : Faux

Un couple solution est suggéré : (4 ; 9) puisque $12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$.

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12 \times 4 - 5 \times 9 = 3 \end{cases} \implies (\text{par différence}) 12(x-4) - 5(y-9) = 0 \iff$$

$$12(x-4) = 5(y-9) \quad (1).$$

Donc 5 étant premier avec 12 divise $x-4$; il existe donc α tel que $x-4 = 5\alpha \iff x = 4 + 5\alpha$ et en remplaçant dans l'égalité (1), $y-9 = 12\alpha \iff y = 9 + 12\alpha$. Si α est impair on n'obtient pas les couples solutions proposés.

Proposition 4 : Si d est le PGCD(a ; b) alors il existe deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Le PPCM(a ; b) = $a'b'd$.

En remplaçant dans l'énoncé $a'b'd - d = 1 \iff d(a'b' - 1) = 1$. Cette égalité prouve que d divise 1, donc que $d = 1$. On a donc PGCD(a ; b) = 1 et PPCM(a ; b) = ab .

L'égalité s'écrit donc : $ab - 1 = 1 \iff ab = 2$. Les seuls couples solutions sont (1 ; 2) et (2 ; 1) et le seul avec $a < b$ est le couple (1 ; 2).

Proposition 5 : Vrai

On a par hypothèse $M = 100a + 10b + c = 27k$, (1) $k \in \mathbb{N}$ et $N = 100b + 10c + a$.

Donc $M - N = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$.

Or (1) $\implies -10b - c = 100a - 27k$. Donc $M - N = 9(11a + 100a - 27k) =$

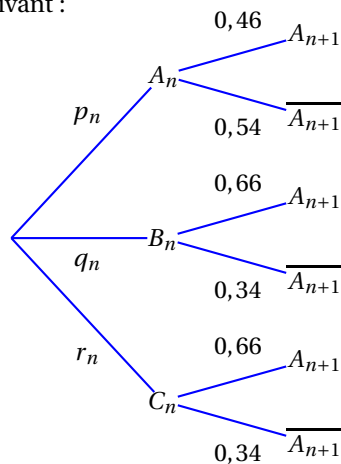
$9(11a - 27k) = 9(3 \times 37a - 3 \times 9k) = 27(37a - 9k)$ qui est bien un multiple de 27.

Exercice 3**4 points**

1. a. $318 + 110 = 428$ personnes sur 1 000 ont eu au moins un retard le premier mois ; la probabilité est donc égale à 0,428.
- b. Sur les 572 personnes n'ayant pas eu de retard le premier mois, $250 + 60 = 310$ ont eu au moins un retard le mois suivant ; la probabilité est donc égale à $\frac{310}{572} = \frac{155}{286}$.

2. a. La lecture du tableau permet de dire que $p_1 = 0,512$, $q_1 = 0,318$ et $r_1 = 0,110$.

b. On dresse l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1}) + p_{B_n}(A_{n+1}) + p_{C_n}(A_{n+1}) = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n$.

- c. Or $p_n + q_n + r_n = 1$. D'où $p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n) = -0,2p_n + 0,66$.
- d. $u_n = p_n - 0,55 \implies u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 = -0,2(u_n + 0,55) + 0,11 = -0,2u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-0,2$.
- e. Comme la raison de la suite (u_n) est $-1 < -0,2 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n - 0,55 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,55$.

Exercice 4

6 points

Partie A

1. On sait que $F'(x) = f(x) \leq 0 \iff f$ est croissante sur \mathbb{R} .
2. Sur $[2; +\infty[$, $f(x) \geq 4e^{-2}$, d'où $\int_2^3 f(t) dt \leq \int_2^x 4e^{-2} dt \iff F(3) \leq 4e^{-2}$.
D'autre part cette intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[2; 3]$ est positive.

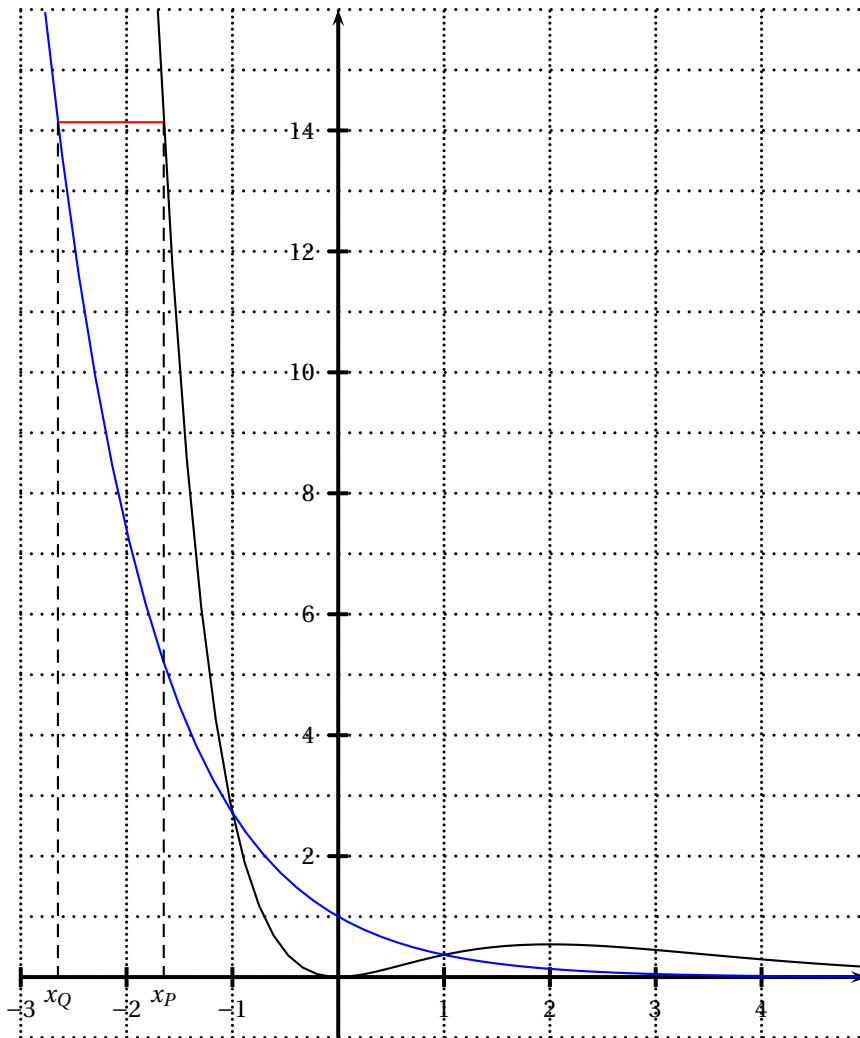
Partie B

1. a. $f(x) = x^2 e^{-x} \implies f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$, dérivée qui a le signe du trinôme $x(2 - x)$. Celui-ci est positif entre les racines 0 et 2. Les variations sont donc bien celles qui sont indiquées dans le tableau.
D'autre part $f(0) = 0$ et $f(2) = 2^2 e^{-2} = 4e^{-2}$.
- b. On a $f(x) - g(x) = x^2 e^{-x} - e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x}$ qui est du signe du trinôme $x^2 - 1$.
Conclusion : (\mathcal{C}) est au dessus (Γ) sauf entre -1 et 1 .
2. La fonction h est la fonction « écart vertical » entre les deux courbes de la question précédente.
 $H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} = e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x + 1) = e^{-x}(x^2 - 1)$.
- a. $H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} = e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x + 1) = e^{-x}(x^2 - 1)$. Donc H est bien une primitive de h .

b. $\mathcal{A}(a) = \int_1^a f(t) dt - \int_1^a g(t) dt = \int_1^a [f(t) - g(t)] dt = \int_1^a h(t) dt = [H(t)]_1^a = (-a^2 - 2a - 1)e^{-a} + 4e^{-1}$.

c. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^2}{e^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{e^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\alpha} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = \frac{4}{e}$.



3. a. Voir ci-dessus

b. On a par définition $PQ = |x_Q - x_P| = x_P - x_Q$ (d'après le graphique pour $x < -1$).

D'autre part par définition : $f(x_P) = m$ et $g(x_Q) = m$. Donc $f(x_P) = g(x_Q)$.

c. Si $PQ = 1$, alors $x_P = x_Q + 1$.

L'égalité précédente $f(x_P) = g(x_Q)$ s'écrit donc :

$$x_P^2 e^{-x_P} = e^{-x_Q} \iff (x_Q + 1)^2 2e^{-x_Q - 1} = e^{-x_Q} \iff (x_Q + 1)^2 e^{-1} = 1 \iff (x_Q + 1)^2 = e \iff x_Q + 1 = -\sqrt{e} \iff x_P = -\sqrt{e}.$$