ULC 545

SESSION 2005

Filière BCPST

MATHÉMATIQUES

Epreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Introduction

Le but de ce sujet est de modéliser la répartition spatiale d'une espèce $\mathcal{E}$ sur une suite $(\mathcal{T}_n)$ de territoires indicés par les nombres entiers naturels ou relatifs, où, pour tout n, les territoires $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_{n+1}$ sont voisins géographiquement.

Le nombre réel positif u_n désignera la densité de population présente sur $\mathcal{T}_n$. Dans l'interprétation classique, les territoires forment un chapelet d'îles alignées, et l'espèce $\mathcal{E}$ est un Oiseau ou un Amphibien dont les individus migrent d'île en île. Une autre interprétation consiste à considérer les $(\mathcal{T}_n)$ comme des organismes sessiles (fixés au sol) susceptibles d'être infectés par les individus d'une espèce parasite $\mathcal{E}$, qui se propagent séquentiellement d'un hôte parmi les $(\mathcal{T}_n)$ à un autre.

Le sujet comporte trois parties indépendantes, présentées par ordre de difficulté croissante, mais pouvant être traitées dans un ordre quelconque.
Les candidats composeront sur des copies séparées pour chaque partie, en les identifiant clairement. Ils et elles veilleront au soin de la présentation, à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Notations

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}^\star$ lorsqu'il est privé de 0, et $\mathbb{N}$ autrement. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Pour deux ensembles A et B quelconques, on note de manière usuelle $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ si $\forall x \in \mathrm{A}$, $x \in \mathrm{B}$; et $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ si $\exists x \in \mathrm{A}$, $x \notin \mathrm{B}$.

Pour toute fonction f et toute fonction g non nulle sur un intervalle I contenant 0, on écrit $f = \mathrm{o}(g)$ pour :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X est notée $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et sa variance $\mathrm{Var}(\mathrm{X})$. La covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y est notée $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Rappel

Soit une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence linéaire d'ordre k suivante :

$$v_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\, v_{n+i} \qquad n \geqslant 0. \tag{1}$$

Soit P le polynôme de degré k associé

$$\mathrm{P}(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i\, x^i \qquad x \in \mathbb{R},$$

et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_j)$ $(j \leqslant k)$, j racines distinctes de P. Il est alors immédiat que pour tout j-uplet de nombres réels $(c_1, \ldots, c_j)$, la suite définie par

$$v_n = \sum_{i=1}^{j} c_i\, \lambda_i^n \tag{2}$$

est solution de (1).
On admettra la réciproque suivante : **si P a k racines distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, toute suite solution de (1) s'écrit sous la forme :**

$$v_n = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \lambda_i^n \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Première partie : migration aux plus proches territoires

Le but de cette partie est d'établir quelques résultats simples sur la dynamique de cette population lorsque sont **seuls possibles les mouvements d'un territoire vers ses deux voisins immédiats** (voir figure 1). La densité de population de $\mathcal{T}_n$ au temps t est notée $u_n(t)$.

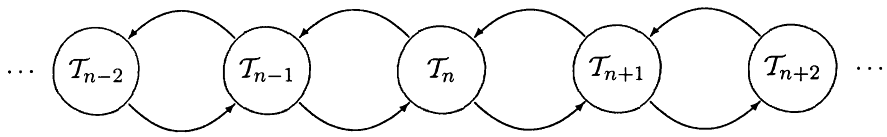

FIG. 1 – Une représentation de la suite des territoires $(\mathcal{T}_n)$ et des mouvements de population entre territoires adjacents.

A Migration unidirectionnelle

Dans cette sous-partie, les individus ne peuvent migrer que vers la droite, c'est-à-dire du territoire $\mathcal{T}_n$ vers $\mathcal{T}_{n+1}$.
La dynamique est modélisée par l'équation différentielle suivante, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{du_n}{dt} = -mu_n + mu_{n-1}$$

1. Interpréter cette équation ainsi que le réel positif m.

2. Écrire $v_n(t) = u_n(t)\, \mathrm{e}^{mt}$ et établir l'équation différentielle vérifiée par v_n.

Dans le reste de cette sous-partie, on se donne la condition initiale :

$$u_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *a)* Montrer que pour tout temps $t > 0$ et $n \leqslant -1$, $v_n(t) = u_n(t) = 0$.

b) Calculer $v_0(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, pour tout $t > 0$.

c) Proposer une expression générale pour $v_n(t)$, et la démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

4. *a)* Exprimer $u_n(t)$ en fonction de m, n et t. Nommer cette distribution, et rappeler sans démonstration la quantité de population totale $\mathrm{U}(t)$ et la position moyenne de la population $\mathrm{R}(t)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{U}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t), \qquad \mathrm{R}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\, u_n(t).$$

b) Préciser les limites, lorsque $t \to \infty$, de $u_n(t)$, $\mathrm{U}(t)$ et $\mathrm{R}(t)$. Interpréter.

B Migration bidirectionnelle

À présent les migrations sont possibles dans les deux sens, mais pas de $\mathcal{T}_0$ vers $\mathcal{T}_{-1}$.

Soient m_g et m_d deux réels positifs. Les équations gouvernant la dynamique de la population sont maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = m_d\, u_{n-1} - (m_d + m_g)\, u_n + m_g\, u_{n+1} & \text{si } n \geqslant 1, \\ \dfrac{du_0}{dt} = -m_d\, u_0 + m_g\, u_1 & \end{cases}$$

5. Interpréter ces équations ainsi que les réels m_g et m_d. Donner une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n quand la population est à l'équilibre.

Dans la suite de cette sous-partie, u_n désignera la densité de population présente sur le territoire $\mathcal{T}_n$ **quand la population est à l'équilibre.**

6. *a)* Que devient cette relation lorsque $m_g = m_d$? Poser alors $\delta_n = u_{n+1} - u_n$ et montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire u_n en fonction de n, u_1 et u_0.

b) Lorsque $m_g \neq m_d$, écrire u_n sous la forme

$$u_n = c_1\, \lambda_1^n + c_2\, \lambda_2^n \qquad \forall n \geqslant 0,$$

où $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ sont deux réels à déterminer.

On suppose désormais qu'initialement la quantité de population totale est finie et vaut 1 ($\mathrm{U}(0) = 1$).

7. Montrer que si $m_g \leqslant m_d$, le seul équilibre possible est $u_n = 0$, pour tout $n \geq 0$. Comparer avec la question 4.*b*)

8. Calculer l'équilibre final lorsque $m_g > m_d$. Nommer cette distribution et rappeler sa moyenne $\mathrm{R} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, u_n$.

Deuxième partie : migration à longues distances

Comme dans la sous-partie précédente, les migrations de proximité sont bidirectionnelles avec une barrière à gauche du territoire $\mathcal{T}_0$ (pas de transfert de $\mathcal{T}_0$ vers $\mathcal{T}_{-1}$). Mais à présent, il s'agit de modéliser, en plus des migrations de proximité, les échanges de population entre territoires éloignés.

Si de tels territoires sont choisis au hasard parmi les n premiers, où n est un entier qu'on considérera fixé dans un premier temps ($n \geq 1$), la dynamique de la densité de population u_k, pour tout k, est gouvernée par l'équation dite *de champ moyen* :

$$\frac{du_k}{dt} = m_d\, u_{k-1} - (m_d + m_g + m_\infty)\, u_k + m_g\, u_{k+1} + m_\infty \bar{u}_n,$$

$$\text{où} \quad \bar{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Le but de la prochaine sous-partie est de déterminer quand l'on peut faire tendre n vers $+\infty$. En d'autres termes, il s'agit de savoir à quelles conditions l'on peut définir la densité moyenne globale sur l'ensemble des territoires colonisés, c'est-à-dire la limite quand $n \to \infty$ des quantités $\bar{u}_n$, appelées *moyennes de Cesàro.*

A Moyennes de Cesàro

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles, et $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n \text{ existe et est finie.}$$

Lorsqu'elle existe, **une telle limite sera appelée MCL** (pour *moyenne de Cesàro limite*). On désignera par $\mathcal{L}$ (respectivement $\mathcal{B}$) le sous-ensemble de $\mathcal{R}$ formé des suites convergentes (respectivement bornées).

1. Rappeler sans démonstration une relation d'inclusion entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est non vide, et que $\mathcal{C}$ n'est pas égal à $\mathcal{R}$ tout entier.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ contient l'ensemble des suites périodiques et exprimer la MCL d'une suite de période T à l'aide de $\bar{u}_{\mathrm{T}}$.

4. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{B}$. Considérons à cette fin la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } \sqrt{n} \text{ est entier} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $k \in \{n^2+1, \dots, (n+1)^2\}$,

$$\frac{n}{2(n+1)} < \bar{u}_k \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$

b) Montrer que la suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, donner sa limite et conclure.

5. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{C}$.
Soit un entier naturel q tel que $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \in \{q^{2p+1}, \dots, q^{2p+2}-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit ensuite :

$$\Pi_p = \bar{u}_{q^{2p+2}}, \qquad \mathrm{I}_p = \bar{u}_{q^{2p+1}}.$$

a) Calculer Π_p et I_p pour tout entier p.

b) Établir que

$$\lim_{p\to\infty} \Pi_p = \frac{q}{q+1}, \qquad \lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p = \frac{1}{q+1}.$$

c) Conclure.

6. L'objectif de cette question est de montrer que $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ (*théorème de Cesàro*).

a) On suppose dans un premier temps que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, et on se donne $\varepsilon > 0$.

a-i) Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1} u_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

a-ii) Montrer qu'il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_1$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

a-iii) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{u}_n = 0$.

b) Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite quelconque ℓ, considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ et conclure.

B Migration à longues distances et densité moyenne constante

Dans cette sous-partie, on suppose qu'au temps $t = 0$, la population admet une densité moyenne $\bar{u}(0)$, appelée *moyenne de Cesàro limite*, strictement positive

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(0) = \bar{u}(0) > 0,$$

où pour tout temps $t \geqslant 0$

$$\bar{u}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k(t).$$

On suppose qu'en plus des mouvements aux territoires les plus proches, les échanges de populations se font également « uniformément au hasard » parmi tous les territoires $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On admettra que pour tout $t \geq 0$, la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une moyenne de Cesàro limite $\bar{u}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{u}_n(t)$. Les *équations de champ moyen* qui régissent cette dynamique sont alors données par

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = m_d\, u_{n-1} - (m_d + m_g + m_\infty)\, u_n + m_g\, u_{n+1} + m_\infty\, \bar{u} \quad \text{si } n \geqslant 1, \\ \dfrac{du_0}{dt} = -(m_d + m_\infty) u_0 + m_g\, u_1 + m_\infty\, \bar{u} \end{cases}$$

On suppose également qu'au temps $t = 0$, la suite $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

7. *a)* Expliquer pourquoi la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée pour tout temps $t > 0$.

b) Établir l'équation différentielle satisfaite par $\bar{u}_n$.

c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\bar{u}(t) = \bar{u}(0)$.

8. Considérer la densité résiduelle $\tilde{u}_n(t) = u_n(t) - \bar{u}$ et écrire le système d'équations différentielles vérifié par $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans la suite de cette sous-partie, $\tilde{u}_n$ désignera cette densité résiduelle **quand la population est à l'équilibre.**

9. Écrire $\tilde{u}_n$ sous la forme

$$\tilde{u}_n = c_1\,\mu_1^n + c_2\,\mu_2^n \qquad \forall n \geqslant 0,$$

où $\mu_1 < \mu_2$ sont deux réels à déterminer.

10. Donner le signe de μ_1, le signe de μ_2, et la position de $|\mu_1|$ et $|\mu_2|$ par rapport à 1. En déduire que $c_2 = 0$.

11. Soient $x = m_\infty/m_g$ et $\lambda = m_d/m_g$. Dans cette question uniquement, on s'intéresse au cas où m_∞ est négligeable devant m_g.

a) Donner l'interprétation biologique de cette hypothèse et sa conséquence mathématique pour le paramètre x.

b) **Cas $\boldsymbol{\lambda = 1}$.** Montrer que $\mu_1 = 1 - x^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$, où α est un réel positif à déterminer.

c) **Cas $\boldsymbol{\lambda > 1}$.** Montrer que

$$\mu_1 = 1 - \delta x + \mathrm{o}(x),$$

où δ sera exprimé en fonction de λ.

d) **Cas $\boldsymbol{\lambda < 1}$.** Montrer que

$$\mu_1 = \lambda - \gamma x + \mathrm{o}(x),$$

où γ sera exprimé en fonction de λ.

12. *a)* Calculer c_1 en fonction de λ, x et $\bar{u}$.

b) En distinguant les cas $\lambda = 1$, $\lambda > 1$ et $\lambda < 1$, donner le signe de c_1 et interpréter.

c) Lorsque $c_1 < 0$, vérifier que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Représenter l'allure de u_n en fonction de n, selon la position de λ par rapport à 1.

Troisième partie : migration aléatoire

Dans cette dernière partie, on ne considère plus la densité moyenne de l'espèce $\mathcal{E}$ sur chaque territoire $\mathcal{T}_n$, mais, de façon plus précise, **le nombre d'individus $\mathbf{X_n}$** présents sur $\mathcal{T}_n$, qui est une *variable aléatoire* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La dynamique de cette population est discrète, c'est-à-dire que les migrations se font uniquement aux temps $t = 1, 2, 3, \ldots$ De plus, on suppose que tous les individus se déplacent indépendamment les uns des autres, et qu'à chaque temps $t \in \mathbb{N}^\star$, un individu présent sur le territoire $\mathcal{T}_n$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \text{migre en} & \mathcal{T}_{n+1} & \text{avec probabilité} & p_d \\ \text{migre en} & \mathcal{T}_{n-1} & \text{avec probabilité} & p_g \\ \text{demeure en} & \mathcal{T}_n & \text{avec probabilité} & 1 - p_g - p_d, \end{array}\right.$$

où $p_g\, p_d \neq 0$. Tous les territoires sont indifféremment accessibles (il n'y a de barrière nulle part).

Dans cette dernière partie, pour toute question dont le résultat est donné, il n'est pas demandé de faire de longues démonstrations mais de donner des justifications rigoureuses à l'aide d'*arguments précis.*

A Comportement asymptotique de la population

1. On s'intéresse dans cette question au sort d'**un individu** initialement en $\mathcal{T}_0$. On désigne sa position au temps t, c'est-à-dire le numéro du territoire qu'il occupe au temps t, par $\mathrm{Y}(t)$ (en particulier $\mathrm{Y}(0) = 0$).
a) Montrer qu'on peut écrire $\mathrm{Y}(t)$ sous la forme :

$$\mathrm{Y}(t) = \sum_{k=1}^{t} \mathrm{Z}_k,$$

où les variables aléatoires $(\mathrm{Z}_k)_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées, et dont on précisera la loi.

b) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_1)$, $\mathrm{Var}(\mathrm{Z}_1)$, puis $\mathbb{E}(\mathrm{Y}(t))$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{Y}(t))$.

2. *a)* Montrer que si $t < n$, alors $\mathbb{P}\big(\mathrm{Y}(t) \in \,]-\infty\,; -n] \cup [n\,; +\infty[\,\big) = 0$.

b) On suppose qu'au temps $t = 0$, tous les territoires sont occupés par au moins un individu. Établir pour tout $a \in \mathbb{N}$ **et pour tout temps $t \in \mathbb{N}$** les deux égalités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{ la population totale présente au temps } t \text{ dans } (\mathcal{T}_n)_{n\leqslant -a} \text{ est infinie }) &= 1,\\
\mathbb{P}(\text{ la population totale présente au temps } t \text{ dans } (\mathcal{T}_n)_{n\geqslant a} \text{ est infinie }) &= 1.
\end{aligned}$$

3. On suppose dans cette question que $p_g \neq p_d$.
a) Énoncer la loi des grands nombres pour la suite $(\mathrm{Z}_k)_{k\geq 1}$. En déduire $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Y}(t)$, en distinguant les cas $p_g < p_d$ et $p_g > p_d$.

b) Comparer avec le résultat de la question 2.*b*) : si la quantité de population initiale ($t = 0$) était finie, que deviendrait ce résultat (distinguer les cas $p_g < p_d$ et $p_g > p_d$) ?

B Covariances spatiales à l'équilibre

On suppose désormais qu'au temps $t = 0$, tous les territoires sont occupés par exactement un individu.
Résultat admis. Soient $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ deux variables aléatoires entières, non nécessairement indépendantes, et p_1, p_2 deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;1]$. Pour $i = 1, 2$, on définit V_i (sachant U_i) comme une variable binômiale de paramètres p_i et U_i. **On admettra alors que**

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = p_1\, p_2\, \mathrm{Cov}(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2).$$

4. Pour simplifier les notations, on omettra la mention explicite du temps en écrivant X_n pour $X_n(t)$, et X'_n pour $X_n(t+1)$.
Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$X'_n = D_{n-1} + R_n + G_{n+1},$$

où D_{n-1}, R_n, G_{n+1} sont des variables aléatoires entières, qui, sachant $\{X_{n-1}, X_n, X_{n+1}\}$, sont indépendantes et telles que

$$\begin{cases} D_{n-1} & \text{est une binômiale de paramètres} & p_d & \text{et} & X_{n-1} \\ R_n & \text{est une binômiale de paramètres} & 1 - p_d - p_g & \text{et} & X_n \\ G_{n+1} & \text{est une binômiale de paramètres} & p_g & \text{et} & X_{n+1}. \end{cases}$$

5. Expliquer pourquoi $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ ne dépend que de $j - i$.
On désignera donc dorénavant $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k})$ par c_k.
Montrer que $c_k = c_{-k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

6. *a)* Soient $n, k \in \mathbb{Z}$.

Exprimer $\mathrm{Cov}(X'_n, X'_{n+k})$ en fonction de c_{k-2}, c_{k-1}, c_k, c_{k+1} et c_{k+2}.

b) Montrer que les covariances entre quantités de population **à l'équilibre** sont reliées par l'équation suivante

$$c_{k+2} + \sigma c_{k+1} - 2(1+\sigma)c_k + \sigma c_{k-1} + c_{k-2} = 0,$$

où l'on a noté

$$\sigma = \frac{(p_g + p_d)(1 - p_g - p_d)}{p_g\, p_d}.$$

7. *a)* Expliciter le polynôme P de degré 4 associé à cette relation de récurrence linéaire.

b) Montrer que si λ est racine de P, alors λ^{-1} également. Expliquer pour quelle raison.

c) Trouver une racine évidente de P et montrer que c'est une racine double.

d) Exprimer alors les deux autres racines λ_1 et λ_2 de P, en fonction de σ ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2$). Montrer que λ_1 et λ_2 sont négatives, et interpréter.

8. *a)* Montrer que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ et donner la position de λ_1 et λ_2 par rapport à -1.

b) Expliquer pourquoi $\lim\limits_{|k| \to \infty} c_k = 0$. Exprimer chacune des suites $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ sous la forme d'une suite géométrique.

c) Montrer que si $p_g = p_d = p/2$, alors la covariance à l'équilibre entre deux territoires distants de k vaut

$$c_k = c_0 \left(-\frac{1}{p}\right)^{|k|} \left(1 - \sqrt{1-p}\right)^{2|k|} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$