

❧ Correction du baccalauréat S Polynésie ❧  
juin 2007

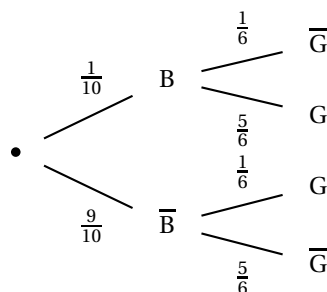
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On peut dresser l'arbre d'une partie :



En suivant les branches qui conduisent à un gain on obtient :

$$p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{5+9}{60} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

2. On a  $p(\overline{G}) = 1 - p(G) = \frac{23}{30}$ .

$$\text{Il faut trouver } p_{\overline{G}}(B) = \frac{p(\overline{G} \cap B)}{p(\overline{G})} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{30}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}.$$

3. On a une épreuve de Bernoulli avec  $n = 4$  et  $p(G) = \frac{7}{30}$ .

La probabilité de gagner exactement deux fois sur quatre parties est :

$$\binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(1 - \frac{7}{30}\right)^2 = \frac{6 \times 7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{25921}{135000} \approx 0,192(0).$$

4. La probabilité de ne gagner aucune partie sur  $n$  jouées est  $\binom{n}{0} \left(\frac{23}{30}\right)^n$ .

La probabilité d'en gagner au moins une est donc :  $1 - \binom{n}{0} \left(\frac{23}{30}\right)^n$ .

Il faut donc trouver  $n$  tel que  $1 - \binom{n}{0} \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq \left(\frac{23}{30}\right)^n \iff$

$$-\ln 100 \geq n \ln \left(\frac{23}{30}\right) \iff n \geq \frac{\ln 100}{\ln \left(\frac{23}{30}\right)} \approx 17,3.$$

Il faut donc jouer au minimum 18 fois.

Partie B

1. a. Loi de probabilité de  $X$  :

|              |                |                 |
|--------------|----------------|-----------------|
| $X$          | + 4            | -1              |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{23}{30}$ |

$$\text{L'espérance mathématique est } E(X) = 4 \times \frac{7}{30} + (-1) \times \frac{23}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

- b. L'espérance de gain étant positive (environ 16 centimes par partie) le jeu est défavorable à l'organisateur.
2. On reprend l'arbre initial avec  $p(B) = \frac{1}{n+1}$  et  $p(\overline{B}) = \frac{n}{n+1}$ .  
 La probabilité de gagner devient  $p(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$ . Il suit que  $p(\overline{G}) = \frac{5n+1}{6(n+1)}$ .  
 L'espérance est donc  $E(X) = 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} + (-1) \times \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{19-n}{6(n+1)}$ .  
 Le jeu est défavorable à l'organisateur si  $E(X) < 0 \iff \frac{19-n}{6(n+1)} \geq 0 \iff n \leq 19$ .

**EXERCICE 2****4 points**

1. En posant  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels,  $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \iff x - iy - 3ix + 3y - 3 + 6i = 0 \iff \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -9x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -8x - 3y + 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -8x + 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$   
 Donc cette équation a une solution :  $\frac{15}{8} + i\frac{3}{8}$ .
2. OAB est équilatéral direct, donc B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . L'écriture complexe de cette rotation est :  $z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}$ .  
 Donc  $z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} = (4 - 2i) \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 1)$ .
3. a. L'égalité  $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) signifie que  $(\vec{u}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) : c'est donc la droite privée du point D contenant D et ayant une pente de 1.  
 b.  $z = 2i + 2e^{i\theta} \iff z - 2i = 2e^{i\theta}$  qui signifie :  
 - que  $|z - 2i| = 2 \iff DM = 2$  ;  
 - que  $(\vec{u}, \overrightarrow{DM}) = \theta + 2k\pi$   
 L'ensemble de ces points M est donc le cercle de centre D et de rayon 2.
4. Si pour  $z \neq -2$ ,  $z' = \frac{z-1}{\overline{z}+2}$ ,  $|z'| = 1 \iff \left| \frac{z-1}{\overline{z}+2} \right| = 1 \iff |z-1| = |\overline{z}+2|$ .  
 Or  $z$  et  $\overline{z}$  sont les affixes de points symétriques autour de  $(O, \vec{u})$  et le point B d'affixe  $-2$  appartient à cet axe  $(O, \vec{u})$ . Donc  $|\overline{z}+2| = |z+2|$ .  
 L'équation devient  $|z+2| = |z-1|$ , qui signifie si on appelle C le point d'affixe 1,  $BM = CM$  ou encore M appartient à la médiatrice de [BC].

**EXERCICE 3****5 points****Enseignement obligatoire**

1. a. Par définition E existe ( $2+1 \neq 0$ ) et vérifie  $2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .  
 Les coordonnées de E sont donc  $\left( \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{3} ; \frac{-6+0}{3} ; \frac{4-4}{3} \right) = (0 ; -2 ; 0)$ .
- b. En utilisant le point E :  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \iff \|2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \iff ME = MO$  qui signifie que M est équidistant de O et de E, donc appartient au plan médiateur de [OE].

$$\text{c. } ME = MO \iff ME^2 = MO^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+2)^2 + z^2 \iff 0 = 4y + 4 \iff y = -1.$$

L'équation du plan médiateur est  $y = -1$ .

$$2. \quad \text{a. On a } AB^2 = \left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + 3^2 + (-4-2)^2 = 4 + 9 + 36 = 49; \text{ donc } AB = 7.$$

Le rayon de la sphère est donc  $\frac{7}{2}$ .

Distance de I centre de la sphère au plan (P) :

$$I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}; -1\right).$$

$$\text{On a } d(I; (P)) = \frac{\left|-\frac{3}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Comme  $\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$  on en déduit que l'intersection (le cercle (C)) de la sphère et du plan (P) n'est pas vide.

b. Les points de (C) vérifient l'équation de (S) et celle de (P), c'est-à-dire le

$$\text{système } \begin{cases} y = -1 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12 \end{cases}$$

Une équation de (C) dans le plan (P) est  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$  qui est

l'équation d'un cercle de centre  $\left(-\frac{1}{3}; -1; -1\right)$  et de rayon  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

3. Droite (ID) : on traduit la relation vectorielle :  $M(x; y; z) \in (\text{ID}) \iff$  il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{ID} \iff$

$$\begin{cases} x - \left(-\frac{1}{3}\right) = t \times 0 \\ y - \left(-\frac{3}{2}\right) = t\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ z - (-1) = t(4\sqrt{3}) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0t - \frac{1}{3} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = 4t\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

4. Si la droite (ID) est sécante au cercle (C) il existe au moins un point dont les coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient l'équation de (ID) et celle de (C). Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} x = 0t - \frac{1}{3} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = 4t\sqrt{3} - 1 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0t - \frac{1}{3} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = 4t\sqrt{3} - 1 \\ (0)^2 + (4\sqrt{3}t)^2 = 12 \end{cases}$$

Ceci entraîne que  $t^2 = \frac{1}{4} \iff t = -\frac{1}{2}$  ou  $t = \frac{1}{2}$ , mais  $y = t - \frac{3}{2} = -1 \iff t = \frac{1}{2}$ .

Seule valeur positive de  $t$  convient. (ID) est donc sécante au cercle (C) au seul point  $F\left(-\frac{1}{3}; -1; 2\sqrt{3} - 1\right)$ .

### EXERCICE 3

5 points

#### Enseignement de spécialité

#### Partie A

1. Une équation du cône est de la forme :  $x^2 + y^2 = \alpha z^2$ . Comme A appartient à  $(\Gamma)$ , alors  $1^2 + 3^2 = \alpha \times 2^2 \iff \alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ .

Une équation de  $(\Gamma)$  est donc  $M(x; y; z) \in (\Gamma) \iff x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$ .

2. **a.** Le plan parallèle à  $xOy$  et contenant B a pour équation  $z = -4$ .
- b.** L'intersection de (P) et de  $(\Gamma)$  est un cercle dont les points ont des coordonnées qui vérifient les deux équations :
 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2 \\ z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ z = -4 \end{cases}$$
 Ce cercle  $(C_1)$  a donc pour centre le point de coordonnées  $(0; 0; -4)$  et de rayon  $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ .
3. De la même façon  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$  et  $y = 3$  entraîne que  $\frac{5}{2}z^2 - x^2 = 9$  et  $y = 3$ . Cette intersection  $(C_2)$  est une hyperbole.

### Partie B

1.  $x^2 + y^2 = 40$ .
  - a.** Les nombres  $x$  et  $y$  ne peuvent, en valeur absolue être supérieurs à 6. On trouve que les seuls carrés dont la somme est égale à 40 sont 36 et 4. Les couples solution sont donc  $(-6; -2), (-6; 2), (-2; -6), (-2; 6), (2; -6), (2; 6), (6; -2), (6; 2)$ .
  - b.** En ajoutant la cote  $z = -4$ , on obtient huit points de  $(C_1)$  dont les coordonnées sont des entiers :  $(-6; -2; -4), (-6; 2; -4), (-2; -6; -4), (-2; 6; -4), (2; -6; -4), (2; 6; -4), (6; -2; -4), (6; 2; -4)$ .
2. **a.**  $(x; y; z) \in \mathbb{Z}^3$  et  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2 \iff 2(x^2 + y^2) = 5z^2$ .  
 D'après Gauss : 2 divise  $2(x^2 + y^2)$ , donc  $5z^2$ ; comme il est premier avec 5, il divise  $z^2$  et donc  $z$  puisque ces deux entiers comprennent exactement les mêmes diviseurs premiers.  
 De la même façon 5 divise  $2(x^2 + y^2)$  et est premier avec 2, donc il divise  $x^2 + y^2$ .  
 On a vu que  $z$  est pair, donc  $z^2$  est un multiple de 4 et par conséquent  $\frac{5}{2}z^2 = x^2 + y^2$  est un multiple de 2.  
 Finalement  $x^2 + y^2$  est un multiple de 2 et de 5, donc de 10.
  - b.**  $M(x; y; z) \in (C_2)$  donc  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$  et  $y = 3$ .  
 D'après la question précédente on a  $x^2 + y^2 = x^2 + 9$  est divisible par 10, soit  $x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{10} \iff x^2 \equiv -9 \pmod{10} \iff x^2 \equiv 1 \pmod{10} \iff x \equiv 1 \pmod{10}$ .
  - c.** Résolution de  $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$  : les seules possibilités sont  $x \equiv 1 \pmod{10}$  et  $x \equiv 9 \pmod{10}$ .
  - d.** Avec  $x = 1, y = 3$ , on trouve que  $z = 2$  ou  $z = -2$ . La première solution correspond à A la seconde à un autre point de  $(C_{02})$  :  $(1; 3; -2)$ .  
 (Il y a aussi  $(9; 3; 6)$  et  $(9; 3; -6)$ ).

### EXERCICE 4

5 points

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

1. **a.**  $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq x \ln x \leq 2 \ln 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + x \ln x \leq 1 + 2 \ln 2$ .  
 La fonction  $f$  est positive sur  $[1; 2]$ .
- b.** On a  $M(1; 1)$  et  $N(2; 1 + 2 \ln 2)$ , donc  $\overrightarrow{MN}(1; 2 \ln 2)$ , ce qui montre que le coefficient directeur de la droite (MN) est  $2 \ln 2$ .

- c. Une équation de la tangente  $T_x$  à  $\mathcal{C}_f$  en un point de coordonnées  $(x; f(x))$ , avec  $1 \leq x \leq 2$  est :  $P(X; Y) \in T_x \iff Y - (1 + x \ln x) = (X - x)f'(x)$ .

$$\text{Or } f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

$$P(X; Y) \in T_x \iff Y - (1 + x \ln x) = (X - x)(1 + \ln x) \iff Y = 1 + x \ln x + X(1 + \ln x) - x - \ln x \iff Y = X(1 + \ln x) + 1 + x \ln x - x - \ln x. \text{ Cette droite est parallèle à la droite (MN) si et seulement si son coefficient directeur est égal à } 2 \ln 2, \text{ soit si } 1 + \ln x = 2 \ln 2 \iff \ln x = \ln 4 - \ln e \iff \ln x = \ln\left(\frac{4}{e}\right) \iff x = \frac{4}{e} \text{ (d'après la croissance de la fonction } \ln).$$

Il existe donc un seul point E entre M et N où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (MN).

- d. D'après la question précédente l'équation de T est  $P(X; Y) \in T \iff Y = X(1 + \ln x) + 1 - x$  avec  $x = \frac{4}{e}$ , l'équation de la tangente en E est donc (puisque le coefficient directeur est égal à  $2 \ln 2$ ),  $Y = (2 \ln 2)X + 1 - \frac{4}{e}$ .

2. a. On a  $g(x) = 1 + x \ln x - (2 \ln 2)x - 1 + \frac{4}{e}$ , donc puisque toutes les fonctions sont dérivables sur  $[1; 2]$ ,  $g'(x) = \ln x + 1 - 2 \ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ .

- b. La fonction  $g'$  s'annule si  $1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = -1 \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff x = \frac{4}{e}$ .

La dérivée  $g'$  est donc négative sur  $\left[1; \frac{4}{e}\right]$  et positive sur  $\left[\frac{4}{e}; 2\right]$ , d'où le tableau de variations de  $g$  :

La fonction est donc décroissante de  $f(1)$  à  $f\left(\frac{4}{e}\right) = 0$  puis croissante de 0 à  $f(2)$ . La fonction  $g$  a donc un minimum en  $\frac{4}{e}$  : elle est donc positive sur l'intervalle  $[1; 2]$ .

Conclusion :  $g(x) \geq 0 \iff f(x) \geq (2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$ , ce qui signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la tangente T.

3. a. On a  $M'\left(1; 2 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1\right)$  et  $N'\left(1; 4 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1\right)$ .

$$\text{aire(MNQP)} = \frac{1}{2}(f(1) + f(2)) \times PQ = \frac{1 + 1 + 2 \ln 2}{2} \times 1 = 1 + \ln 2.$$

$$\text{aire(M'N'QP)} = \frac{2 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1 + 4 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1}{2} \times PQ = 3 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1.$$

- b. Avec l'hypothèse que la courbe reste sous la droite (MN) on en déduit l'encadrement :

$$1 + \ln 2 \leq \mathcal{A} \leq 3 \ln 2 - \frac{4}{e} + 1$$

$$\text{soit } 1,607 < \mathcal{A} < 1,694$$

Conclusion  $1,6 < \mathcal{A} < 1,7$  à  $10^{-1}$  près

## Partie B

1. Intégration par parties :  $u'(x) = x$  ;  $v(x) = \ln x$

Donc  $u(x) = \frac{x^2}{2}$  ;  $v'(x) = \frac{1}{x}$ . Les dérivées  $u'$  et  $v'$  étant continues sur  $[1; 2]$ ,

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \left[ \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{4 \ln 2}{2} - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

2.  $\mathcal{A}$  est, par définition la mesure de la surface limitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

$$\text{D'où } \mathcal{A} = \int_1^2 (1 + x \ln x) \, dx = \int_1^2 1 \cdot dx + \int_1^2 x \ln x \, dx = 1 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = 2 \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{A} = 2 \ln 2 + \frac{1}{4}.$$