Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006

Exercice 1 **4 points**

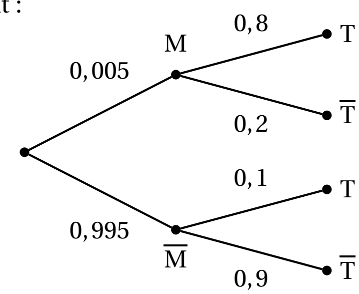
Commun à tous les candidats

1. La probabilité est de $\dfrac{5}{1\ 000} = \dfrac{0,5}{100} = 0,005$.

2. **a.** On suppose le cheptel assez important, donc le tirage successif de 10 animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètres : $n = 10$ et de probabilité $p = 0,005$.
On a $\text{E} = n \times p = 10 \times 0,005 = 0,05$.

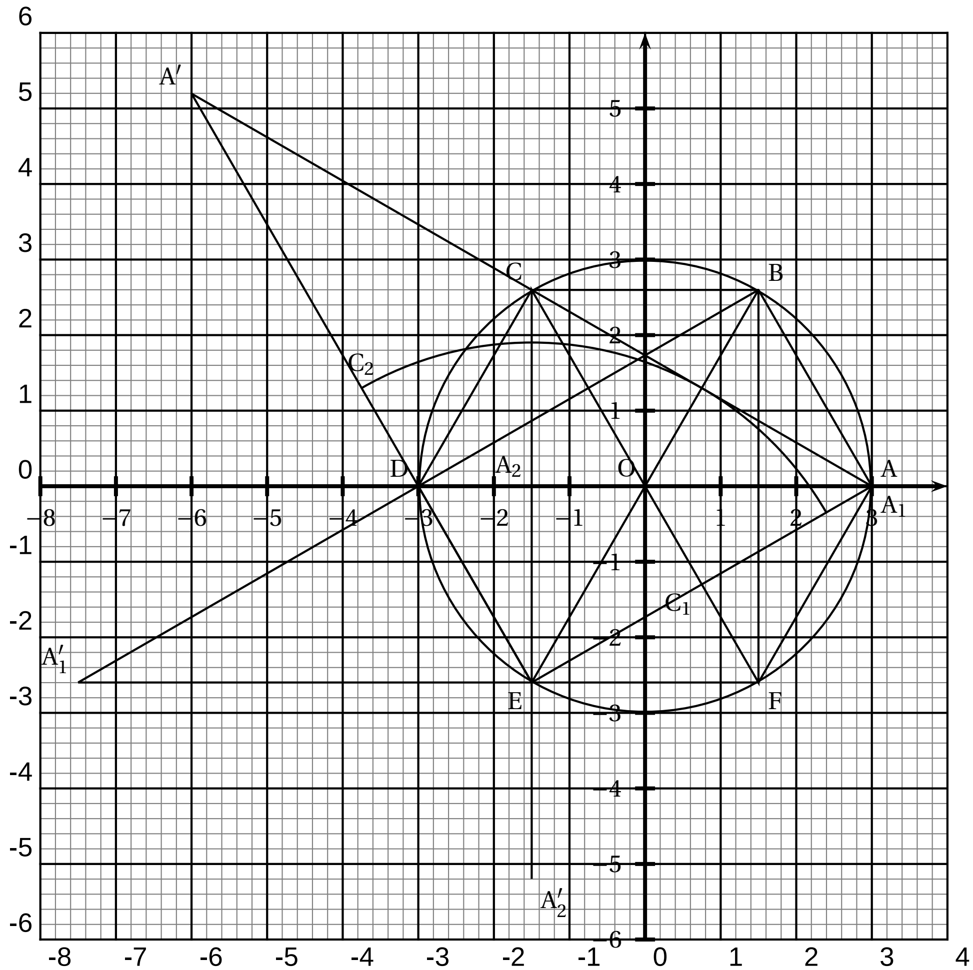
b. On a $p(\text{A}) = \binom{10}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{10} = 0,995^{10} \approx 0,951$.
On a $p(\text{B}) = 1 - p(\text{A}) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,049$.

3. **a.** On a l'arbre suivant :



b. On $p(\text{T}) = p_{\text{M}}(\text{T}) + p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,099\ 5 = 0,103\ 5$.

c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :
$p_{+}(\text{M}) = \dfrac{p(+ \cap \text{M})}{p(+)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,103\ 5} \approx 0,038$.



EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

1. **a.** $z_1 \in \mathbb{R}$ est solution de $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$ si et seulement si $z_1^3-(4+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4=0 \iff \left\{\begin{array}{l}\Re\left(z_1^3-(1+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4\right)=0\\ \Im\left(z_1^3-(1+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4\right)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}z_1^3-4z_1^2+7z_1-4=0\\ -z_1^2+z_1=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}z_1^3-4z_1^2+7z_1-4=0\\ z_1=0 \text{ ou } z_1=1\end{array}\right.$.

   Seul le nombre 1 vérifie la première équation. On a donc $z_1=1$.

   b. On doit avoir $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$.

   En identifiant les termes de plus haut degré on obtient $a=1$ et en identifiant les termes constants : $-4=b(2+2\mathrm{i}) \iff -2=b(1+\mathrm{i}) \iff b=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-(1-\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$.

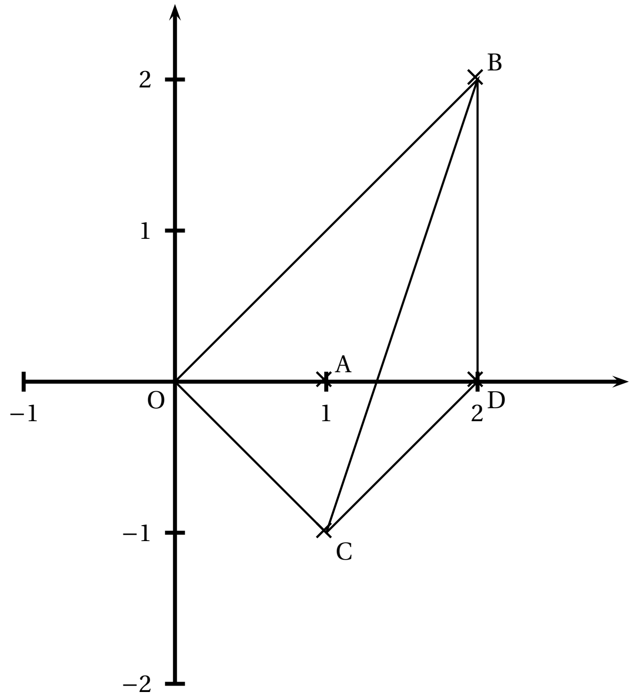
   Conclusion $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-1)(z-2-2\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})$.

2. La factorisation précédente donne les trois solutions de l'équation :

$$S=\{1\ ;\ 2+2\mathrm{i}\ ;\ 1-\mathrm{i}\}.$$

Partie A

1. Figure.



2. On a $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i})}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i})^2}{(1-\text{i})(1+\text{i}} = (1+\text{i})^2 = 2\text{i}$.

   Le module de ce nombre est 2 et un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{2}$.

   Comme $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{2+2\text{i}-0}{1-\text{i}-0}$, on a en prenant le module $\dfrac{|2+2\text{i}-0|}{|1-\text{i}-0|} = \dfrac{\text{OB}}{\text{OC}} = 2 \iff \text{OB} = 2\text{OC}$.

   En prenant les arguments on obtient $\left(\overrightarrow{\text{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : le triangle OBC est rectangle en O.

3. On a de façon immédiate : $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. La droite (OA) est donc une bissectrice du triangle (OBC).

4. Par définition de la rotation : $z_{\text{D}} - z_{\text{C}} = (z_{\text{O}} - z_{\text{C}})\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} \iff z_{\text{D}} - 1 + \text{i} = (-1+\text{i})\,(-\text{i}) \iff z_{\text{D}} - 1 + \text{i} = \text{i} + 1 \iff z_{\text{D}} = 2$.

5. On a vu que $\left(\overrightarrow{\text{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et on a aussi $\left(\overrightarrow{\text{CD}}\ ;\ \overrightarrow{\text{CO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc les droites (OB) et (CD) sont parallèles : le quadrilatère OCDB est donc un trapèze rectangle (et pas un parallélogramme car OB = 2 OC = 2CD.)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe de la rotation r est :

$$z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = z\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

   En particulier $z_{\text{B}} = z_{\text{B}}\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. On a $r(\text{B}) = \text{C}$ et $z_{\text{C}} = \left(\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{4} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$z_D = r(z_C) = 3 \times e^{i\frac{3\pi}{3}}$. Donc D est le symétrique de A autour de O et $z_D = -3$.
On obtient successivement $z_E = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_F = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. **a.** F est l'image de A par six rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ soit une rotation de 2π soit l'identité, donc $r(F) = A$.

b. Le polygone est composé de six triangles isocèles d'angle au sommet mesurant $\frac{\pi}{3}$, donc de six triangles équilatéraux. On a donc AB = BC = CD = DE = EF = FA = 3. Ce polygone est donc un hexagone régulier ce côté 3 et de centre O.

4. **a.** Si $s'(F) = C$, le rapport de cette similitude est : $\frac{EC}{EF} =$

$\frac{|z_c - z_E|}{|z_E - z_E|} = \frac{\left|-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|}{\left||\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|} = \frac{\left|3i\sqrt{3}\right|}{|3|} = \sqrt{3}$.

Le rapport de la similitude s' est égal à $\sqrt{3}$.

On a aussi $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC}\right) = \arg\frac{EC}{EF} = \arg(i\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

La transformation $s \circ s'$ est une similitude comme composée de deux similitudes, son rapport étant le produit des rapports, soit $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et dont un argument est la somme des arguments de s et s', soit $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

b. Comme AD = 6 et AF = 3, que $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{\pi}{3}$, l'image de D par s est le point C. Mais l'image de F par s' est C.

Conclusion : l'image de D par $s' \circ s$ est C.

c. $s' \circ s$ est une similitude directe comme composée de deux similitudes directes : son écriture complexe est donc de la forme $z' = az + b$. On a vu à la question a que $a = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

On vient de démontrer que $s'(D) = C \iff -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)(-3) + b \iff b = -\frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

L'écriture complexe est donc : $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}z - \frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

5. **a.** On a par définition de la symétrie : AC = CA′ ou AC′ = 2AC ;

D'autre part part de façon évidente : AC = CE = EA : le triangle (ACE) est équilatéral et $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AE}\right) \frac{\pi}{3}$.

Conclusion : $s(A') = E$.

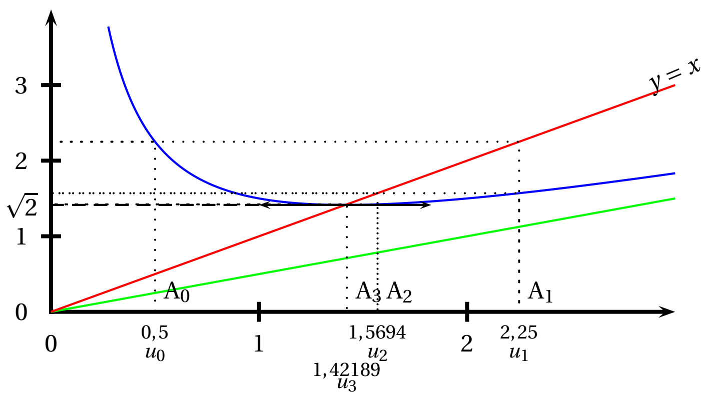
Comme E est le centre de la similitude s', on a $s'(E) = E$.

b. Par le calcul, on a $\frac{z_{A'} + 3}{2} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z_{A'} = -6 + i\sqrt{3}$. En utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$ trouvée au 4 c, on obtient : $z_{s' \circ s(A')} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}\left(-6 + i\sqrt{3}\right) - \frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

On trouve : $z_{s' \circ s(A')} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_E$.

EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.** La fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)$.
le signe de f' est donc celui de $x^2 - 2$, car $x^2 > 0$, pour $x > 0$.
Or sur $]0~;~+\infty[$, $x^2 - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{2}$.
La fonction est :
– décroissante sur $]0~;~\sqrt{2}[$;
– croissante sur $]\sqrt{2}~;~+\infty[$.
D'où la courbe représentative de f :



2. **a.** On a quel que soit n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) = f(u_n)$.
On vient de voir que $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2,25 \geqslant \sqrt{2}$. L'affirmation est vraie au rang 1.
Supposons $u_n \geqslant \sqrt{2}$. D'après la question 1, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}~;~+\infty[$. Donc par application de cette croissance $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. la relation est héréditaire.
Conclusion : quel que soit $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Soit $f(x) - x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2-x^2}{2x}$.
On a vu que si $x \geqslant \sqrt{2}$, $2 - x^2 \leqslant 0$.
Conclusion : si $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) - x \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant x$.

c. On a vu que pour $n > 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$; donc d'après la question précédente $f(u_n) \leqslant u_n$; or $f(u_n) = u_{n+1}$.
Conclusion : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n > 0$. La suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur $[\sqrt{2}~;~+\infty[$; la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell = f(\ell)$.
ℓ est donc solution de l'équation $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) = x \iff 2x = x + \dfrac{2}{x} \iff$
$2x^2 = x^2 + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \ell$, seule solution supérieure ou égale à $\sqrt{3}$.
La suite (u_n) converge vers $\ell = \sqrt{2}$.

EXERCICE 4 — 6 points

Première partie

1. A$\in (P_1) \iff -9 + 9 = 0$: vrai ;
B$\in (P_1) \iff 14 - 12 + 9 = 0$: faux ;
C $\in (P_1) \iff -7 + 4 - 6 + 9 = 0$ vrai ;
D $\in (P_1) \iff 7 - 16 + 9 = 0$: vrai.

$\overrightarrow{AC}(-1\,;\,1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AD}(1\,;\,-4\,-3)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (P_1) est le plan (ACD).

2. $A \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & -1+t \\ 0 & = & -8+2t \\ 3 & = & -10+5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 1$ et $t = 4$. Pas de solution. Donc faux ;

$B \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & -1+t \\ 0 & = & -8+2t \\ 4 & = & -10+5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 3$ et $t = 4$. Pas de solution. Donc faux ;

$C \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & -1+t \\ 1 & = & -8+2t \\ 2 & = & -10+5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 2$ et $t = 4,5$. Pas de solution. Donc faux ;

$D \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & -1+t \\ -4 & = & -8+2t \\ 0 & = & -10+5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 2$ et $t = 2$ et $t = 2$. Donc vrai ;

3. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de la droite (Δ_1) a pour coordonnées $\overrightarrow{u}(1\,;\,2\,;\,5)$. $\overrightarrow{v}(7\,;\,4\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (P_1).
Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 7+8-15 = 0$. La droite (Δ_1) est parallèle au plan (P_1). Or en 1 et 2 on a trouvé que D est un point de (Δ_1) et de (P_1). Donc la droite (Δ_1) est incluse dans (P_1).

4. Un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -1+t & = & 7+2t' \\ -8+2t & = & 8+4t' \\ -10+5t & = & 8-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t-2 & = & 8 \\ t-2 & = & 8 \\ 5t+t' & = & 18 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 4 \\ t' & = & -2 \end{array}\right.$$

On obtient donc une solution unique qui donne comme coordonnées (3 ; 0 ; 10).
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes (et donc complanaires).

5. Un point commun aux deux plans a ses coordonnées qui vérifient le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} 7x+4y-3z+9 & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right.$

En posant $y = t$, on obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & t \\ 7x+4t-3z+9 & = & 0 \\ x & = & 2t \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & t \\ x & = & 2t \\ z & = & 6t+3 \end{array}\right.$ La bonne réponse est la deuxième.

Deuxième partie

1. On traduit pour un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{u} \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} x-0 & = & a \\ y-0 & = & 0 \\ z-3 & = & -a \end{array}\right.$
On a donc $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$.
De même $\overrightarrow{BM'} = b\overrightarrow{v} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x'-2 & = & 0 \\ y'-0 & = & b \\ z'-4 & = & b \end{array}\right.$.
On a donc $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$.
Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'}(2-a\,;\,b\,;\,a+b+1)$.

2. La droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D$'$) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u} & = & 0 \\ \overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{v} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2-a-a-b-1 & = & =0 \\ b+a+b+1 & = & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a+b & = & 1 \\ a+2b & = & -1 \end{array}\right.$$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2a+b & = & 1\\ a+2b & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4a+2b & = & 2\\ a+2b & = & -1\end{array}\right. \Rightarrow 3a = 3 \iff a = 1$. On en déduit que $b = -1$.
On a donc H$(1\,;0\,;2)$ et H$'(2\,;\,-1\,;\,3)$.
On calcule $\text{HH}'^2 = 1^2+(-1)^2+1^2 = 3 \iff \text{HH}' = \sqrt{3}$.

4. **a.** Avec $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$ et $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$, on calcule $MM'^2 = \|\overrightarrow{MM'}\|^2 = (2-a)^2+b^2+(a+b+1)^2 = 4-a^2-4a+b^2+a^2+b^2+1+2a+2b+2ab = 2a^2+2b^2-2a+2b+2ab+5 = a^2+b^2+2aba^2+1-2a+b^2+2b+1+3$.
Soit enfin $MM'^2 = (a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3$.

b. Les trois premiers termes de la somme précédente sont des carrés dont la plus peitie valeur est 0. On a donc $MM'^2 \geqslant 3$ et cette valeur 3 est atteinte lorsque les trois carrés sont nuls, c'est-à-dire quand $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0\\ a-1 & = & 0\\ b+1 & = & 0\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0\\ a & = & 1\\ b & = & -1\end{array}\right.$
On retrouve donc les valeurs $a = 1$ et $b = -1$ et la distance (la plus courte) entre les deux droites : elle vaut $\sqrt{3}$.