Durée : 4 heures

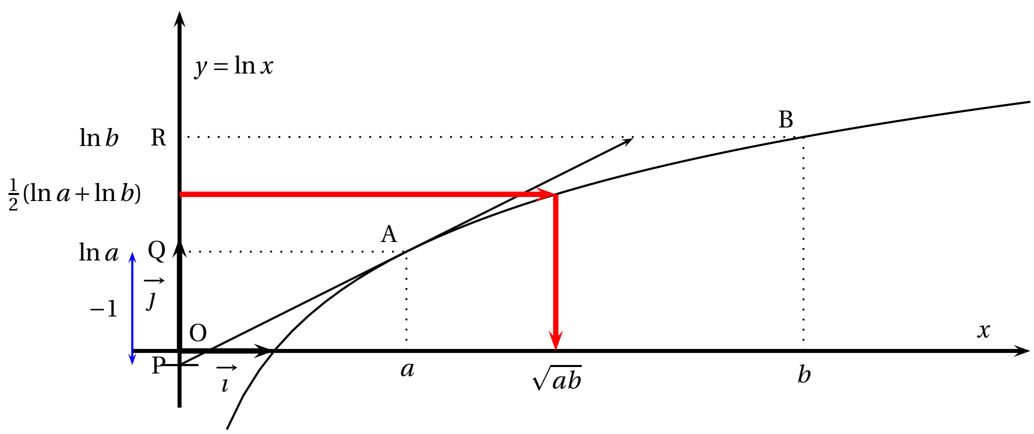
Correction du baccalauréat S La Réunion juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $A(a\,;\,\ln a).M(x\,;\,y)(\neq A) \in (T) \iff \dfrac{y-\ln a}{x-a} = \dfrac{1}{a} \iff y = \dfrac{x}{a} - 1 + \ln a$.

   b. $P(0\,;\,y) \in (T) \iff y = -1 + \ln a$.
   $P(0\,;\,\ln a - 1)$.
   Longueur PQ : On a $Q(0\,;\,\ln a)$.
   $PQ^2 == (0-0)^2 + (\ln a - \ln a + 1)^2 = 1$.
   Donc $PQ = 1$.



   La construction simple de la tangente : on construit P en enlevant 1 à l'ordonnée de Q : la tangente est la droite (PA).

2. R. O. C. : en appliquant la propriété à $\ln m = \ln\left(\sqrt{m} \times \sqrt{m}\right)$, on obtient :
   $\ln m = \ln\sqrt{m} + \ln\sqrt{m} = 2\ln\sqrt{m} \iff \ln\sqrt{m} = \dfrac{1}{2}\ln m$ (avec $m > 0$).

3. On a $\ln a + \ln b = \ln ab = 2\ln\sqrt{ab} \iff \ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
   D'où la construction :
   – On construit la médiatrice de [QR].
   – Cette médiatrice coupe Γ en un point dont l'abscisse est $\ln\sqrt{ab}$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$: la suite est donc croissante.

2. **a.** $h(x) = x^2 + x$; h est dérivable et $h'(x) = 2x + 1$.
   Sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ est décroissante ;
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est croissante.
   $h'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$. La fonction admet en ce point un extremum qui est un minimum $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

Sur $\left]-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ la fonction décroit de 0 à $-\dfrac{1}{4}$ et sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right[$, la fonction croit de $-\dfrac{1}{4}$ à 0.

Conclusion : si $x \in]-1\,;\,0[$, alors $-1 < -\dfrac{1}{4} < h(x) < 0$.

b. Par récurrence :
- Initialisation $-1 < a = u_0 < 0$.
- Hérédité : supposons que pour le naturel n, $-1 < u_n < 0$. D'après la question précédente si $u_n \in [-1\,;\,0[$, alors $u_{n+1} = h(u_n)$ appartient elle aussi à cet intervalle

Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout naturel n, $-1 < u_n < 0$.

3. La suite u est croissante et majorée par 0 : elle est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant 0$.
Or la fonction h, dérivable est continue : la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ donne à la limite $\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 — 6 points

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^x = 0$. Donc comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x - 1 = -1$, on a finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. $x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = x\left(\dfrac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}\right) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = f(x)$.

On en déduit car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$. à la calculatrice
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$: la fonction f est continue en 0.

3. **a.** Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pat $k(x) = e^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable et $k'(x) = e^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$.
Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ de $+\infty$ à $k(0) = 0$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$ de 0 à $+\infty$.
Donc $k(x) \geqslant 0 \iff e^x - x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant x + 1$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$

b. Dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}$.

La fonction g est donc la fonction k qui ne s'annule que pour $x = 0$. Donc $f'(x)$ est composé de termes positifs pour $x \neq 0$
Conclusion : pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$. La fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$. D'où le

c. Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** $f(-x) = \dfrac{-x\text{e}^{-x}}{\text{e}^{-x}-1} = \dfrac{-x}{1-\text{e}^{x}} = \dfrac{x}{\text{e}^{x}-1}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $\begin{pmatrix}-2x\\ f(-x)-f(x)\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-2x\\ \dfrac{x-x\text{e}^{x}}{\text{e}^{x}-1}\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}-2x\\ -x\end{pmatrix}$.

Le coefficient de la droite (MM') est donc $\dfrac{-x}{-2x} = \dfrac{1}{2}$.

b. Les points M et M' sont symétriques autour de O ; les points O, M et M' sont donc alignés.

Quand x tend vers 0 le coefficient directeur de la droite (MM') reste constant égal à $\dfrac{1}{2}$. Or ce coefficient est également celui de la droite (OM) qui a pour limite (par continuité de f) la tangente à la courbe représentative de f au point O.

Ceci montre que le nombre dérivé en 0 existe et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. **a.** $b = \sqrt{3} - 3\text{i}$.

On a $|b|^2 = 3 + 9 = 12 = (2\sqrt{3})^2$. Donc $|b| = 2\sqrt{3}$.

b peut donc s'écrire $b = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. On a aussi $|a| = 2\sqrt{3}$. Donc B appartient au cercle de centre O et de rayon [OA]. Si A′ est le symétrique de A autour de O, il suffit de construire la médiatrice de [OA′] qui coupe le cercle au point B (point du cercle de partie imaginaire positive).

2. **a.** Par définition $\overrightarrow{\text{EA}} + 3\overrightarrow{\text{EC}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{OE}} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\text{OA}} + 3\overrightarrow{\text{OC}}\right) \iff x_{\text{E}} = \dfrac{1}{4} \times (-\sqrt{3})$ et $y_{\text{E}} = \dfrac{1}{4} \times 6$.

Conclusion $\text{E}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$. l'affixe de E est donc $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.

b. Par définition $2\overrightarrow{\text{FA}} + \overrightarrow{\text{FB}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{OF}} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}\right)$. Donc $\text{F}(-\sqrt{3}\ ;\ -1)$.

l'affixe de De F est $f = -\sqrt{3} - \text{i}$.

3. **a.** Calcul de $\dfrac{e-c}{e-b} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i} - 2\text{i}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i} - \sqrt{3} + 3\text{i}} = \dfrac{-\sqrt{3} - \text{i}}{-3\sqrt{3} - 3\text{i}} = \dfrac{\sqrt{3} + \text{i}}{-3\sqrt{3} + 9\text{i}} = \dfrac{3 + 3\text{i}\sqrt{3} + \text{i}\sqrt{3} - 3}{3 \times 12} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\text{i}$ qui est bien un imaginaire pur.

L'égalité $\dfrac{e-c}{e-b} = k\text{i}$ entraîne en prenant les arguments : $\left(\overrightarrow{\text{BE}}, \overrightarrow{\text{CE}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Ceci montre que la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (CE). Mais E barycentre des points A et C appartient à la droite (AC) ; donc E est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle (ABC).

b. On a de même $\dfrac{f-c}{f-b} = \dfrac{-\sqrt{3} - \text{i} - 2\text{i}}{-\sqrt{3} - \text{i} - \sqrt{3} + 3\text{i}} = \ldots = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

En prenant les arguments des deux membres on montre ainsi que les droites (BF) et (CF) sont perpendiculaires et comme F barycentre de A et B appartient à la droite (AB), F est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle (ABC).

4. On peut écrire que H est le barycentre de {(F ; 3) ; (C ; 6)} en utilisant l'associativité du barycentre, donc H appartient à la droite (CF).
De même comme le barycentre du système {A ; 2) ; (C ; 6)} est aussi le barycentre du système {A ; 1) ; (C ; 3)}, on déduit toujours d'après l'associativité du barycentre que H est le barycentre du système {A ; 1) ; (C ; 3) ; (B ; 1)} soit le barycentre du système {E ; 3) ; (B ; 1)}. Donc H appartient à la droite (BE).
Finalement H appartient à deux hauteurs du triangle (ABC) : c'est donc l'orthocentre du triangle du triangle (ABC) (et donc par conséquence la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC)).

EXERCICE 4 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. a. Voir le corrigé ci-dessus.

b. Voir le corrigé ci-dessus.

c. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $3\sqrt{3}-3\text{i}$, dont le carré du module est $9\times3+9 = 36 = 6^2$.
Cette affixe peut donc s'écrire : $3\sqrt{3}-3\text{i} = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 6\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
Conclusion $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{6}$.
De même L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $2\sqrt{3}+2\text{i}$ dont le carré du module est égal à $16 = 4^2$.
Cette affixe peut donc s'écrire $2\sqrt{3}+2\text{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
Conclusion $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. a. Coordonnées de $\overrightarrow{AE}\ \binom{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}$ et $\overrightarrow{AC}\ \binom{2\sqrt{3}}{2}$. On a $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, les vecteurs sont colinéaires, donc A, E et C sont alignés.
De même $\overrightarrow{AF}\ \binom{\sqrt{3}}{-1}$ et $\overrightarrow{AB}\ \binom{3\sqrt{3}}{-3}$. On a $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF}$ ce qui montre que les points A, F et B sont alignés.

b. Voir le sujet obligatoire

c. Voir la figure

3. $z \longmapsto z' = \dfrac{1}{2}\overline{z}-\sqrt{3}$.
Image de A : $z_{A'} = \dfrac{1}{2}\times\left(-2\sqrt{3}\right)-\sqrt{3} = -2\sqrt{3} = z_A$.
Image de B : $z_{B'} = \dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}+3\text{i}\right)-\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i} = z_E$.
Image de C : $z_{C'} = \dfrac{1}{2}\times(-2\text{i})-\sqrt{3} = -\sqrt{3}-\text{i} = z_F$.

4. * Géométriquement : La question précédente montre que H est l'orthocentre de (ABC), donc son image par s est l'orthocentre du triangle (A′B′C′) qui est le triangle AEF.
Il suffit de tracer deux hauteurs de ce triangle.
* Par le calcul :
– On a démontré que $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}$ qui peut s'écrire $\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$.
Le point E est le barycentre du système {(A ; 1) ; (C ; 3)}. Le point H appartenant à la droite (BE) est barycentre des points E et B, soit en utilisant

l'associativité du barycentre :
H bar. {(A ; 1) ; (C ; 3) ; (B ; α)}.

– De même $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF} \iff 2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0}$ qui montre que F est le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1)}. Le point H appartenant à la droite (CF) est barycentre des points F et C, soit en utilisant l'associativité du barycentre :
H bar. {(A ; 2) ; (B ; 1) ; C ; β)}.

– Donc H = bar. {(A ; 2) ; (B ; 2α) ; (C ; 6)} = bar.{(A ; 2) ; (B ; 1) ; C ; β)}.
En prenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 3$, on obtient le même barycentre.
Conclusion : H est la barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 6)}. Or une similitude conserve le barycentre, donc H′ image de H par s est le barycentre du système {(A′ ; 2) ; (B′ ; 1) ; (C′ ; 6)} $\iff$
$\overrightarrow{OH'} = \dfrac{1}{17}\left(2\overrightarrow{OA'} + 1\overrightarrow{OB'} + 6\overrightarrow{OC'}\right)$ égalité qui se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{H'} & = & \dfrac{-4\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{9} \\ y_{H'} & = & \dfrac{\frac{3}{2} - 6}{9} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{H'} & = & -\dfrac{7\sqrt{3}}{6} \\ y_{H'} & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

* Autre prolongement possible : montrer que s est composée :
– de la symétrie autour de $\left(O ; \overrightarrow{u}\right)$,
– de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$,
– de la translation de vecteur $-\sqrt{3}\overrightarrow{u}$.

ANNEXE 2 (enseignement obligatoire et de spécialité)
(*À rendre avec la copie)*

Exercice 4