

UE Énergie (PY49HU23)

Modélisation et Commande
des Dispositifs de Gestion de l'Énergie Électriques

Conversion électromécanique (PY49HM31)

Gestion de l'énergie électrique (PY49HM32)

MASTER SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ MÉCATRONIQUE (M2-S2)

UFR PHYSIQUE ET INGÉNIERIE

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Edouard Laroche

laroche@unistra.fr

<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

2010–2011

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Présentation des systèmes électriques	7
1.2	Description du cours	7
1.2.1	Conversion électromécanique	7
1.2.2	Gestion de l'énergie électrique	7
1.3	Prérequis	8
2	Notions de base	9
2.1	Signaux électriques (rappels)	9
2.2	Dipôles et générateurs (rappels)	11
2.2.1	Conventions	11
2.2.2	Résistance	11
2.2.3	Inductance	11
2.2.4	Capacité	12
2.2.5	Sources	12
2.3	Puissance en régime alternatif (rappels)	12
2.3.1	Réseau monophasé	12
2.3.2	Harmoniques de courant	14
2.3.3	Régime triphasé	15
2.4	Régime déséquilibré	17
2.4.1	Les trois types de régime équilibré	17
2.4.2	Décomposition d'un système triphasé déséquilibré	18
2.4.3	Étude	19
2.5	Magnétostatique : Production de couple et de force	21
2.5.1	Principe	21
2.5.2	Régime linéaire	21
2.5.3	Fonctionnement d'un moteur élémentaire	21
2.5.4	Système polyphasé	22
3	Les convertisseurs statiques	25
3.1	Introduction	25
3.1.1	Les différents types de conversion	25
3.1.2	Pourquoi l'électronique de puissance est-elle basée sur la commutation ?	25
3.1.3	Principe de modélisation	26
3.1.4	Les éléments passifs	27
3.2	Les composants	28
3.2.1	Diode	28
3.2.2	Thyristor	29
3.2.3	GTO	29
3.2.4	Transistor	29
3.2.5	Associations de composants	30

3.2.6	Pertes dans les composants	30
3.3	Les convertisseurs continu/continu	31
3.3.1	Hacheur abaisseur	31
3.4	Les convertisseurs continu/alternatif	35
3.4.1	Onduleur monophasé	35
3.4.2	Onduleur triphasé	37
3.5	Les convertisseurs alternatif/alternatif	40
3.5.1	Gradateur	40
3.5.2	Alimentation sans interruption (ASI)	40
3.6	Les convertisseurs alternatif/continus	40
3.6.1	Redresseur monophasé	40
3.6.2	Redresseur triphasé	44
3.6.3	PFC	45
3.6.4	Redresseur à MLI	46
4	Amélioration de l'énergie électrique	51
4.1	Position du problème	51
4.1.1	Gestion de l'énergie électrique	51
4.2	La compensation de l'énergie réactive	52
4.3	Le filtrage des harmoniques	52
4.3.1	Choix des inductances de ligne	52
4.3.2	Filtre passif	52
4.3.3	Filtre actif	52
4.3.4	Alimentation à facteur de puissance unitaire	52
5	Les différentes technologies d'actionneurs électriques	53
5.1	Principe général de fonctionnement	53
5.2	La machine à courant continu	53
5.2.1	Principe et équations	54
5.2.2	Différents types de moteurs	55
5.3	La machine synchrone	58
5.3.1	Rotor	58
5.3.2	Stator	58
5.3.3	Force électromotrice induite	60
5.3.4	Modèle de Behn-Eschenburg	61
5.4	La machine asynchrone	62
5.4.1	Constitution	62
5.4.2	Principe de fonctionnement	63
5.4.3	Modèle en régime permanent sinusoïdal	63
5.4.4	Bilan de puissance	65
5.4.5	Expression du couple	66
6	Modèles dynamiques des machines à courant alternatif	69
6.1	Production d'un champ tournant	69
6.1.1	Champ produit dans l'entrefer par une spire	69
6.1.2	Champ produit dans l'entrefer par un bobinage triphasé	70
6.1.3	Roue polaire	70
6.1.4	Flux traversant une spire	71
6.1.5	Mutuelle inductance entre deux spires décalées	71
6.2	Machine synchrone	71
6.2.1	Modèle triphasé	71
6.2.2	Modèle diphasé	73

6.2.3	Modèle de Park	76
6.2.4	Régime permanent	78
6.2.5	Alternateur	80
6.3	La machine asynchrone	81
6.3.1	Modèle triphasé	81
6.3.2	Modèle diphasé	83
6.3.3	Modèle de Park dans un repère quelconque	85
6.3.4	Modèle de Park dans le repère du stator	86
6.3.5	Commande par orientation du flux du rotor	86
A	Lexique	89
A.1	Convertisseur de fréquence	89
A.2	Démarrreur	89
A.3	Freinage dynamique	89
A.4	Moteur DC brushless	89
A.5	Onduleur	90
A.6	Pompe à chaleur	90
A.7	Variateur	90
B	Méthode de l'optimum symétrique	91

Chapitre 1

Introduction

Ce document a été développé pour servir de support de cours à l'UE Energie de la spécialité Mécatronique du master Sciences pour l'Ingénieur de l'Université de Strasbourg. Il détaille notamment la modélisation et la commande des systèmes électriques.

Avertissement. Ce document n'a pas été conçu pour être autosuffisant. La présence au cours et un complément de travail sont indispensables pour arriver à une maîtrise des problématiques visées par le cours. Il vous permettra cependant d'approfondir les aspects qui ne pourront qu'être traités rapidement en cours.

1.1 Présentation des systèmes électriques

Électronique de puissance, moteurs/actionneurs électriques, problèmes d'harmoniques, de facteur de puissance, production décentralisée, charge/source...

1.2 Description du cours

1.2.1 Conversion électromécanique

Contenu

- Convertisseurs statiques : redresseurs, hacheurs, onduleurs ; leur commande
- Utilisation des convertisseurs statiques pour l'alimentation des moteurs
- Utilisation des convertisseurs statiques pour le filtrage actif

Compétences visées

- Connaître des systèmes permettant de mettre en forme l'énergie électrique.
- Identifier les formes d'onde produites ainsi que leur contenu harmonique
- Maîtriser leur commande.

1.2.2 Gestion de l'énergie électrique

Contenu

- gestion de l'énergie électrique : au-delà de la production, le développement des fonctions stockage et transport.
- désensibilisation aux perturbations dues au réseau EDF et aux charges industrielles.
- impact de l'insertion de la production décentralisée (ressources énergétiques) dans les réseaux électriques.

Compétences visées

Cet enseignement a pour but de former les étudiants aux méthodes de gestion et de commande permettant d'améliorer les performances des systèmes électriques dans le domaine de l'efficacité énergétique, connecté au réseau ou produite (sources d'énergies renouvelables), et la réduction des nuisances sur site industriel.

1.3 Prérequis

- Connaissances de base en électricité (puissance, régime sinusoïdal)
- Connaissances de base en automatique (modélisation et asservissement des systèmes linéaires)
- Maîtrise des outils mathématiques utilisés dans les domaines cités ci-dessus

Chapitre 2

Notions de base pour l'électrotechnique

2.1 Signaux électriques (rappels)

Les signaux électriques sont la tension, notée $u(t)$ ou $v(t)$ (unité le Volt, noté V) et le courant noté $i(t)$ ou $j(t)$ (unité l'ampère, noté A). On travaille également sur la puissance $p(t) = u(t) \times i(t)$ (unité le Watt, noté W=VA). Afin de présenter des définitions pour tout type de signal, on utilisera le signal $x(t)$ qui prendra la place de n'importe quel signal électrique.

La puissance $p(t)$ est la dérivée de l'énergie électrique $W_e(t)$ (en Joule, noté J=Ws) reçue par le dipôle :

$$p(t) = \frac{dW_e(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Propriété 1 (Conservation de l'énergie).

L'énergie absorbée par un système est égale à la somme de l'énergie qu'il a dissipée et de l'énergie qu'il a emmagasinée.

Pour un signal $x(t)$ périodique de période T , on définit la *valeur moyenne* et la *valeur efficace*.

Propriété 2 (Calcul de la valeur moyenne).

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (2.2)$$

Propriété 3 (Calcul de la valeur efficace).

$$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \quad (2.3)$$

Remarque 1 (Valeur RMS = valeur efficace).

La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne du carré du signal, ce qui se dit en anglais root mean square et donne les initiales RMS couramment utilisées.

Propriété 4 (Valeur efficace nulle).

Un signal qui a une valeur efficace nulle est nul à tout instant.

Définition 1 (Régime continu).

Le régime continu est caractérisé par des valeurs moyennes non nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs moyennes des signaux que l'on s'intéresse.

Définition 2 (Régime alternatif).

Le régime alternatif est caractérisé par des valeurs moyennes nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs efficaces que l'on s'intéresse.

Définition 3 (Puissance moyenne).

On appelle puissance moyenne ou puissance active la valeur moyenne de la puissance :

$$P = \langle p(t) \rangle \quad (2.4)$$

Définition 4 (Puissance apparente).

La puissance apparente S (unité VA) est définie comme le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant :

$$S = U_{eff} I_{eff} \quad (2.5)$$

La puissance apparente est supérieure ou égale à la puissance moyenne. Le facteur de puissance F_p caractérise le rapport entre ces deux grandeurs :

$$F_p = P/S \quad (2.6)$$

Avec les conventions adéquates, F_p est positif et on a $0 \leq F_p \leq 1$. Un facteur de puissance proche de 1 (0,9 par exemple) correspond à une bonne utilisation de l'électricité alors qu'un facteur de puissance nul ou très faible correspond à de la tension et du courant avec pas ou peu d'échange d'énergie.

Exercice 1 (Valeur moyenne et efficace d'un créneau).

On considère le signal $x(t)$ périodique de période T égal à E sur $[0; \alpha T[$ et à $-E$ sur $[\alpha T; T[$ avec $0 < \alpha < 1$. Déterminez la valeur moyenne et la valeur efficace de ce signal.

Exercice 2 (Valeur moyenne d'une sinusoïde redressée).

On considère le signal $x(t)$ périodique de période $T/2$ égal à $X \cos(\omega t)$ sur $[-T/4; T/4]$ où $\omega T = 2\pi$. Déterminez sa valeur moyenne.

Exercice 3 (Valeur efficace d'une sinusoïde).

Déterminez la valeur efficace de $x(t) = X \cos(\omega t)$.

Exercice 4 (Puissance en sinusoïdal).

Un dipôle a à ses bornes la tension $u(t) = U \cos(\omega t)$ et est parcouru par le courant $i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$. Déterminez sa puissance moyenne.

Signal harmonique

En régime alternatif non-sinusoïdal, un signal de période T est décomposable selon sa série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (2.7)$$

où les coefficients de sa série de Fourier s'expriment de la manière suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (2.8)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 1 \quad (2.9)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \geq 1 \quad (2.10)$$

Le théorème de Parseval exprime que l'énergie du signal est la somme des énergies de ses différents harmoniques, soit :

$$X_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (2.11)$$

Le *taux de distorsion* ou *taux d'harmoniques* se définit comme le rapport entre la valeur efficace des harmoniques et la valeur efficace du signal :

$$T_H = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2}}{X_{\text{eff}}} \quad (2.12)$$

On définit le *rapport de crête* le rapport entre la valeur maximale et la valeur efficace.

On définit le *facteur de forme* le rapport entre la valeur efficace et la valeur moyenne.

2.2 Dipôles et générateurs (rappels)

2.2.1 Conventions

En convention récepteur, la puissance calculée est la puissance fournie par le circuit et absorbée par le dipôle. Elle est globalement positive pour une charge et négative pour un générateur. En convention générateur, la puissance calculée est la puissance fournie par le dipôle au circuit. Elle est globalement positive pour un générateur et négative pour une charge. Les conventions peuvent être choisies arbitrairement. Les lois de comportement des dipôles changent de signe suivant la convention choisie ; il est donc préférable de choisir la convention appropriée (récepteur pour une charge et générateur pour une source).

2.2.2 Résistance

Certains dipôles électriques ont la propriété d'avoir un signal de courant proportionnel au signal de tension à tout instant. On appelle *résistance* (noté R , d'unité l'Ohm $\Omega = \text{V/A}$) le coefficient de proportionnalité tel que $u(t) = Ri(t)$ pour tout t . Notons qu'il s'agit d'une propriété mathématique qui, pour un système physique, ne correspondra qu'à une approximation de la réalité, valable dans un certain domaine. Les dipôles couramment modélisés par une résistance sont les rhéostats (chauffage) et les lampes (du moins les ampoules à filament). En convention récepteur, la résistance est positive.

De manière évidente, on montre que la loi de proportionnalité reste valable pour les valeurs moyennes et efficaces ($\langle u \rangle = R \langle i \rangle$ et $U_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}$, cf. exercice 5).

La puissance s'écrit $p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t)$. La puissance moyenne s'écrit $P = R \langle i^2(t) \rangle = RI_{\text{eff}}^2$ ou $P = \frac{1}{R} \langle u^2(t) \rangle = \frac{1}{R}U_{\text{eff}}^2$. On comprend maintenant la notion de "valeur efficace" : il s'agit de la valeur du courant (ou de la tension) qui, s'il traversait une résistance, produirait le même échauffement.

Un câble cylindrique de section uniforme S (en m^2) et de longueur l (en m), composé d'un matériau de conductivité σ (en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) a comme résistance :

$$R = \frac{l}{\sigma S}. \quad (2.13)$$

On utilise également la résistivité $\rho = 1/\sigma$ (en Ωm). Les matériaux les plus conducteurs sont le cuivre et l'aluminium ; leur conductivité est de l'ordre de $10^8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

Exercice 5. Montrez que $\langle u \rangle = R \langle i \rangle$ et que $U_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}$ pour des signaux périodiques quelconques.

2.2.3 Inductance

Certains dipôles électriques ont la propriété d'avoir une tension proportionnelle à la dérivée du courant. On appelle inductance (notée L , d'unité le Henry, $\text{H} = \text{Vs/A}$) ce coefficient de proportionnalité

tel que $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Les bobinages électriques sont modélisés en première approximation par une telle inductance¹. En convention récepteur, l'inductance est positive.

La puissance instantanée s'écrit $p(t) = u(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$. La quantité d'énergie transférée entre les instants t_0 et t est :

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t L \frac{di(\tau)}{dt} i(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

$$= \left[\frac{1}{2} L i^2(\tau) \right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(t_0) \quad (2.16)$$

En considérant qu'à t_0 le courant est nul ($i(t_0) = 0$) et que cela correspond à un niveau d'énergie nul, on observe que l'énergie transmise est $W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$. Cette énergie n'est pas dissipée comme c'était le cas pour la résistance ; elle est stockée et peut être libérée par une diminution de $i(t)$. Remarquons que le courant dans une inductance ne peut être discontinu (cela correspondrait à une tension infinie) ; placé dans un circuit, une inductance a donc tendance à lisser le courant la traversant. En régime continu constant, l'inductance se comporte comme un court-circuit.

2.2.4 Capacité

La capacité est l'élément dual de l'inductance : il suffit d'échanger les rôles de la tension et du courant. Ainsi, la capacité C correspond à une proportionnalité entre le courant et la dérivée de la tension : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ (unité : le Farad noté F=As/V). Les condensateurs sont des dipôles dont le modèle classique est un condensateur. Tout comme l'inductance, la capacité stocke de l'énergie : $W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$. La tension ne peut être discontinue aux bornes d'une capacité à moins d'un courant infini ; placée aux bornes d'un circuit, la capacité a donc tendance à diminuer les variations de tension à ses bornes. En convention récepteur, la capacité est positive. En régime continu constant, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

2.2.5 Sources

On distingue des sources de tension et de courant. Une source de tension a la propriété d'imposer la valeur de la tension à ses bornes quelque soit le courant qui la parcourt ; une telle source ne peut être mise en court-circuit sous risque de destruction. Une source de courant a la propriété d'imposer la valeur du courant la traversant, du moins tant que son circuit n'est pas ouvert. Les sources peuvent être continues (constante ou non), alternatives (sinusoïdales ou non).

Exercice 6.

Un condensateur de capacité C est traversé par un courant périodique de période T et de rapport cyclique $\alpha = 0,75$ égal à I sur $[0; \alpha T]$ et égal à $-I$ sur $[\alpha T; T]$. Le condensateur a une tension nulle à $t = 0$. Déterminez l'allure de la tension aux bornes du condensateur. Valeurs numériques : $I = 10$ A, $C = 1$ mF et $T = 10$ μ s.

2.3 Puissance en régime alternatif (rappels)

2.3.1 Réseau monophasé

Dans le cas d'un réseau monophasé dont les grandeurs électriques sont :

$$u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.17)$$

$$i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha - \phi) \quad (2.18)$$

1. Ce modèle n'est pas valable en basse fréquence et en régime continu où l'effet de la résistance du circuit est prépondérant.

où ϕ est le déphasage arrière du courant par rapport à la tension, la puissance moyenne ou *puissance active*, notée en Watt (W) est :

$$P = UI \cos(\phi) \quad (2.19)$$

La puissance apparente est le produit des valeurs efficaces, soit :

$$S = UI \quad (2.20)$$

On définit aussi la *puissance réactive* qui n'est pas une puissance au sens physique, notée en var :

$$Q = UI \sin(\phi) \quad (2.21)$$

Cette puissance réactive est liée aux échanges de puissance à valeur moyenne nulle dans les éléments réactifs (inductances et condensateurs).

On a aussi :

$$F_p = \cos(\phi) \quad (2.22)$$

Notations complexes

Pour une tension aux bornes d'un dipôle $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$, on note $\underline{U} = U \exp(j\alpha)$ son nombre complexe appelé aussi grandeur de Fresnel. Pour un courant $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta)$ traversant ce dipôle, cela donne $\underline{I} = I \exp(j\beta)$. La puissance complexe est définie comme :

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* \quad (2.23)$$

où \underline{I}^* est le conjugué de \underline{I} . On montre facilement que :

$$S = |\underline{S}| \quad (2.24)$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) \quad (2.25)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) \quad (2.26)$$

$$F_p = \arg(\underline{S}) \quad (2.27)$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad (2.28)$$

Les notations complexes ont l'intérêt de remplacer les équations différentielles par des *lois d'Ohm généralisées*. Pour une résistance, on a $\underline{U} = R\underline{I}$, pour une inductance, on a $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$. Pour un condensateur, on a $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$. Les impédances sont généralement notées \underline{Z} ($\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$) et les admittances \underline{Y} ($\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$).

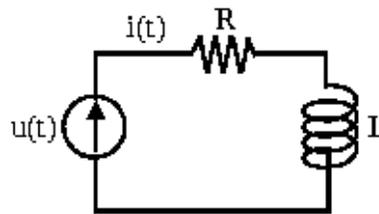


FIGURE 2.1 – Circuit RL alimenté en tension

Exercice 7 (Charge RL).

Soit le schéma de la figure 2.1 où une source de tension $u(t)$ alimente un circuit RL série.

1. Dans le cas du régime permanent sinusoïdal (50 ou 60 Hz), écrivez la relation liant les vecteurs de Fresnel \underline{U} et \underline{I} représentant respectivement la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$.

2. Déterminez le déphasage tension/courant, le facteur de puissance et la puissance active en fonction de U (valeur efficace de la tension), R et L .
3. Ecrivez l'équation différentielle liant $i(t)$ et $u(t)$.
4. Donnez un modèle de simulation du système d'entrée $u(t)$ et de sortie $i(t)$ sous la forme d'un schéma-bloc intégrant des blocs gain, intégrateur et sommateur.
5. Donnez les matrices A , B , C et D de la représentation d'état matricielle ci-dessous où u est le signal d'entrée, y est le signal de sortie et x l'état.
6. Déterminez la capacité C du condensateur à placer en parallèle sur la source de tension $u(t)$ permettant d'amener le facteur de puissance de la source à 1.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases} \quad (2.29)$$

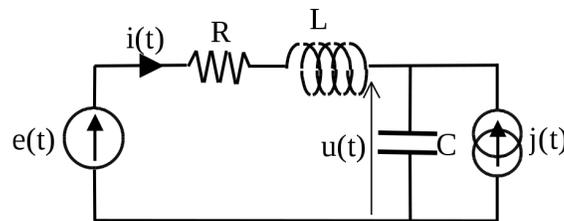


FIGURE 2.2 – Filtre LC alimenté en tension et en courant

Exercice 8 (Filtre LC).

On considère un filtre LC dont le schéma est donné sur la figure 2.2.

1. Ecrivez l'équation différentielle liant $e(t)$, $u(t)$ et $i(t)$.
2. Ecrivez l'équation différentielle liant $i(t)$, $j(t)$ et $u(t)$.
3. Donnez un modèle de simulation sous forme de schéma-bloc contenant uniquement les types de blocs suivants : intégrateur, gain, sommateur, soustracteur.
4. Ecrivez le modèle d'état du système d'entrées $e(t)$ et $j(t)$ et de sortie $u(t)$. Quelles sont les variables d'état.

2.3.2 Harmoniques de courant

Considérons ici le cas où la tension est sinusoïdale et où des harmoniques sont présentes sur le courant. En prenant la tension comme référence des phases, on a :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (2.30)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \cos(k\omega t - \phi_k) \quad (2.31)$$

La puissance instantanée s'écrit alors :

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (2.32)$$

$$= U \sum_{k=1}^{\infty} I_k (\cos((k+1)\omega t - \phi_k) + \cos((k-1)\omega t - \phi_k)) \quad (2.33)$$

Il s'agit d'une somme de sinusoides aux fréquences $0, \omega, 2\omega\dots$. La valeur moyenne est la somme des valeurs moyennes des différents termes ; chaque sinusoides ayant une valeur moyenne nulle à moins que sa pulsation soit nulle, il ressort qu'un seul terme est non nul et on a donc :

$$P = UI_1 \cos(\phi_1). \quad (2.34)$$

C'est-à-dire que seul le fondamental du courant transporte de la puissance active ; le déphasage intervenant dans le terme $\cos(\phi_1)$ est le déphasage du fondamental.

On définit alors la puissance réactive :

$$Q = UI_1 \sin(\phi_1). \quad (2.35)$$

En présence d'harmoniques, la relation $S^2 = P^2 + Q^2$ n'est plus valable et s'écrit désormais

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (2.36)$$

avec

$$D^2 = U^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 \quad (2.37)$$

On observe bien dans cette dernière expression que D est lié à la présence d'harmoniques. On l'appelle *puissance déformante*.

Le facteur de puissance est :

$$F_p = \frac{I_1}{I} \cos \phi_1 \quad (2.38)$$

Le facteur de puissance est le produit de deux facteurs : un facteur lié au déphasage ($\cos(\phi_1)$) et un facteur lié aux harmoniques ($\frac{I_1}{I}$).

Exercice 9.

Démontrez la relation suivante :

$$T_{HI} = \frac{D}{S} \quad (2.39)$$

2.3.3 Régime triphasé

Régime sinusoïdal équilibré

Le régime triphasé équilibré est caractérisé par une valeur efficace identique sur les trois phases et un déphasage de $2\pi/3$ entre chacune des phases. Par exemple, en prenant la tension $v_a(t)$ comme référence des phases, on a pour les tensions simples (entre phase et neutre) :

$$v_a(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (2.40)$$

$$v_b(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad (2.41)$$

$$v_c(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \quad (2.42)$$

et pour les courants :

$$i_a(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.43)$$

$$i_b(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \quad (2.44)$$

$$i_c(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}) \quad (2.45)$$

On peut déterminer les tensions entre phases, par exemple :

$$u_{ab}(t) = v_a(t) - v_b(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) \quad (2.46)$$

où la valeur efficace des tensions composées est :

$$U = \sqrt{3}V \quad (2.47)$$

La puissance instantanée est constante identique à la puissance active :

$$P = p(t) = \sqrt{3}UI \cos(\phi) \quad (2.48)$$

On a aussi :

$$Q = \sqrt{3}UI \sin(\phi) \quad (2.49)$$

$$S = \sqrt{3}UI \quad (2.50)$$

$$F_p = \cos(\phi) \quad (2.51)$$

Régime harmonique

En présence d'harmoniques de courant, les formules sont :

$$P = \sqrt{3}UI_1 \cos(\phi_1) \quad (2.52)$$

$$Q = \sqrt{3}UI_1 \sin(\phi_1) \quad (2.53)$$

$$S = \sqrt{3}UI \quad (2.54)$$

$$F_p = \frac{I_1}{I} \cos(\phi_1) \quad (2.55)$$

$$D = \sqrt{3}U \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2} \quad (2.56)$$

Exercice 10 (Charge triphasée).

Sur une charge triphasée équilibrée alimentée par une source de tension triphasée sinusoïdale équilibrée, on fait les mesures suivantes :

- Valeur efficace de la tension entre 2 phases : $U = 400 \text{ V}$,
- Valeur efficace du courant d'une phase : $I = 10 \text{ A}$,
- Puissance totale transmise à la charge : $P = 4 \text{ kW}$,
- Taux d'harmonique du courant : $T_h = 0,30$.
- La fréquence du réseau d'alimentation est de 50 Hz .

1. Déterminez la valeur efficace du fondamental du courant et son déphasage par rapport à la tension simple homologue (correspondant à la même phase).

Exercice 11 (Caractérisation de la puissance absorbée par un pont à diodes).

On considère un redresseur triphasé dont la charge absorbe un courant constant. Les formes d'onde du courant et de la tension en amont pour la phase a sont données sur la figure 2.3.

1. Justifiez qu'il s'agit de signaux alternatifs.
2. Calculez les valeurs efficaces de la tension et du courant.
3. Calculez la puissance apparente.
4. Calculez le taux d'harmoniques du courant.
5. Représentez la puissance instantanée.
6. Calculez la puissance active.
7. Calculez le facteur de puissance.

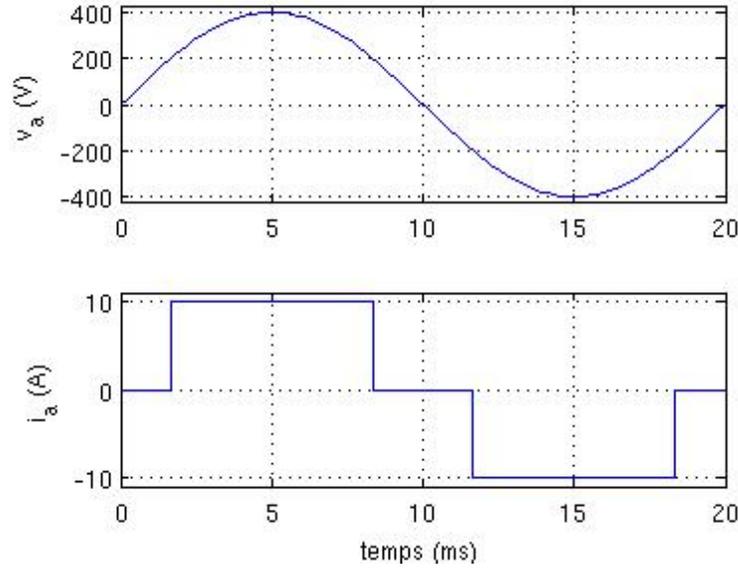


FIGURE 2.3 – Tension et courant absorbés par un pont à diode PD6

2.4 Régime déséquilibré

2.4.1 Les trois types de régime équilibré

Nous avons déjà défini le régime sinusoïdal triphasé équilibré *direct* :

$$x_{da}(t) = X_d \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_d) \quad (2.57)$$

$$x_{db}(t) = X_d \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_d - \frac{2\pi}{3}) \quad (2.58)$$

$$x_{dc}(t) = X_d \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_d - \frac{4\pi}{3}) \quad (2.59)$$

dans lequel la phase *a* est en avance sur la phase *b*, elle-même en avance sur la phase *c*. On définit également le régime sinusoïdal triphasé équilibré *inverse* :

$$x_{ia}(t) = X_i \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i) \quad (2.60)$$

$$x_{ib}(t) = X_i \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i + \frac{2\pi}{3}) \quad (2.61)$$

$$x_{ic}(t) = X_i \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i + \frac{4\pi}{3}) \quad (2.62)$$

dans lequel la phase *a* est en retard sur la phase *b*, elle-même en retard sur la phase *c*. On définit également le régime sinusoïdal triphasé équilibré *homopolaire* :

$$x_{ha}(t) = X_h \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_h) \quad (2.63)$$

$$x_{hb}(t) = X_h \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_h) \quad (2.64)$$

$$x_{hc}(t) = X_h \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_h) \quad (2.65)$$

dans lequel les trois grandeurs sont en phase.

En notation complexe, cela donne pour le système direct :

$$\underline{X}_{da} = X_d \exp(j\alpha_d) \quad (2.66)$$

$$\underline{X}_{db} = X_d \exp(j(\alpha_d - \frac{2\pi}{3})) \quad (2.67)$$

$$\underline{X}_{dc} = X_d \exp(j(\alpha_d + \frac{2\pi}{3})) \quad (2.68)$$

soit, en notant $a = \exp(j\frac{2\pi}{3})$ et en notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_{da} \\ \underline{X}_{db} \\ \underline{X}_{dc} \end{bmatrix} = \underline{X}_{da} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Pour le système inverse :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_{ia} \\ \underline{X}_{ib} \\ \underline{X}_{ic} \end{bmatrix} = \underline{X}_{ia} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

et pour le système homopolaire :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_{ha} \\ \underline{X}_{hb} \\ \underline{X}_{hc} \end{bmatrix} = \underline{X}_{ha} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.4.2 Décomposition d'un système triphasé déséquilibré

Considérons maintenant un systèmes triphasé déséquilibré quelconque :

$$\begin{aligned} x_a(t) &= X_a \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a) \\ x_b(t) &= X_b \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_b) \\ x_c(t) &= X_c \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_c) \end{aligned} \quad (2.72)$$

En notation complexe, il s'écrit :

$$\underline{X}_a = X_a \exp(j\alpha_a) \quad (2.73)$$

$$\underline{X}_b = X_b \exp(j\alpha_b) \quad (2.74)$$

$$\underline{X}_c = X_c \exp(j\alpha_c) \quad (2.75)$$

On peut écrire ce système comme la somme d'un système direct \underline{X}_{da} , d'un système indirect \underline{X}_{ia} et d'un système homopolaire \underline{X}_h :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_a \\ \underline{X}_b \\ \underline{X}_c \end{bmatrix} = \underline{X}_{da} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} + \underline{X}_{ia} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} + \underline{X}_h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_a \\ \underline{X}_b \\ \underline{X}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_{da} \\ \underline{X}_{ia} \\ \underline{X}_h \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Les composantes directe, indirect et homopolaire s'obtiennent par inversion de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_{da} \\ \underline{X}_{ia} \\ \underline{X}_h \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_a \\ \underline{X}_b \\ \underline{X}_c \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

2.4.3 Étude

Impédances d'une charge équilibrés

Une charge triphasée équilibrée peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{V}_a = \underline{Z}_p \underline{I}_a + \underline{Z}_m \underline{I}_b + \underline{Z}_m \underline{I}_c \quad (2.79)$$

$$\underline{V}_b = \underline{Z}_m \underline{I}_a + \underline{Z}_p \underline{I}_b + \underline{Z}_m \underline{I}_c \quad (2.80)$$

$$\underline{V}_c = \underline{Z}_m \underline{I}_a + \underline{Z}_m \underline{I}_b + \underline{Z}_p \underline{I}_c \quad (2.81)$$

où \underline{Z}_p est l'impédance propre et \underline{Z}_m est l'impédance mutuelle. En remplaçant les tensions et les courants par leur décomposition en composantes directes, indirectes et homopolaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{V}_d &= \underline{Z}_d \underline{I}_d \\ \underline{V}_i &= \underline{Z}_i \underline{I}_i \\ \underline{V}_h &= \underline{Z}_h \underline{I}_h \end{aligned} \quad (2.82)$$

avec $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \underline{Z}_p - \underline{Z}_m$ et $\underline{Z}_h = \underline{Z}_p + 2\underline{Z}_m$. Connaissant les composantes \underline{V}_{da} , \underline{V}_{ia} et \underline{V}_h du réseau, on détermine les composantes \underline{I}_{da} , \underline{I}_{ia} et \underline{I}_h en résolvant les trois équations 2.82.

Méthode d'étude des défauts

On modélise d'abord le réseau, du point de vue de l'endroit où a lieu le défaut. Pour chaque composante symétrique d , i et h , on utilise un modèle de Thévenin composé d'une source de tension égale à la tension avant défaut (\underline{E}_d , \underline{E}_i et \underline{E}_h) en série avec l'impédance équivalente du réseau (\underline{Z}_d , \underline{Z}_i et \underline{Z}_h). Remarquons que pour un réseau équilibré, on a $\underline{E}_i = 0$ et $\underline{E}_h = 0$. En présence de défaut, les composantes symétriques des tensions du réseau s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \underline{V}_d &= \underline{E}_d - \underline{Z}_d \underline{I}_d \\ \underline{V}_i &= \underline{E}_i - \underline{Z}_i \underline{I}_i \\ \underline{V}_h &= \underline{E}_h - \underline{Z}_h \underline{I}_h \end{aligned} \quad (2.83)$$

On caractérise ensuite le défaut. Par exemple, un court-circuit sur la phase a entraîne $\underline{V}_a = 0$, ce qui entraîne :

$$\underline{V}_a = \underline{V}_d + \underline{V}_i + \underline{V}_h = 0 \quad (2.84)$$

Si les autres phases sont ouvertes, on a :

$$\underline{I}_b = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h = 0 \quad (2.85)$$

$$\underline{I}_c = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h = 0 \quad (2.86)$$

Pour un court-circuit entre les phases a et b , on aurait $\underline{V}_a = \underline{V}_b$, soit :

$$(1 - a^2) \underline{V}_d + (1 - a) \underline{V}_i = 0 \quad (2.87)$$

Sur les courants, on aurait $\underline{I}_a + \underline{I}_b = 0$ et $\underline{I}_c = 0$, soit :

$$(1 + a^2) \underline{I}_d + (1 + a) \underline{I}_i = 0 \quad (2.88)$$

$$\underline{I}_c = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h = 0 \quad (2.89)$$

On résout ensuite les six équations afin de déterminer les grandeurs symétriques. Il suffit ensuite de revenir aux grandeurs triphasées à l'aide de la transformation inverse.

Exercice 12 (Court-circuit entre deux phases).

Une ligne triphasée est alimentée par un transformateur fournissant un réseau symétrique direct de tensions sinusoïdales à la fréquence de 50 Hz. La tension simple entre phase et neutre est de 230 V à vide. Les impédances directe, inverse et homopolaire de l'ensemble ligne et transformateur ont pour valeur $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = 4j$ et $\underline{Z}_h = 10j$. Ce dispositif alimente un récepteur triphasé équilibré ayant les caractéristiques suivantes : impédance propre $\underline{Z}_p = 10 + 6j$ (en Ω) et impédance mutuelle $\underline{Z}_m = 2j$ (en Ω).

1. Donnez les composantes symétriques des tensions du réseau d'alimentation.
2. Déterminez les impédances symétriques de la charge.
3. Déterminez les composantes symétriques des courants et des tensions du réseau en présence de la charge.
4. Déterminez les tensions et courants de ligne du réseau.

La charge n'est plus connectée. Un court-circuit apparaît entre les phases a et b du réseau.

5. Déterminez les équations liant les composantes symétriques.
6. Déterminez les composantes symétriques des courants et tensions de ligne.
7. Déterminez les tensions et courants de ligne.

Éléments de correction

1. A vide, le réseau fournit $\underline{E}_d = 230$ V (pris comme référence des phases par la suite), $\underline{E}_i = 0$ V et $\underline{E}_h = 0$ V.
2. On a pour la charge $\underline{Z}_{cd} = \underline{Z}_{ci} = \underline{Z}_p - \underline{Z}_m = 10 + 4j$ et $\underline{Z}_{ch} = \underline{Z}_p + 2\underline{Z}_m = 10 + 10j$.
3. Pour la composante directe, on a $\underline{E}_d = (\underline{Z}_c + \underline{Z}_{cd})\underline{I}_d$, soit $\underline{I}_d = 14,0 - 11,2j$ (en A). Les autres composantes sont nulles. Pour les tensions, on a : $\underline{V}_d = \underline{Z}_{cd}\underline{I}_d = 185 - 56j$ V, $\underline{V}_i = \underline{V}_h = 0$ V.
4. On obtient en Ampère : $\underline{I}_a = 14,0 - 11,2i$, $\underline{I}_b = -16,7 - 6,5i$ et $\underline{I}_c = 2,7 + 17,8i$.
5. Les équations d'un court-circuit entre les phases a et b s'écrivent :

$$\underline{V}_a - \underline{V}_b = (1 - a^2)\underline{V}_d + (1 - a)\underline{V}_i = 0 \quad (2.90)$$

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b = (1 + a^2)\underline{I}_d + (1 + a)\underline{I}_i + 2\underline{I}_h = 0 \quad (2.91)$$

$$\underline{I}_c = a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i + \underline{I}_h = 0 \quad (2.92)$$

6. En remplaçant les tensions dans l'équation 2.90, on obtient :

$$(1 - a^2)\underline{Z}_d\underline{I}_d + (1 - a)\underline{Z}_i\underline{I}_i = (1 - a^2)\underline{E}_d \quad (2.93)$$

Avec les équations 2.91 et 2.92, on obtient un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{bmatrix} 1 + a^2 & 1 + a & 2 \\ a & a^2 & 1 \\ (1 - a^2)\underline{Z}_d & (1 - a)\underline{Z}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \\ \underline{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - a^2)\underline{E}_d \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

qui se résout en multipliant à gauche par l'inverse de la matrice, ce qui donne $\underline{I}_d = -28,8j$, $\underline{I}_i = 24,9 - 14,4j$ et $\underline{I}_h = 0$ en Ampère. On en déduit les composantes symétriques des tensions de ligne : $\underline{V}_d = 115$ V, $\underline{V}_i = -57,5 - 99,6j$ et $\underline{V}_h = 0$.

7. Les courants sont : $\underline{I}_a = 24,9 - 43,1j$, $\underline{I}_b = -24,9 + 43,1j$ et $\underline{I}_c = 0$. Les tensions sont : $\underline{V}_a = \underline{V}_b = 57,5 - 99,6j$ et $\underline{V}_c = -115 + 199j$ en Volt.

2.5 Magnétostatique : Production de couple et de force

2.5.1 Principe

Soit un système électromécanique comportant un degré de liberté en rotation et comportant un circuit électrique. Le circuit électrique est soumis à la tension $u(t)$ et est traversé par le courant $i(t)$ en convention récepteur. On note ϕ le flux total le traversant. La partie en rotation est à la position angulaire θ et applique un couple C à une charge mécanique. Le système reçoit de la puissance électrique, fournit de la puissance mécanique et peut stocker de l'énergie magnétique W_m . Le bilan de d'énergie pendant un intervalle de durée dt donne :

$$dW_m = u i dt - C \Omega dt \quad (2.95)$$

où $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Avec $u = \frac{d\phi}{dt}$, on obtient :

$$dW_m = i d\phi - C d\theta \quad (2.96)$$

Supposons que l'énergie magnétique puisse s'exprimer comme une fonction de ϕ et θ : $W_m(\phi, \theta)$; cela revient à prendre ϕ et θ comme variables d'état et à poser que W_m est une fonction d'état. La dernière équation implique alors :

$$\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \phi} = i \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta} = -C \quad (2.98)$$

La première de ces deux équations signifie que l'énergie magnétique est l'intégrale de $i d\phi$ à θ constant. La seconde montre qu'un couple est produit par le système, correspondant à une variation à flux constant de l'énergie magnétique :

$$C = -\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta} \quad (2.99)$$

2.5.2 Régime linéaire

Dans le cas du régime linéaire (absence de saturation magnétique), le flux est proportionnel au courant et on peut donc écrire $\phi = L(\theta)i$ où l'inductance L dépend ici de la position du rotor. L'énergie magnétique s'écrit $W_m = \frac{1}{2}L(\theta)i^2 = \frac{\phi^2}{2L(\theta)}$. Pour calculer le couple, c'est la seconde expression qu'il faut considérer, c'est-à-dire $W_m(\phi, \theta) = \frac{\phi^2}{2L(\theta)}$. On obtient alors :

$$C = \frac{\phi^2}{2L^2(\theta)} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (2.100)$$

2.5.3 Fonctionnement d'un moteur élémentaire

Soit un système électro-magnéto-mécanique à un degré de liberté en rotation de position θ et de vitesse $\Omega = \dot{\theta}$, comprenant un circuit magnétique alimenté par un courant i et dont le flux est ϕ . On considérera que le circuit magnétique est parfait (non saturé), permettant de le caractériser par son inductance qui est fonction de la position $L = L(\theta)$.

Un exemple de réalisation de ce moteur élémentaire est donné sur la figure 2.4. Pour des raisons de symétrie, on peut considérer que $L(\theta)$ est une fonction périodique de période π . On considère que la position $\theta = 0$ correspond à un maximum de $L(\theta)$. Également par symétrie, on considère que $L(\theta)$ est une fonction paire et qu'elle respecte la symétrie de glissement (symétrie de la courbe par rapport au point $(\theta = \pi/2, 0)$).

Une allure possible de l'évolution de l'inductance en fonction de la position est donnée sur la première courbe de la figure 2.5. On en déduit l'allure de la dérivée de l'inductance par rapport à

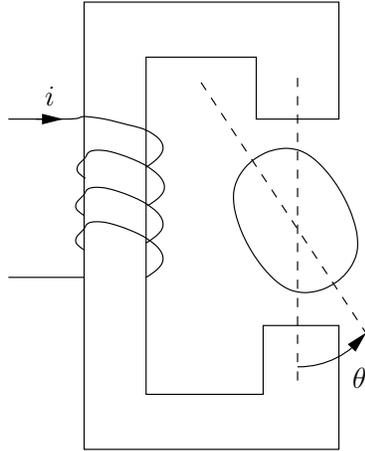


FIGURE 2.4 – Moteur à réluctance variable à un seul enroulement

la position, donnée sur la seconde courbe. Si on alimentait la machine avec un courant i constant, il apparaîtrait que le couple fournit, dans l'hypothèse d'une rotation à vitesse constante, serait alternatif, ce qui ne permet pas de conversion d'énergie de manière continue. De plus, comme le couple dépend du carré du courant, un changement de signe du courant n'a pas d'effet.

Une solution consiste à ne fournir du courant que lorsque $\frac{dL}{d\theta}$ est positif (troisième courbe). On obtient alors un couple qui varie entre zéro et une valeur maximale. Dans le cas d'une rotation continue, entraîné par l'inertie, le couple présente alors une valeur moyenne positive, permettant ainsi d'assurer une conversion d'énergie durable. Pour appliquer un couple négatif, il suffit de faire passer du courant lorsque $\frac{dL}{d\theta}$ est négatif et de le couper lorsqu'il est positif. On note que dans cette technique de commande, l'allure du courant dépend de la position du rotor. On parle d'*autopilotage* pour qualifier ces techniques où la position du moteur pilote elle-même son alimentation en courant. En pratique, la commutation des courant est faire par une électronique de puissance.

2.5.4 Système polyphasé

Soit un système à n phases ; notons i_k le courant et ϕ_k le flux relatifs à la phase k . Utilisons les notations vectorielles $\mathbf{i} = [i_1 \dots i_n]^T$ et $\phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$. L'énergie associée à l'interaction entre le courant de la bobine j et le flux traversant la bobine i s'écrit $W_{mij} = \frac{1}{2} \phi_i i_j$. L'énergie magnétique s'écrit désormais comme la somme des différentes contributions, soit :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i i_j = \frac{1}{2} \phi^T \mathbf{i}. \quad (2.101)$$

En régime linéaire, le flux ϕ_k s'écrit comme une somme de termes linéaires :

$$\phi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj}(\theta) i_j. \quad (2.102)$$

Ce qui s'écrit aussi $\phi = \mathcal{L}(\theta) \mathbf{i}$ avec :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & \dots & L_{1n}(\theta) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1}(\theta) & \dots & L_{nn}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

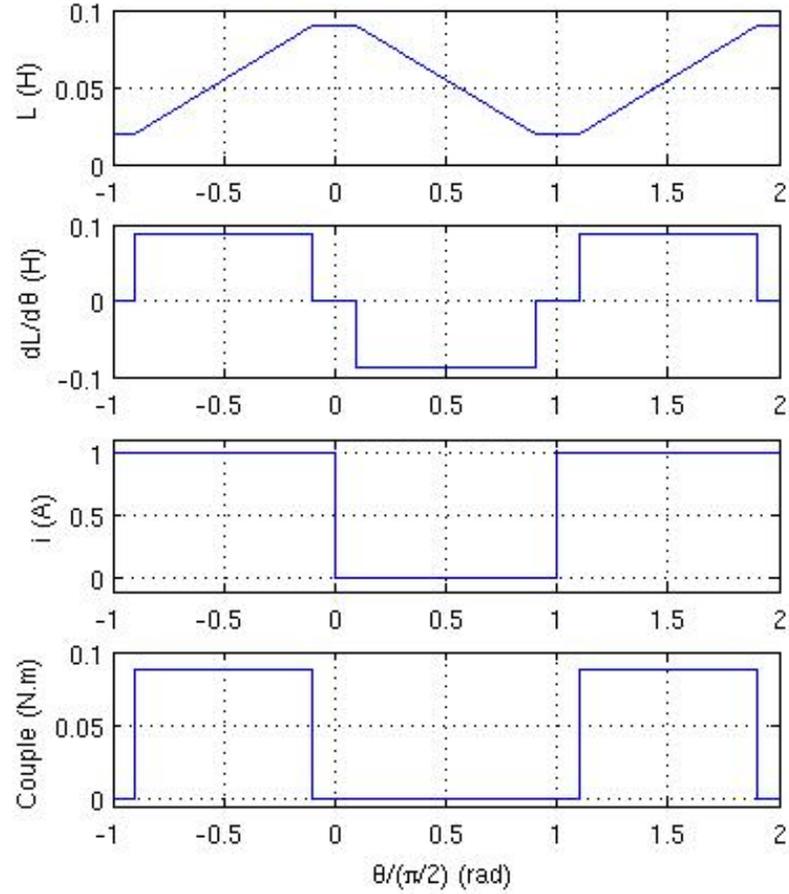


FIGURE 2.5 – Fonctionnement d'un moteur élémentaire à réluctance variable à un seul enroulement

On peut alors écrire l'énergie magnétique sous la forme $W_m(\phi, \theta) = \frac{1}{2}\phi^T \mathcal{L}^{-1}(\theta)\phi$ et le couple s'écrit : $C = \frac{1}{2}\phi^T \frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta}\phi$. En utilisant la relation² $\frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = -\mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta)$, on obtient :

$$C = \frac{1}{2}\phi^T \mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta) \phi. \quad (2.104)$$

La matrice \mathcal{L} des inductance est symétrique³, donc son inverse l'est aussi et on peut écrire :

$$C = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}. \quad (2.105)$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$C = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{\partial \phi(\theta, \mathbf{i})}{\partial \theta}. \quad (2.106)$$

2. Cette relation se montre facilement en écrivant que $\mathcal{L}(\theta) \mathcal{L}^{-1}(\theta) = \mathcal{I}$ et en dérivant. On obtient alors $\frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta) + \mathcal{L}(\theta) \frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{O}$ d'où $\frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = -\mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta)$.

3. Les matrices d'inductance sont toujours symétriques.

Chapitre 3

Les convertisseurs statiques

3.1 Introduction

Grâce aux développements des composants de puissance, l'électronique de puissance offre toute une gamme de convertisseurs permettant de mettre en forme l'énergie électrique. Par opposition aux machines électriques qui sont parfois qualifiées de *convertisseurs dynamiques*, on nomme ces structures *convertisseurs statiques*. Le convertisseur prend l'énergie en *amont* et la délivre en *aval*. Une bonne introduction et des informations intéressantes sur les technologies des composants sont données sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Electronique_de_puissance.

3.1.1 Les différents types de conversion

L'énergie électrique est utilisée sous deux grandes formes :

- le régime continu où on s'intéresse principalement à la valeur moyenne des signaux de tension et de courant ;
- le régime alternatif où les valeurs moyennes sont nulles et où on s'intéresse aux valeurs efficaces.

On en déduit quatre grands types de conversion :

- le redresseur (*rectifier*) transforme de l'énergie alternative en énergie sous forme continue ;
- l'onduleur (*inverter*) transforme de l'énergie continue en énergie alternative
- le hacheur (*DC/DC converter, chopper*) permet de faire varier la tension et le courant d'une énergie sous forme continue
- le gradateur (*AC/AC converter*) permet de faire varier la valeur efficace de la tension et du courant d'une énergie sous forme alternative. Il ne permet pas de faire varier la fréquence.

Plusieurs de ces structures peuvent être combinées. Ainsi, pour faire varier la vitesse des moteurs à courant alternatif, on utilise un variateur de fréquence qui est composé d'un redresseur et d'un onduleur.

3.1.2 Pourquoi l'électronique de puissance est-elle basée sur la commutation ?

Considérons la structure de conversion présentée sur la figure 3.1 où le réglage de la tension se fait grâce au réglage de la résistance R (on peut aussi utiliser un transistor en régime linéaire). On considère un régime continu où les grandeurs sont constantes. La loi des nœuds donne $i_1 = i_2$. La loi de maille donne $u_2 = u_1 - Ri_2$. On voit donc qu'il est possible de faire varier u_2 en faisant varier R , pourvu que i_2 soit non nul. Le rendement de conversion est $\eta = \frac{u_2 i_2}{u_1 i_1} = \frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{Ri_2}{u_1}$. On observe que le rendement décroît au fur et à mesure que la chute de tension Ri_2 réalisée par le convertisseur décroît. La courbe de l'évolution du rendement en fonction de la tension u_2 est donnée sur la figure 3.2. Le rendement est proche de zéro pour les faibles valeurs de u_2 .

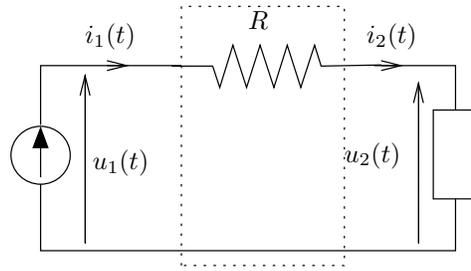


FIGURE 3.1 – Schéma de conversion en mode continu

Ce type de solution peut s'avérer utilisables pour des applications de faible puissance (moins de quelques centaines de Watt). Pour des applications à puissance élevées, ce type de solution n'est pas envisageable à cause du coût en énergie et parce que la dissipation de l'énergie dégagée dans le convertisseur est en soi un problème¹. La solution retenue consiste à utiliser des composants qui se comportent comme des interrupteur. En effet, un interrupteur parfait ne dissipe pas d'énergie². Les formes d'onde de la tension et du courant seront donc "découpées" grâce que interrupteur de manière à répondre aux besoins en terme de valeur moyenne, valeur efficace et fréquence. Notons qu'en réalité, des pertes sont présentes, dues aux pertes en conduction et pertes en commutation. Mais les rendements obtenues sont relativement bons (généralement supérieurs à 80%).

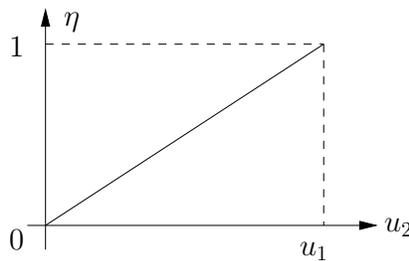


FIGURE 3.2 – Rendement d'un convertisseur en régime continu

3.1.3 Principe de modélisation

Une chaîne de conversion de l'énergie est composée de plusieurs étages. Pour modéliser toute la chaîne, il serait préférable de disposer de modèles de chaque élément de la chaîne et de les assembler les uns aux autres. Cette méthode s'avère possible à certaines conditions.

A titre d'exemple, considérons la structure présentée sur la figure 3.3, composée de deux quadripôles, d'une source de tension et d'une charge passive. Supposons d'autre part que chaque quadripôle dispose d'un modèle dont les grandeur d'entrée sont la tension amont et le courant aval et dont les grandeurs de sortie sont la tension aval et le courant amont. Puisque la chaîne de conversion est alimentée par un générateur de tension, on peut alors relier les différents blocs afin de réaliser un modèle de l'ensemble du système. On observe que la chaîne de causalité commence avec la tension d'alimentation et va de l'amont vers l'aval. En aval, la charge détermine le courant en fonction de la tension. Ensuite, la chaîne de causalité remonte vers l'amont si on considère le courant. La dernière grandeur déterminée est donc le courant amont qui dépend de tous les étages de la chaîne. On obtient

1. Plus la solution dissipe d'énergie, plus elle sera volumineuse et donc couteuse.

2. En position ouverte, l'énergie dissipée par un interrupteur est nulle car son courant est nul. En position fermée, c'est la tension à ses bornes qui est nulle, ce qui correspond également à une puissance dissipée nulle.

le schéma-bloc représenté sur la figure 3.4. On fera bien attention de distinguer les deux types de schémas : 1/ le schéma électrique où les flèches représentent les tensions et courant ; 2/ le schéma-bloc de simulation où les flèches représentent les sens de transfert de l'information. Dans ce dernier schéma, chacun des bloc est un système statique où dynamique.

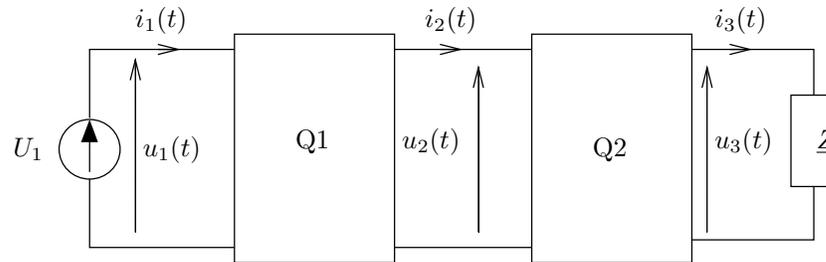


FIGURE 3.3 – Schéma électrique d'une chaîne de conversion

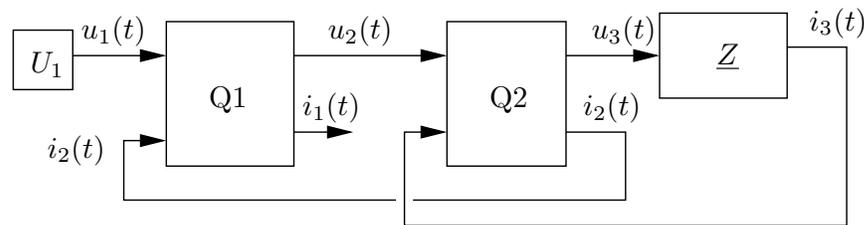


FIGURE 3.4 – Modèle informationnel sous forme de schéma-bloc d'une chaîne de conversion

3.1.4 Les éléments passifs

Afin de permettre un meilleur fonctionnement, les convertisseurs utilisent parfois des inductances et des condensateurs qui peuvent stocker de l'énergie afin de la restituer ultérieurement. L'inductance permet de lisser le courant ; le condensateur permet de lisser la tension.

Par exemple, un filtre LC est souvent placé entre un redresseur et un onduleur dans un variateur de fréquence³. Le schéma du filtre est donné sur la figure 3.5. Il contient une inductance en série avec l'amont afin de lisser le courant sous-tiré au redresseur placé en amont et un condensateur en parallèle avec l'aval afin de lisser la tension fournie à l'onduleur où au hacheur.

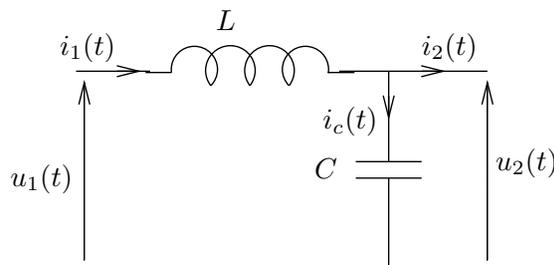


FIGURE 3.5 – Filtre LC

3. Plus souvent, une inductance est placée en tête du redresseur et seul le condensateur est placé entre le redresseur et l'onduleur.

Exercice 13 (Représentation d'état d'un filtre LC).

On considère le filtre LC de la figure 3.5. On considère comme entrées la tension amont et le courant aval. On considère comme sorties la tension aval et le courant amont.

1. Donnez les équations du système.
2. Donnez une représentation d'état du système.
3. Donnez un schéma de simulation du système ne faisant apparaître que les opérateurs suivants : gain, sommateur, soustracteur et intégrateur.

3.2 Les composants

Différents composants de puissance sont disponibles. Les composants sont utilisés comme interrupteurs. Ainsi, les différences vont intervenir :

- sur les états possibles (par exemple passant avec un courant positif)
- sur les commutations possibles (commutation commandée, commutation naturelle)

Pour chaque composant, on peut synthétiser ces propriétés par un diagramme tension courant où sont représentées les branches correspondant aux fonctionnements possibles du composant et où les commutations commandées sont indiquées par des flèches permettant le passage d'une branche à une autre. Du point de vue de la modélisation, l'état de chaque interrupteur peut être représenté par une variable binaire.

3.2.1 Diode

La diode possède un état passant caractérisé par un courant positif et une chute de tension à ses bornes v_D de l'ordre de 0,7 V. Son diagramme tension courant idéal est donné sur la figure 3.6. En première approximation, on pourra négliger cette tension devant les tensions à commuter qui sont typiquement de l'ordre de 100 V. L'état bloqué correspond à une tension v_D négative et à un courant nul. Les commutations se font de manière naturelle : la passage de bloqué à passant se fait lorsque la tension passe tend à devenir positive.

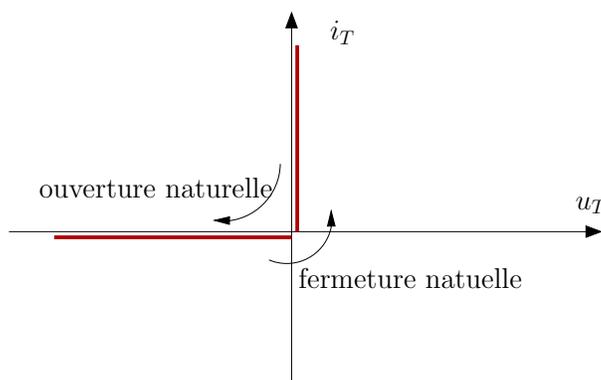


FIGURE 3.6 – Diagramme tension/courant idéal d'une diode

Le passage de passant à bloqué se fait lorsque le courant tend à devenir négatif. La charge électrique Q_R nécessaire au changement d'état de la diode donne la rapidité de la diode. Pour un courant qui décroît avec une dérivée di/dt constante, la charge de recouvrement est donnée par l'aire d'un triangle : $Q_R = \frac{1}{2}t_{\text{off}}I_R$ où t_{off} est le temps de blocage et $-I_R$ est la valeur du pic de courant négatif lors du blocage. Avec $I_R = \left| \frac{di}{dt} \right| t_{\text{off}}$, on obtient le temps de blocage $t_{\text{off}} = \sqrt{Q_R / |di/dt|}$ et le pic de courant

$$I_R = \sqrt{2Q_R |di/dt|}.$$

Les diodes sont des composants extrêmement courants dans les dispositifs de l'électronique de puissance. Les diodes Schottky (du nom du physicien allemand Walter H. Schottky) possèdent un seuil de tension très bas et permettent des commutations très rapides.

3.2.2 Thyristor

Les thyristors ressemblent aux diodes mais disposent d'une gâchette permettant de retarder la mise en conduction. Ainsi lorsque la tension devient positive, le thyristor ne se met pas directement en route contrairement à la diode. Il se met en conduction lorsque la tension est positive et qu'il reçoit un courant de gâchette. Les thyristors sont utilisés pour des puissances faibles à élevées. L'association de deux thyristor tête-bêche est appelé Triac et est utilisée dans les gradateurs.

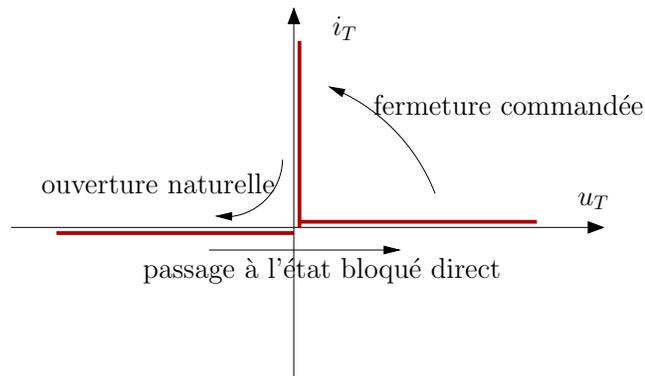


FIGURE 3.7 – Diagramme tension/courant idéal d'un thyristor

3.2.3 GTO

GTO signifie "gate turn-off" (extinction par la gâchette); il s'agit d'un thyristor équipé d'une seconde gâchette destinée à permettre le blocage. Les GTO sont utilisés pour les puissances élevées.

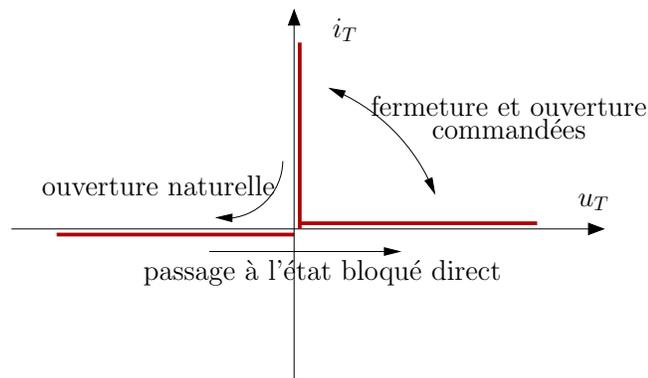


FIGURE 3.8 – Diagramme tension/courant idéal d'un thyristor GTO

3.2.4 Transistor

Comme le GTO, le transistor permet des commutation commandées à l'amorçage et au blocage, du moins en blocage direct. Toutefois, le transistor ne permet pas de bloquer de fortes tensions inverses.

En puissance, les technologies rencontrées sur les MOSFET (transistor à effet de champ à grille métal-oxyde, utilisé en faible puissance), les bipolaires (moyenne puissance) et les IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*, utilisés en moyenne et forte puissance : 600 à 6000 V et jusqu'à 2400 A).

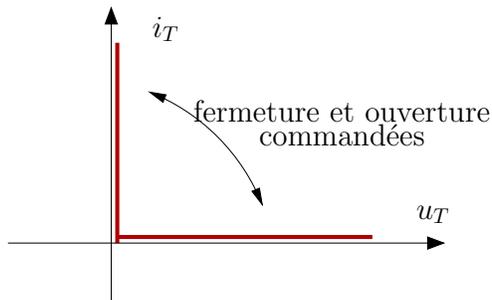


FIGURE 3.9 – Diagramme tension/courant idéal d'un transistor

3.2.5 Associations de composants

Afin de permettre d'assurer un comportement satisfaisant, le transistor est généralement associé à une diode en anti-parallèle. La tension de cette association est toujours positive où nulle.

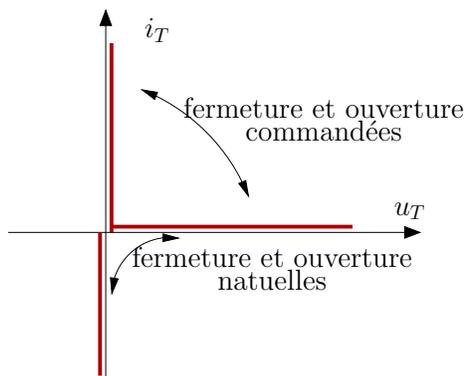


FIGURE 3.10 – Diagramme tension/courant idéal d'une association transistor/diode ou GTO/diode

3.2.6 Pertes dans les composants

On distingue deux types de pertes :

- les *pertes par conduction* qui sont proportionnelles au temps de conduction et croissent en fonction du courant,
- les *pertes par commutation* qui sont négligeables pour les commutations naturelles (la commutation naturelle se fait à courant où tension nulle) mais sont significatives lors des commutations commandées (il faut traverser le quadrant $u_T > 0$ et $i_T > 0$). Les pertes par commutation sont proportionnelles à la fréquence de commutation et à la surface du cycle (u_T, i_T) traversé lors de la commutation.

Sur les systèmes de forte puissance, des circuits d'aides à la commutation (*snubber*) sont généralement installés afin de limiter les pertes lors de la commutation.

3.3 Les convertisseurs continu/continu

3.3.1 Hacheur abaisseur

On distingue deux structure.

Hacheur un quadrant

Son schéma est donné sur la figure 3.11. Il est composé d'un composant commandé à l'ouverture et à la fermeture (transistor ou GTO) et d'une diode.

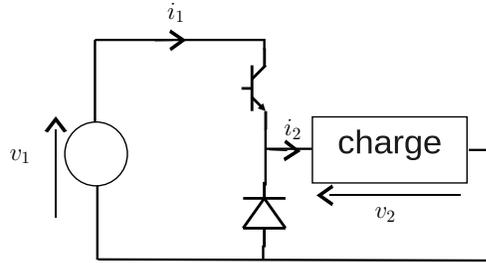


FIGURE 3.11 – Hacheur abaisseur de tension à un quadrant

Le transistor a deux états. Notons C la variable booléenne égale à 1 si le transistor est fermé et égale à 0 s'il est ouvert. Dans le cas où $C = 1$, la diode est ouverte et la source est connectée à la charge; on a donc :

$$v_2 = v_1 \quad (3.1)$$

$$i_1 = i_2 \quad (3.2)$$

Dans le cas où $C = 0$, la continuité du courant de la charge est assurée par la mise en conduction de la diode. On a alors :

$$v_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$i_1 = 0 \quad (3.4)$$

Ces deux équations se ramènent à :

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Il est très simple de simuler un hacheur avec comme entrée la tension amont, le courant aval et le signal de commutation C et comme sorties la tension aval et le courant amont.

Généralement, le signal de commutation est un signal à fréquence $f = 1/T$ fixe et à largeur d'impulsion α variable. Ainsi, sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$, on a :

$$C = 1 \text{ pour } t \in [kT, (k+\alpha)T] \quad (3.6)$$

$$C = 0 \text{ pour } t \in [(k+\alpha)T, (k+1)T] \quad (3.7)$$

On pourra noter $C = C_k$ pour préciser qu'il s'agit de la valeur sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$. En effet, le rapport-cyclique $\alpha = \alpha_k$ est amené à varier d'un intervalle à l'autre.

Dans l'hypothèse où v_1 est constant, la valeur moyenne $\langle v_2 \rangle_T$ calculée sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$ est égale $\alpha_k v_1$. On observe ainsi que la valeur moyenne de v_2 peut être variée entre 0 et v_1 . Pour

assurer $\langle v_2 \rangle_T = v_2^*$ où v_2^* est la valeur de référence de la tension, il faut appliquer $\alpha = v_2^*/v_1$.

Compte-tenu des interrupteurs utilisés, on a $i_2 \leq 0$. Ainsi, dans le plan (v_2, i_2) , le fonctionnement ne se fait que pour $v_2 \geq 0$ et $i_2 = 0$, ce qu'on appelle le premier quadrant. Si on alimente un moteur à courant continu avec ce hacheur, on ne pourra pas assurer de freinage dynamique ni de marche à vitesse négative.

Simulation du calcul d'un rapport-cyclique variable. En simulation, il est intéressant de disposer d'un bloc dont la sortie est le signal C et dont l'entrée est le rapport-cyclique α . Ce système peut être représenté par un modèle d'état à temps discret à deux états x_1 et x_2 . Dans le premier état, on stocke la valeur du signal C à sortir. Dans le second état, on stocke la valeur du rapport-cyclique acquise à $t_k = kT$. Ce système doit être mis à jour aux instants $\alpha_0 T, T, T + \alpha_1 T, 2T \dots$. En notant \tilde{T}_j ces instants ($T_{2k} = kT$ et $T_{2k+1} = kT + \alpha_k T$), les équations d'état sont décrites dans l'algorithme 1. où le signal de sortie est $C(t) = x_1(j)$ pour $t \in [\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+1}[$. Ce générateur de signaux peut être implanté sous Simulink sous la forme d'une S-fonction à un paramètre (T) dont le code est donné ci-dessous.

Algorithm 1 Modèle dynamique à temps discret du générateur de signal à rapport-cyclique variable

Require: α

Ensure: C % égal à 0 ou 1

if $x_1(j) = 0$ **then**

$x_1(j+1) \leftarrow 1$

$x_2(j+1) \leftarrow \alpha$

$\tilde{t}(j+1) \leftarrow \tilde{t}(j) + \alpha T$

else

$x_1(j+1) \leftarrow 1$

$\tilde{t}(j+1) \leftarrow \tilde{t}(j) + (1 - x_2(j))T$

end if

$C \leftarrow x_1$

```
function [sys,x0]=RappCycl(t,x,u,flag,T),
if flag==0, % Initialisation
sys=[0 2 1 1 0 0]; % dimensions (états discrets, états continus, sorties, entrées)
x0 = [1; 0.5]; % valeur initiale de l'état
elseif flag==2, % calcul de x(k+1)
switch x(1),
case 1,
sys=[0; x(2)];
case 0,
sys=[1; u];
end
elseif flag==3, % calcul de yk
sys=x(1);
elseif flag==4, % t(k+1)
switch x(1),
case 1,
sys=t+x(2)*T;
case 0,
sys=t+(1-x(2))*T;
end
else
```

```

sys=[];
end

```

Hacheur quatre quadrants

Son schéma est donné sur la figure 3.12. Il s'agit d'une structure en H composée de deux bras de pont (gauche et droit). Chaque bras est composé de deux interrupteurs (haut et bas); chaque interrupteur est composé d'une association transistor/diode ou GTO/diode.

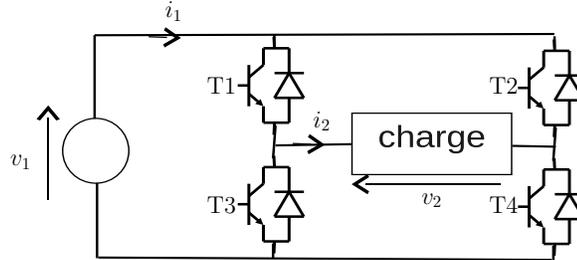


FIGURE 3.12 – Hacheur abaisseur de tension à quatre quadrants

La stratégie la plus courante consiste à commander les deux bras de manière complémentaire. Pour la variable booléenne C , on a alors les deux situations suivantes :

- pour $C = 1$, T1 et T4 sont fermés alors que T2 et T3 sont ouverts. On a alors :

$$v_2 = v_1 \quad (3.8)$$

$$i_1 = i_2 \quad (3.9)$$

- pour $C = 0$, T2 et T3 sont fermés alors que T1 et T4 sont ouverts. On a alors :

$$v_2 = -v_1 \quad (3.10)$$

$$i_1 = -i_2 \quad (3.11)$$

Le fonctionnement se résume alors par :

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = (2C - 1) \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En calculant la valeur moyenne de v_2 à v_1 constant, on a $\langle v_2 \rangle_T = 2(\alpha_k - 1)v_1$. Pour assurer $\langle v_2 \rangle_T = v_2^*$, il faut appliquer $\alpha = \frac{1}{2}(1 + v_2^*/v_1)$.

Les formes d'onde de la tension et du courant amont et aval d'un hacheur 4 quadrants alimenté par une tension constante de 100 V et alimentant une charge RL, sont données sur la figure 3.14. Le schéma de simulation est donné sur la figure 3.13 où le hacheur est implanté sous forme de “embedded Matlab function” suivante :

```

function [u2,i1] = fcn(u1,i2,C)
u2 = (2*C-1)*u1;
i1 = (2*C-1)*i2;

```

Calcul approché de l'ondulation de courant. L'ondulation de courant crête-crête Δ_{i_2} dépend principalement de la fréquence de hachage et de la valeur de l'inductance. L'exercice suivant se propose de déterminer son expression en fonction simplifiée.

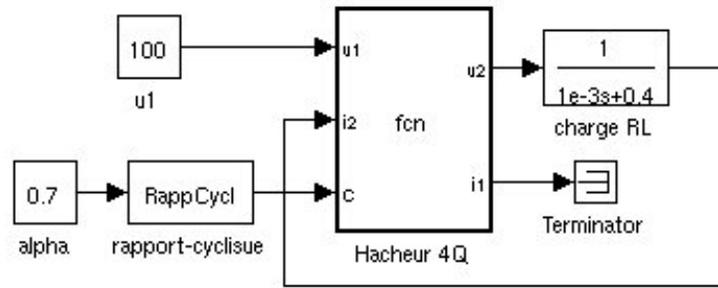
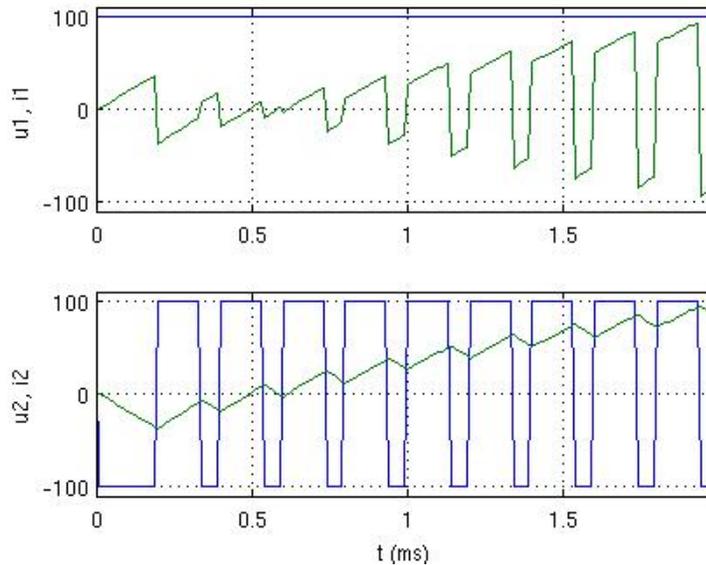


FIGURE 3.13 – Schéma de simulation d'un hacheur 4Q alimentant une charge RL

FIGURE 3.14 – Résultats de simulation d'un hacheur 4 quadrants alimenté avec une tension de 100 V, chargé par une charge RL ($R = 0.4 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$) avec hachage à 5 kHz avec un rapport-cyclique de 70 %**Exercice 14** (Formule de l'ondulation de courant).

Un hacheur 4Q de fréquence de hachage $f = 1/T$, alimenté par une tension v_1 constante, alimente une charge de type ERL dont l'équation est donnée par $v_2(t) = E + R i_2(t) + L \frac{di_2}{dt}$.

1. En appliquant l'opérateur valeur moyenne à l'équation de la charge, déterminez la relation liant v_1 , α , E , R , $\langle i_2 \rangle$.
2. En intégrant l'équation de la charge sur $[0, \alpha T]$, déterminez la relation liant T , v_1 , α , E , R , $\int_0^{\alpha T} i_2(t) dt$, L et l'ondulation de courant crête-à-crête Δ_{i_2} .
3. En supposant que $\int_0^{\alpha T} i_2(t) dt = \langle i_2 \rangle \alpha T$, déterminez l'expression approchée de Δ_{i_2} en fonction de T , v_1 , L et α .
4. Pour T , v_1 et L donnés, tracez l'allure des variations de Δ_{i_2} en fonction de α . Caractérisez son maximum.

Temps morts. La conduction simultanée des deux interrupteurs d'un même bras de pont entraîne un court-circuit de la source qui aboutit à la destruction des interrupteurs. Pour éviter cette situation lors de la commutation (passage de $C = 1$ à $C = 0$ ou l'inverse), il convient de commencer par ouvrir

l'interrupteur qui doit être ouvert, d'attendre suffisamment longtemps pour être sûr que l'interrupteur est bien ouvert puis seulement de commander la fermeture de l'interrupteur qui doit être fermé. Le temps d'attente introduit entre la commande à la fermeture et la commande à l'ouverture est appelé *temps mort*. Il est généralement petit devant la période de hachage.

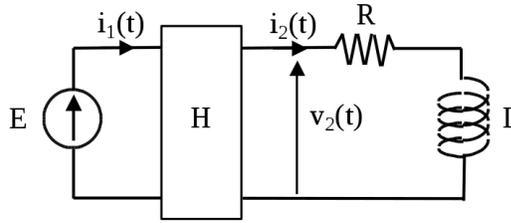


FIGURE 3.15 – Hacheur alimentant une charge RL

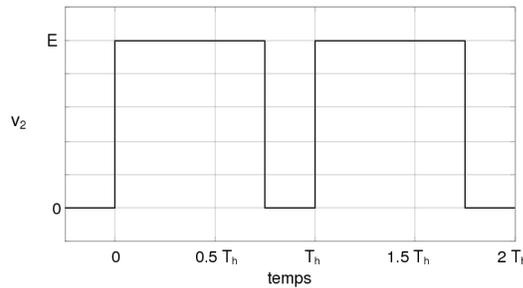


FIGURE 3.16 – Signal de commutation à rapport-cyclique égal à 0,75

Exercice 15 (Hacheur alimentant une charge RL).

Une charge R - L série est alimentée par un hacheur, lui-même alimenté par une source de tension continue de valeur E (voir figure 3.15). La période de hachage est T_h . On donne $E = 100$ V, $R = 10$ Ω , $L = 10$ mH, $T_h = 100$ μ s. La tension délivrée par le hacheur à la charge est un signal rectangulaire de rapport-cyclique α présenté sur la figure 3.16.

1. Donnez la valeur moyenne de v_2 .
2. Donnez l'équation différentielle liant i_2 et v_2 .
3. Calculez la valeur moyenne du courant (en régime permanent).
4. En supposant que le courant a une valeur initiale nulle à $t = 0$, donnez l'expression du courant sur la première période de hachage.
5. Donnez l'allure du courant en régime permanent.

3.4 Les convertisseurs continu/alternatif

3.4.1 Onduleur monophasé

L'onduleur monophasé a la même structure qu'un hacheur 4Q (voir figure 3.12). La différence se situe dans la manière de gérer les rapports-cycliques. Pour réaliser une tension sinusoïdale $v_2^*(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t)$, on applique $\alpha = \frac{1}{2}(1 + v_2^*/v_1)$. Il importe de garantir que $v_1 \geq V\sqrt{2}$ (l'onduleur ne peut réaliser des tensions supérieures à v_1) et que $\omega T \ll 1$ (la fréquence de hachage doit être grande devant la fréquence du signal à réaliser). La réponse d'un onduleur monophasé alimentant une charge RL est donnée sur la figure 3.17.

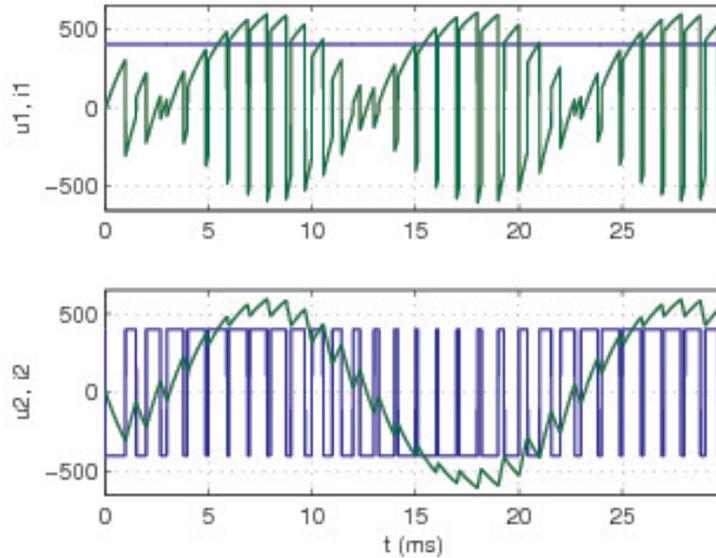


FIGURE 3.17 – Onduleur monophasé alimenté avec une tension continue de 400 V, chargé par une charge RL ($R = 1 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$) avec hachage à 1 kHz

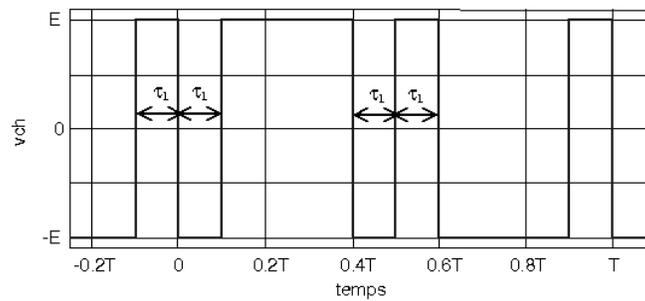


FIGURE 3.18 – Signaux de commutation de type plein onde à un angle

Exercice 16 (Onduleur monophasé : stratégie de commutation à un angle).

Cet exercice se propose de vous montrer comment mettre en œuvre une modulation à angles calculés. Sur la figure 3.18 est représentée la tension fournie par l'onduleur. Elle dépend de la durée τ_1 auquel on associe l'angle $\alpha_1 = \tau_1 2\pi/T$. On donne $T = 20 \text{ ms}$ et $E = 600 \text{ V}$.

1. Déterminez la valeur efficace du signal.
2. En vous appuyant sur les symétries, dites quels sont les termes de la série de Fourier qui sont nuls.
3. Calculez l'expression générale des termes non-nuls de la série de Fourier pour α_1 quelconque.
4. Déterminez α_1 permettant d'annuler l'harmonique de rang 3. On utilisera cette valeur dans l'ensemble des résultats demandés dans la suite.
5. Déterminez la valeur efficace du fondamental et des harmoniques jusqu'au rang 11.
6. Déterminez le taux d'harmoniques en tension.

L'onduleur alimente une charge inductive dont les caractéristiques nominales sont : $U = 400 \text{ V}$, $I = 20 \text{ A}$, $F_p = 0.8$.

- 7 Déterminez les valeurs de la résistance et l'inductance du modèle RL série équivalent.

8 Déterminez la fonction de transfert entre la tension et le courant correspondante.

9 Déterminez la valeur efficace des harmoniques de courant des rangs 1 à 11.

10 Évaluez approximativement le taux d'harmonique en courant.

3.4.2 Onduleur triphasé

Structure. L'onduleur triphasé (voir figure 3.19) est composé de trois bras de pont. Chaque bras de pont (a , b et c) est alimenté de manière indépendante. Prenons par exemple le bras a . Son signal de commutation booléen est noté C_a . Pour $C_a = 1$, l'interrupteur du haut (T1) est fermé et celui du bas (T4) est ouvert. Pour $C_a = 0$, c'est l'inverse. Notons \tilde{v}_a , \tilde{v}_b et \tilde{v}_c les tensions entre le point milieu d'un bras et la cathode du générateur v_1 . On peut écrire $\tilde{v}_a = C_a v_1$. De même, pour les autres phases, on a $\tilde{v}_b = C_b v_1$ et $\tilde{v}_c = C_c v_1$. De manière vectorielle, cela s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_a \\ \tilde{v}_b \\ \tilde{v}_c \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} C_a \\ C_b \\ C_c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Pour le courant i_1 , la contribution de i_a est $C_a i_a$. Pour les autres phases, cette contribution est $C_b i_b$ et $C_c i_c$. En sommant les courants des trois phases, on a :

$$i_1 = C_a i_a + C_b i_b + C_c i_c \quad (3.14)$$

En utilisant les notations vectorielles $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_a \\ C_b \\ C_c \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_a \\ \tilde{v}_b \\ \tilde{v}_c \end{bmatrix}$ et $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$, cela donne :

$$\tilde{\mathbf{v}} = v_1 \mathbf{C} \quad (3.15)$$

$$i_1 = \mathbf{i}^T \mathbf{C} \quad (3.16)$$

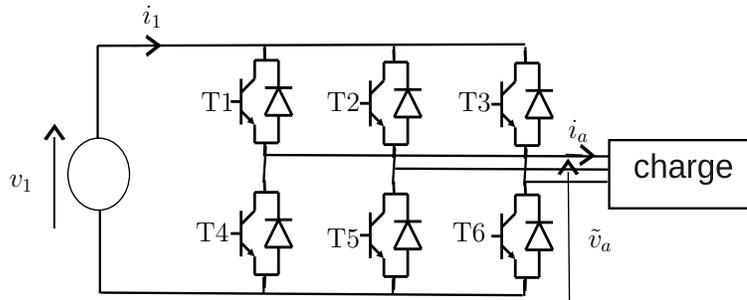


FIGURE 3.19 – Onduleur triphasé

Étude sur charge couplée en étoile. Dans le cas de l'alimentation d'une charge triphasée équilibrée couplée en étoile (voir figure 3.20), les tensions aux bornes des enroulements dépendent du potentiel du

neutre v_N . En notant $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$ le vecteur des tensions aux bornes d'un enroulement, on obtient :

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} - v_N \mathbb{I}_{3 \times 1} = v_1 \mathbf{C} - v_N \mathbb{I}_{3 \times 1} \quad (3.17)$$

où $\mathbb{I}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dans le cas d'une charge équilibrée, on montre facilement à partir de l'équation de la charge que le potentiel du neutre est égal à la moyenne des potentiels des trois phases, soit :

$$v_N = \frac{1}{3}(\tilde{v}_a + \tilde{v}_b + \tilde{v}_c) = \frac{1}{3}\mathbb{I}_{3 \times 1}^T \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.18)$$

En remplaçant dans (3.17), on obtient :

$$\mathbf{v} = M \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.19)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ainsi, les tensions délivrées à la charge se calculent à partir de la tension de la source et des signaux de commutation par :

$$\mathbf{v} = v_1 M \mathbf{C} \quad (3.21)$$

En combinant avec (3.14), on obtient un modèle permettant de simuler l'onduleur.

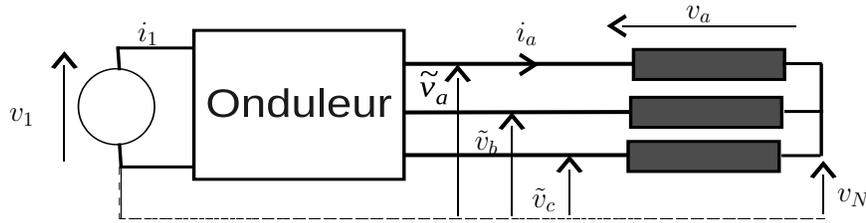


FIGURE 3.20 – Onduleur triphasé alimentant une charge couplée en étoile

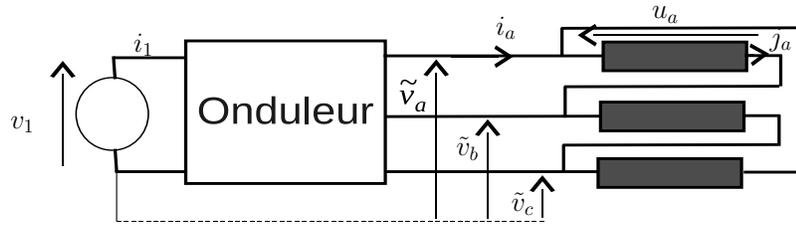


FIGURE 3.21 – Onduleur triphasé alimentant une charge couplée en triangle

Étude sur charge couplée en triangle. Dans le cas d'une charge couplée en triangle (voir figure 3.21), on a :

$$u_a = \tilde{v}_a - \tilde{v}_b \quad (3.22)$$

$$u_b = \tilde{v}_b - \tilde{v}_c \quad (3.23)$$

$$u_c = \tilde{v}_c - \tilde{v}_a \quad (3.24)$$

et

$$i_a = j_a - j_c \quad (3.25)$$

$$i_b = j_b - j_a \quad (3.26)$$

$$i_c = j_c - j_b \quad (3.27)$$

Ces relations permettent de simuler un onduleur alimentant une charge couplée en triangle.

Commande et simulation. Considérons le cas d'une charge couplée en étoile. En notant α_k le rapport-cyclique de C_k (avec $\langle C_k(t) \rangle_T = \alpha_k$), on obtient à partir de (3.21) :

$$\langle \mathbf{v} \rangle_T = v_1 M \alpha \quad (3.28)$$

où $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_a \\ \alpha_b \\ \alpha_c \end{bmatrix}$. Pour obtenir $\langle \mathbf{v} \rangle_T = \mathbf{v}^*$ où \mathbf{v}^* est le vecteur des tensions de référence, on pourrait

chercher à inverser l'équation vectorielle. Or la matrice M est de rang égal à deux⁴. De ce fait elle n'est pas inversible et il n'est pas possible de calculer directement α . En effet, l'onduleur ne permet pas d'imposer de composante homopolaire car la somme des tensions est nécessairement nulle dès que le neutre est déconnecté. Dans l'hypothèse réaliste où on cherche à appliquer des tensions sans homopolaire, par exemple :

$$\mathbf{v}^*(t) = V\sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ \sin(\omega t + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

on peut appliquer :

$$\alpha = \alpha_0 \mathbb{I}_{3 \times 1} + \frac{1}{v_1} \mathbf{v}^* \quad (3.30)$$

On choisit généralement $\alpha_0 = 1/2$ mais on peut aussi faire varier cette grandeur afin d'optimiser la plage de variation de la tension, ce qui est sans effet sur le fondamental des tensions délivrées par l'onduleur.

Les formes d'onde d'un onduleur triphasé alimentant une charge triphasée RL couplée en étoile sont données sur la figure 3.22. On observe que les tensions de la charge sont égales à des multiples du tiers de la tension d'alimentation. Dans le contenu fréquentiel des tensions, les harmoniques de rang trois et multiple de trois ont été supprimées du fait de la non-connexion du neutre.

Exercice 17 (Commande d'un onduleur).

Un onduleur triphasé alimenté par une tension v_1 constante, alimente une charge triphasée équilibrée couplée en étoile. Les rapport-cycliques sont déterminés à partir d'une tension de référence \mathbf{v}^ selon la formule (3.30). Démontrez que si la somme des composantes de \mathbf{v}^* est nulle, alors on a $\langle \mathbf{v} \rangle_T = \mathbf{v}^*$.*

Exercice 18 (Fonctionnement d'un onduleur plein onde sur une charge couplée en étoile).

Une charge triphasée équilibrée couplée en étoile est alimentée par un onduleur (voir figure 3.23). L'onduleur est alimenté en plein onde avec les signaux de commutation C_a , C_b et C_c représentés sur la figure 3.24. $C_a = 1$ correspond, pour le premier bras de l'onduleur à l'interrupteur du haut passant et à celui du bas bloqué. $C_a = 0$ correspond à l'inverse. On note E la tension d'alimentation de l'onduleur, supposée constante.

1. Représentez les formes d'ondes des tensions V_{AD} , V_{BD} et V_{CD} .
2. En utilisant le fait que la charge est équilibrée (on pourra choisir une équation de la charge de la forme $u = Ri + L di/dt$) et que le neutre n'est pas connecté, montrez que la somme des tensions V_a , V_b et V_c est nulle.
3. Déduisez-en la tension V_{ND} en fonction de V_{AD} , V_{BD} et V_{CD} .
4. Donnez alors la forme d'onde des tensions V_a , V_b et V_c aux bornes des enroulements de la charge.

4. Le rang est le nombre de lignes ou de colonnes indépendantes les unes des autres.

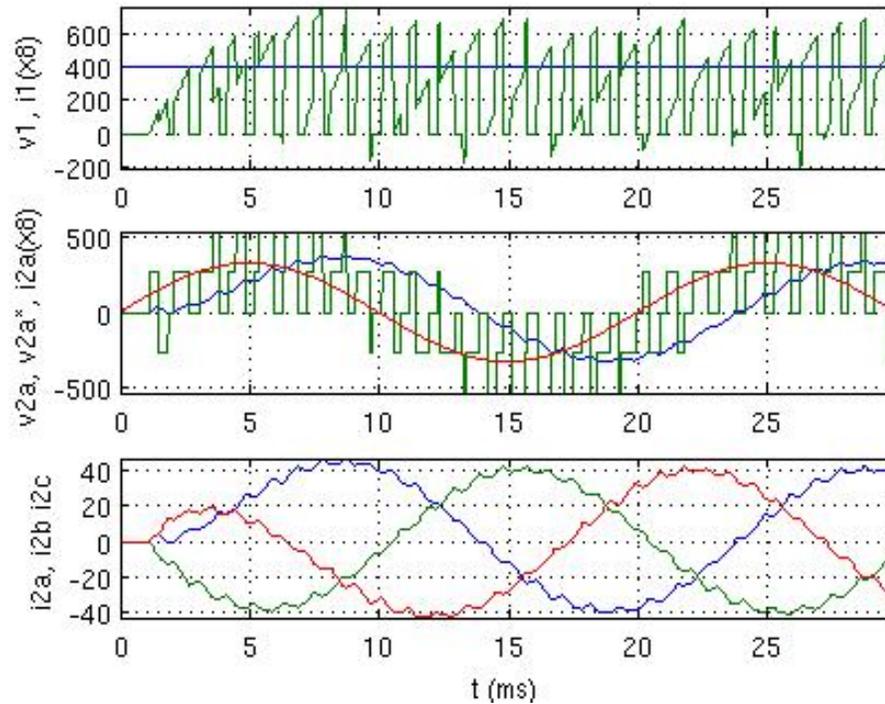


FIGURE 3.22 – Onduleur triphasé alimenté avec une tension triphasée de 230 V de tension simple, chargé par une charge RL triphasé couplée en étoile ($R = 5 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$) avec hachage à 1 kHz

3.5 Les convertisseurs alternatif/alternatif

3.5.1 Gradateur

3.5.2 Alimentation sans interruption (ASI)

3.6 Les convertisseurs alternatif/continu

3.6.1 Redresseur monophasé

Structure

Sur la figure 3.25 est représenté un redresseur monophasé à diodes. Nous allons chercher à comprendre son fonctionnement général, c'est-à-dire pour tout type de source et tout type de charge. Les interrupteurs sont supposés parfaits : commutations instantanées et sans perte. Remarquons que le redresseur à diodes délivre nécessairement une tension positive ($u_2 \geq 0$) et un courant positif ($i_2 \geq 0$). Sinon, les lois de fonctionnement ne sont pas respectées.

Conduction continue

On parle de *conduction continue* si le courant i_2 ne s'annule pas. Dans ce cas, cela signifie qu'au moins une des diodes du haut (D1 ou D2) conduit et qu'une des diodes du bas conduit (D3 ou D4). Or D1 et D2 ne peuvent conduire en même temps que si u_1 est nul, sinon on aboutirait à un court-circuit ($u_1 = 0$). De même pour D3 et D4. A partir de ces constatations, on aboutit facilement à la conclusion que le redresseur ne possède que deux modes stables :

- D1 et D4 conduisent ; D2 et D3 sont bloquées. Alors les équations sont $u_1 = u_2$ et $i_1 = i_2$. Cette configuration n'est possible que si u_1 est positif.

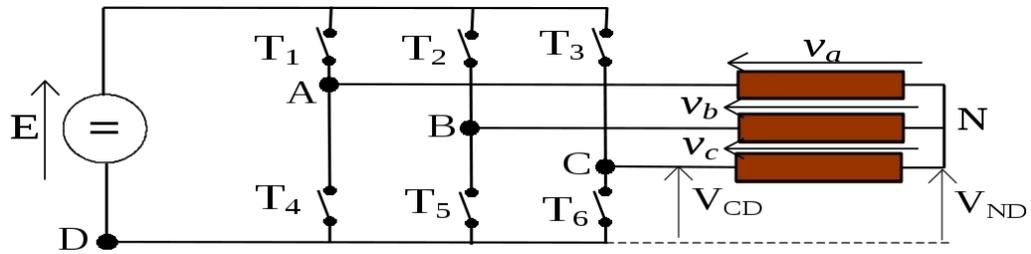


FIGURE 3.23 – Onduleur triphasé chargé par une charge triphasé couplée en étoile

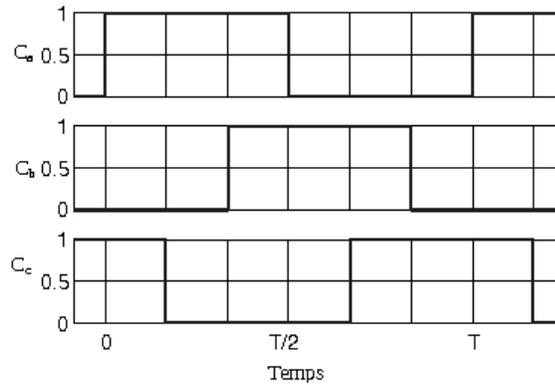


FIGURE 3.24 – Signaux de commutation de type plein onde

- D1 et D4 sont bloquées; D2 et D3 conduisent. Alors les équations sont $u_1 = -u_2$ et $i_1 = -i_2$. Cette configuration n'est possible que si u_1 est négatif.

Cette analyse permet de déterminer un modèle du redresseur en conduction continue qui respecte les contraintes exposées au paragraphe 5.2.1. Les entrées sont $u_1(t)$ et $i_2(t)$. Les sorties sont $u_2(t)$ et $i_1(t)$ déterminés à partir des entrées comme dans l'algorithme 2.

Remarque : On a $u_2(t) = |u_1(t)|$, ce qui correspond bien à un *redressement* de $u_1(t)$.

Conduction discontinue

Le modèle précédent ne permet pas de rendre compte du fonctionnement du redresseur lorsque le courant $i_2(t)$ s'annule. Lorsque le courant $i_2(t)$ a tendance à devenir négatif, l'ensemble des diodes s'ouvre, créant une déconnexion complète entre l'amont et l'aval du redresseur. Dans cette situation, la chaîne de causalité est brisée : $u_2(t)$ est alors déterminé par l'aval (au lieu de l'amont) et $i_1 = i_2 = 0$.

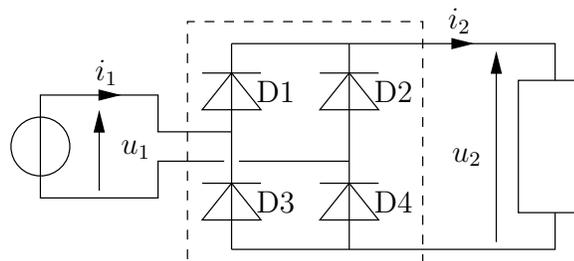


FIGURE 3.25 – Pont redresseur monophasé

Algorithm 2 Modèle du redresseur PD2 en conduction continue

Require: $u_1(t), i_2(t)$

Ensure: $u_2(t), i_1(t)$

if $u_1(t) \geq 0$ **then**

$u_2(t) \leftarrow u_1(t)$

$i_1(t) \leftarrow i_2(t)$

else

$u_2(t) \leftarrow -u_1(t)$

$i_1(t) \leftarrow -i_2(t)$

end if

Notons $\tilde{u}_2(t) = |u_1(t)|$ la valeur de $u_2(t)$ en cas de conduction. Le redresseur se remet à conduire dès que $\tilde{u}_2(t) \geq u_2(t)$.

Pour la simulation, du fait de rupture de la chaîne de causalité, il n'est pas possible de séparer la simulation du redresseur de celle du circuit aval. Considérons donc le cas d'un redresseur alimentant un filtre LC. On note avec l'indice 2 les grandeurs en amont du filtre et avec l'indice 3 celles à son aval. Les équations du filtre sont données par :

$$u_2(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + u_3(t) \quad (3.31)$$

$$i_2(t) - i_3(t) = C \frac{du_3(t)}{dt} \quad (3.32)$$

Différentes solutions peuvent être proposées pour simuler le redresseur avec le filtre. Nous proposons de ne pas modifier le modèle du redresseur, mais de considérer qu'il délivre la tension $\tilde{u}_2(t)$ et de donner un modèle du filtre permettant de tenir compte de la conduction discontinue. Son modèle est donné dans l'algorithme 3. La condition est vraie en cas de non-conduction. La condition $i_2(t) < 0$ permet de détecter les ouvertures du circuit (passage de la conduction à la non-conduction). La condition $(i_2(t) = 0 \text{ AND } \tilde{u}_2(t) < u_3(t))$ permet de détecter la remise en route du redresseur. Si le test est faux, on calcule les équations normales du filtre en fonction de la tension amont et du courant aval. Cet algorithme est en fait un modèle dynamique et les équations différentielles doivent être intégrées afin de déterminer les trajectoires des grandeurs d'état. On peut simuler un tel système sous l'environnement Matlab/Simulink. Le plus simple consiste en l'utilisation d'une "S-function" permettant de simuler des systèmes dynamiques très diverses.

Algorithm 3 Modèle du filtre LC pour le fonctionnement avec un redresseur PD2 en conduction discontinue

Require: $\tilde{u}_2(t), i_3(t)$

Ensure: $u_2(t), u_3(t), i_2(t)$

$\tilde{u}_2(t) \leftarrow |u_1(t)|$

if $i_2(t) < 0$ OR $(i_2(t) = 0 \text{ AND } \tilde{u}_2(t) < u_3(t))$ **then**

$i_2(t) \leftarrow 0$

$\frac{du_3(t)}{dt} \leftarrow -\frac{i_3(t)}{C}$

$u_2(t) \leftarrow u_3(t)$

else

$u_2(t) \leftarrow \tilde{u}_2(t)$

$\frac{du_3(t)}{dt} \leftarrow \frac{1}{C}(i_2(t) - i_3(t))$

$\frac{di_2(t)}{dt} \leftarrow \frac{1}{L}(u_2(t) - u_3(t))$

end if

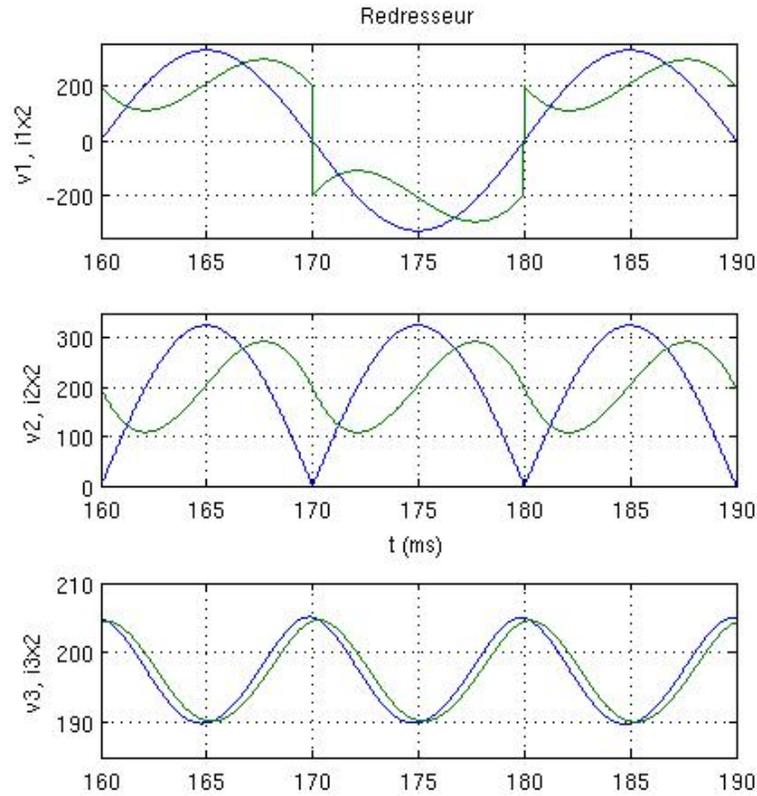


FIGURE 3.26 – Redresseur chargé par un filtre LC et une résistance R en conduction continue ($L = 5$ mH, $C = 10$ mF, $R = 2 \Omega$)

Modèle avec inductances amont et aval

Nous considérons le redresseur avec une inductance en amont (L_a , coté alternatif) et une inductance en aval (L_c , coté continu). En amont et en aval, le dispositif est alimenté par des sources de tension, respectivement $u_1(t)$ et $u_4(t)$.

La commutation entre les deux diodes du même étage (D1 et D2 pour le haut ou D3 et D4 pour le bas) ne sera pas instantanée car l'inductance limite la montée du courant. Considérons par exemple la situation où D1 et D4 conduisent avec $u_2(t) > 0$. Le courant traversant ces diodes est $i_{D_2}(t)$ et les diodes conduisent tant que $i_{D_2}(t) \geq 0$. La tension aux bornes de D2 et D3 est $u_{D_2}(t) = -u_2(t)$. Ces diodes se mettront à conduire dès que cette tension deviendra positive, c'est-à-dire dès que $u_2(t)$ deviendra négatif. On se retrouvera alors dans une phase où les quatre diodes sont passantes. En fonctionnement normal, par exemple sous alimentation sinusoïdale, le courant dans D1 et D4 devrait rapidement décroître sous l'effet de la tension $u_1(t)$ négative, ce qui devrait entraîner l'ouverture de ces diodes. Du point de vue du fonctionnement, il en résulte que le circuit peut avoir quatre configurations :

- C1. D1 et D4 conduisent ; D2 et D3 sont bloquées. Alors les équations du redresseur sont $u_1 = u_2$ et $i_1 = i_2$.
- C2. D1 et D4 sont bloquées ; D2 et D3 conduisent. Alors les équations du redresseur sont $u_1 = -u_2$ et $i_1 = -i_2$.
- C3. Toutes les diodes conduisent. Cette phase est appelée *empiètement*. Alors on a $u_2(t) = 0$.
- C4. Toutes les diodes sont bloquées. Alors on a $i_1 = i_2 = 0$.

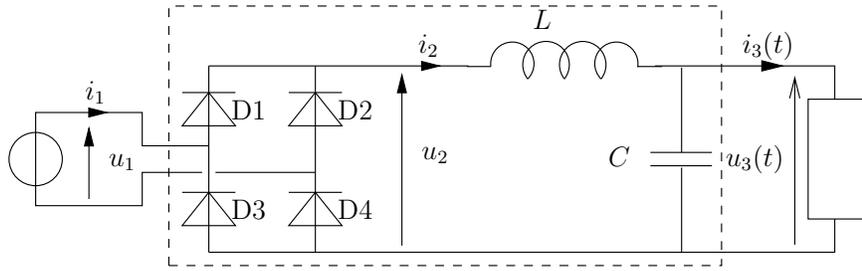


FIGURE 3.27 – Pont redresseur monophasé avec filtre LC en aval

Les conditions de passage sont les suivantes :

- C1 → C3 lorsque $u_2 < 0$
- C2 → C3 lorsque $u_2 > 0$
- C1 → C4 lorsque $i_4 < 0$
- C2 → C4 lorsque $i_4 < 0$
- C3 → C1 lorsque $i_{D_2} < 0$
- C3 → C2 lorsque $i_{D_1} < 0$
- C4 → C1 lorsque $\tilde{u}_3 > u_3$ et $u_1 > 0$
- C4 → C2 lorsque $\tilde{u}_3 > u_3$ et $u_1 < 0$

L'étude du circuit permet de déterminer les grandeurs intermédiaires. Ainsi, la loi des nœuds appliquée à la jonction entre les diodes D1 et D2, puis entre la jonction entre les diodes D3 et D4 donne :

$$i_{D_1} + i_{D_2} = i_{D_3} + i_{D_4} = i_4 \quad (3.33)$$

La loi des nœuds appliquée successivement à la jonction entre D1 et D3 puis entre D2 et D4 donne :

$$i_{D_4} - i_{D_2} = i_{D_3} + i_{D_4} = i_1 \quad (3.34)$$

Par symétrie, on a $i_{D_1} = i_{D_4}$ et $i_{D_2} = i_{D_3}$. On déduit donc des équations ci-dessus :

$$i_{D_1} = i_{D_4} = \frac{1}{2}(i_1 + i_4) \quad (3.35)$$

$$i_{D_2} = i_{D_3} = \frac{1}{2}(i_4 - i_1) \quad (3.36)$$

A partir de ces formules, il est possible de simuler le redresseur comme un système possédant un seul état : sa configuration, qui peut prendre les valeurs de 1 à 4.

3.6.2 Redresseur triphasé

Structure

Modèle en conduction continue

Il est simple démontrer que le redresseur fonctionne de la manière suivante : parmi les trois diodes de la partie haute, celle qui conduit est celle qui est reliée à la phase qui a le potentiel le plus élevé. Parmi les trois diodes du bas, celle qui conduit est celle qui est connectée à la phase qui a le potentiel le plus bas. La démonstration peut se faire facilement par l'absurde : si on suppose que les choses se passent autrement, on aboutit rapidement à la conclusion qu'une diode se retrouve avec une tension positive à ses bornes, ce qui n'est pas possible. Le modèle ayant comme entrées v_a, v_b, v_c, i_2 et comme sorties u_2, i_a, i_b, i_c est donné par l'algorithme 4.

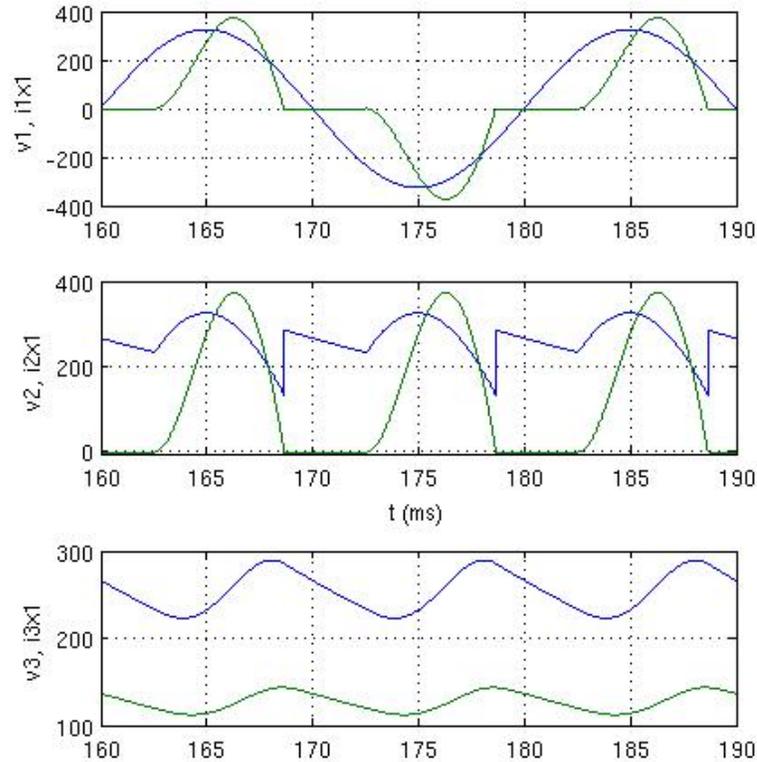


FIGURE 3.28 – Redresseur chargé par un filtre LC et une résistance R en conduction discontinue ($L = 0,5$ mH, $C = 10$ mF, $R = 2 \Omega$)

Exercice 19 (Modèle du redresseur PD6).

Donnez la fonction Matlab permettant de simuler un redresseur PD6 sous Simulink avec une fonction de type “Matlab function”. Les signaux d’entrée et de sortie doivent être stockés dans une variable unique.

3.6.3 PFC

Il s’agit d’une structure composée d’un redresseur à diodes PD2 débitant sur une inductance L série et d’un hacheur boost (élevateur de tension). On commande le hacheur de manière à asservir son courant d’entrée sous la forme d’un sinus redressé. Du coup, le courant d’entrée du redresseur est sinusoïdal. Le hacheur est chargé par un condensateur C de manière à lisser la tension délivrée.

Dans la simulation montrée ici, le hacheur débite sur une résistance R . L’alimentation est faite par un réseau monophasé sinusoïdal de valeur efficace de 230 V à la fréquence de 50 Hz. On a $R = 20 \Omega$, $L = 5$ mH et $C = 10$ mF. La commande est faite par une “fourchette” de courant réglée sur ± 4 A ; la consigne de courant est de 50 A de valeur crête. Le condensateur est initialement chargé à une tension de 400 V afin de limiter le régime transitoire.

Le modèle de simulation développé sous Simulink et donné dans la figure 3.31. La stratégie de commande est détaillée dans la figure 3.32. Une consigne de courant de la forme d’un sinus redressé est simplement réalisée à partir de la tension redressée v_2 . En réalité, la réalisation de cette tension demanderait plus de travail car v_2 n’est égal à $|v_1(t)|$ que lorsque le redresseur conduit. Il serait préférable de recalculer $|v_1(t)|$ directement à partir de $v_1(t)$. Les formes d’ondes relatives aux différentes

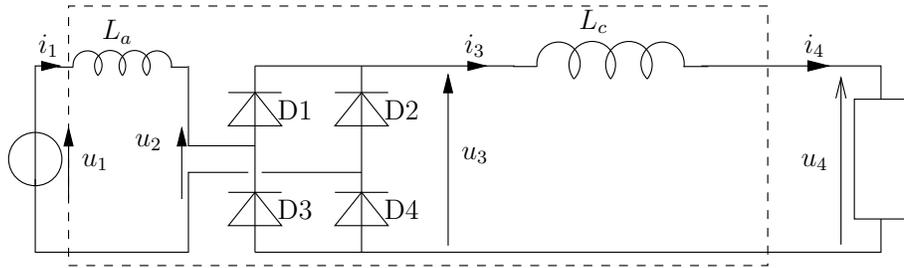


FIGURE 3.29 – Pont redresseur monophasé avec inductance en amont et en aval

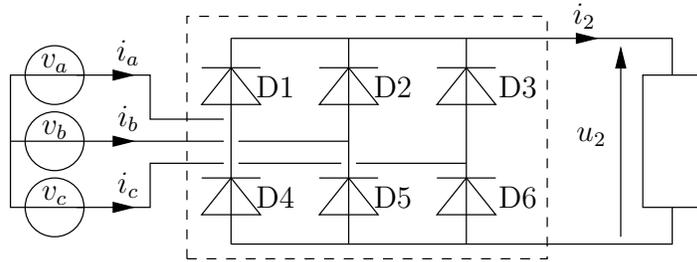


FIGURE 3.30 – Pont redresseur triphasé

parties du montage sont données dans les figures 3.33 à 3.35.

3.6.4 Redresseur à MLI

Il est possible d'utiliser la même structure que celle de l'onduleur monophasé ou le hacheur quatre quadrants : un pont à 4 transistors (voir figure 3.36). Dans la simulation considérée, le redresseur débite sur une charge RL série. Le réseau d'alimentation est monophasé de valeur efficace de tension 230 V et de fréquence de 50 Hz. On a $R = 20 \Omega$ et $L = 5 \text{ mH}$. La "fourchette" de courant est réglée sur $\pm 2 \text{ A}$; la consigne de courant est de 5 A de valeur efficace. Le schéma de simulation est donné sur la figure 3.37. On observe que le bloc simulant l'onduleur est le même que celui d'un hacheur 4Q. La commande en fourchette de courant est détaillée sur la figure 3.38; la référence du courant est établie à partir du redressement de la tension du réseau supposée sinusoïdale. Les formes d'ondes sont données sur la figure 3.39.

Algorithm 4 Modèle du redresseur PD6 en conduction continue

Require: v_a, v_b, v_c, i_2

Ensure: u_2, i_a, i_b, i_c

$[u_{\max}, r_{\max}] \leftarrow \max(v_a, v_b, v_c)$ % donne le maximum des trois et son rang

$[u_{\min}, r_{\min}] \leftarrow \min(v_a, v_b, v_c)$

$u_2 \leftarrow u_{\max} - u_{\min}$

$I_3 \leftarrow [0, 0, 0]$ % vecteur nul (initialisation)

$I_3(r_{\max}) \leftarrow i_2$ % composante no r_{\max} du vecteur I_3

$I_3(r_{\min}) \leftarrow -i_2$

$i_a \leftarrow I_3(1)$

$i_b \leftarrow I_3(2)$

$i_c \leftarrow I_3(3)$

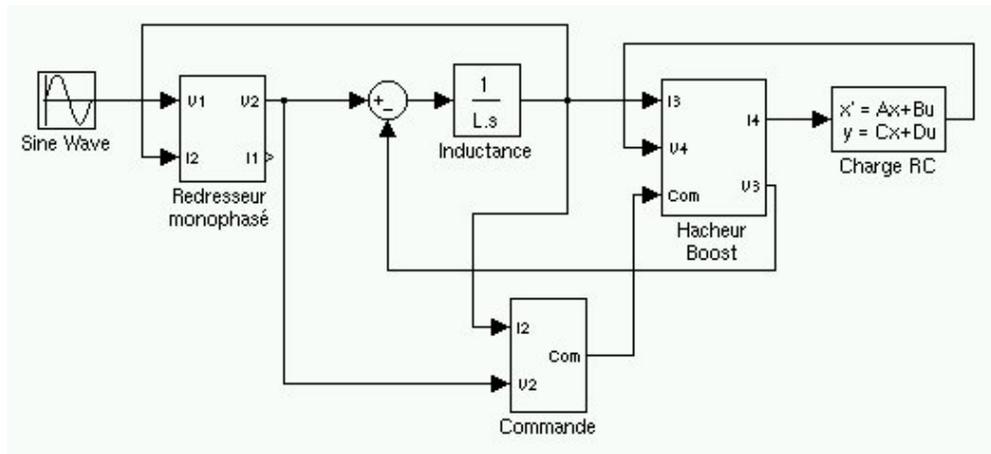


FIGURE 3.31 – Modèle de simulation du PFC

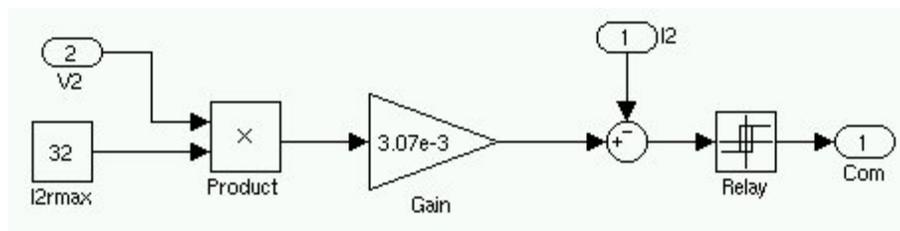


FIGURE 3.32 – Commande du PFC

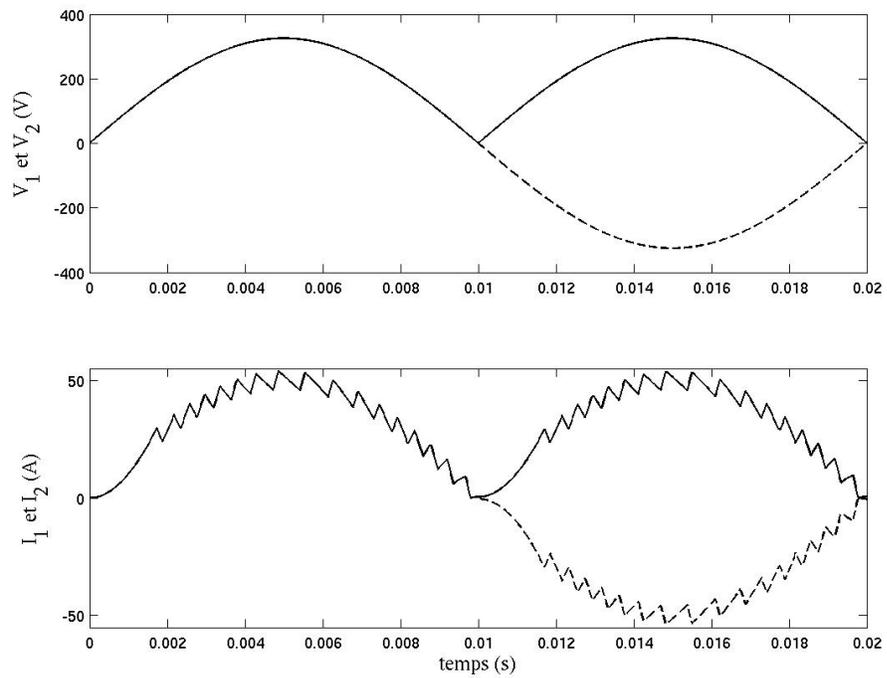


FIGURE 3.33 – Formes d'ondes relatives au redresseur

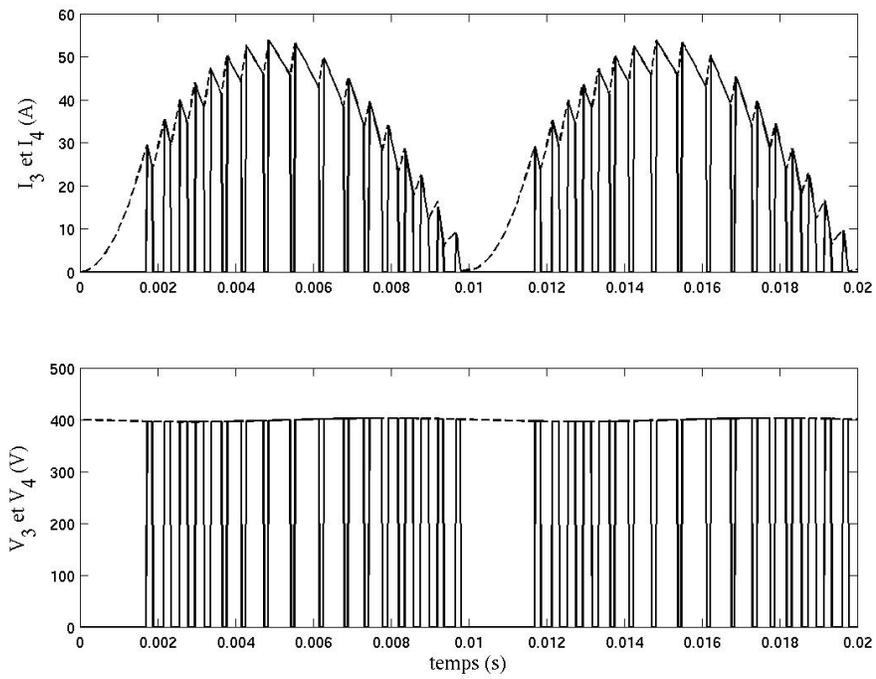


FIGURE 3.34 – Formes d’ondes relatives au hacheur de courant

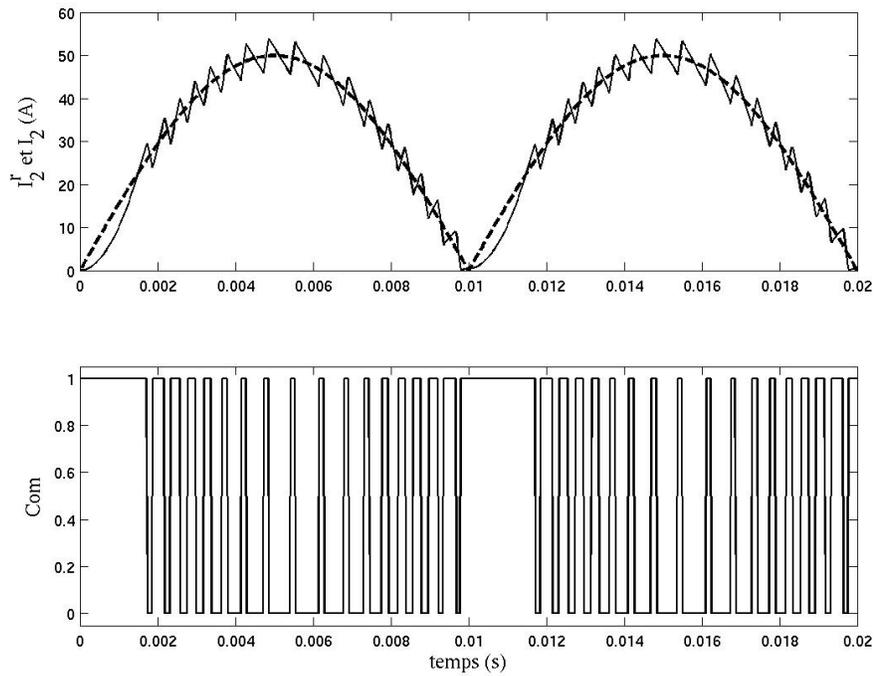


FIGURE 3.35 – Formes d’ondes relatives à l’asservissement du courant dans l’inductance

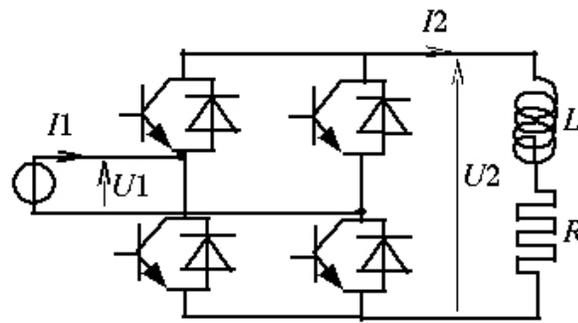


FIGURE 3.36 – Schéma du hacheur MLI

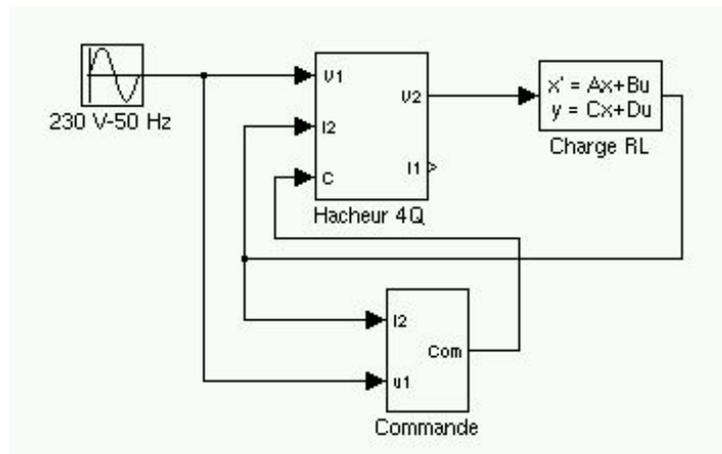


FIGURE 3.37 – Schéma de simulation du hacheur MLI

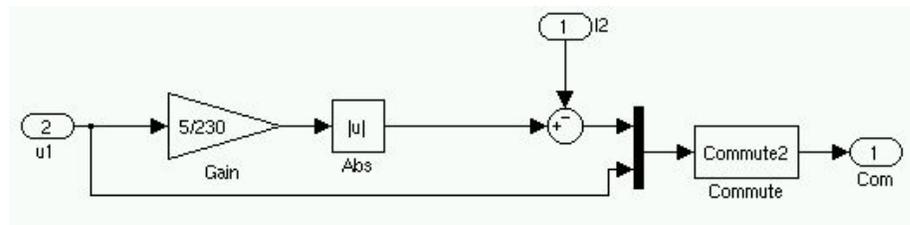


FIGURE 3.38 – Commande du hacheur MLI

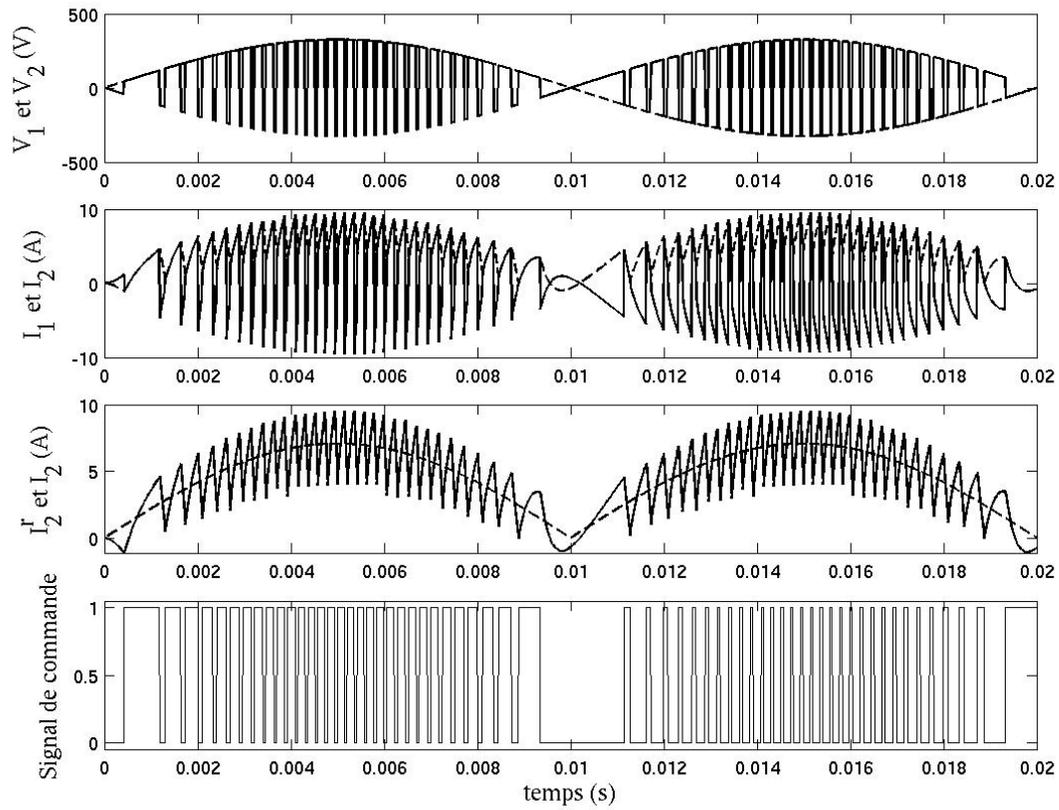


FIGURE 3.39 – Formes d'ondes relatives au hacheur MLI

Chapitre 4

Amélioration de l'énergie électrique

4.1 Position du problème

4.1.1 Gestion de l'énergie électrique

Réduction des consommations électriques

Deux types de consommation : chauffage et autres appareils électrique

Consommation annuelle en kWh :

- meilleure utilisation : éteindre les postes informatiques et l'éclairage ; consignes de température adaptée
- choix de luminaires basse consommation
- mise en place de systèmes de régulation de l'éclairage (détecteur de présence, prise en compte de l'éclairage naturel)

Réduction de la puissance crête

Permet de réduire la puissance souscrite et donc le prix de l'abonnement. Des systèmes de délestage sont possibles, notamment pour les systèmes de chauffage permettant une inertie élevée.

Production d'énergie sur site

Des panneaux photo-voltaïques peuvent être installés. L'énergie électrique peut être utilisée sur site, ce qui permet de réduire la facture d'électricité. Mais il est actuellement plus intéressant financièrement de vendre cette énergie à votre fournisseur d'électricité car vous bénéficiez alors d'une subvention destinée à encourager la production d'électricité de manière renouvelable.

Mise ne place d'une pompe à chaleur

Les pompes à chaleur permettent de produire du froid ou du chaud en échangeant les calories avec l'environnement. Il peut s'agir du sol (on parle de géothermie), de l'eau ou de l'air. Sur un site existant avec chauffage au gaz ou au fioul, il est possible de remplacer la chaudière existante par une chaudière équipée d'une pompe à chaleur, afin de réduire la facture énergétique. En situation de travaux neuf, les meilleurs rendements sont obtenus en utilisant un plancher chauffant (qui peut également être refroidis).

Les pompes à chaleur présentent l'inconvénient de voir leur puissance maximale décroître avec la température de la source d'énergie. Or c'est justement dans ces configurations que le maximum d'énergie est souhaité. Pour compenser la perte de puissance, il est possible de d'insérer un chauffage rhéostatique qui ne sera utilisé que pour les très basses températures, sans remettre en cause la pertinence économique.

Choix du fournisseur et du contrat

Depuis la libéralisation du marché de l'énergie électrique, les particuliers et les entreprises ont la possibilité de choisir leur fournisseur.

La réduction du coût de l'énergie passe par le choix d'un contrat adéquat. Des économies conséquentes sont possibles en souscrivant un contrat de type EJP (effacement des jours de pointe). Vous vous engagez alors à ne pas consommer d'énergie électrique pendant certaines périodes. En cas de consommation, le prix sera fortement majoré par rapport aux kWh hors période EJP. Ce type de contrat convient particulièrement aux sites disposant d'un groupe électrogène.

Amélioration de la qualité de l'énergie

Suivant le contrat, un utilisateur s'engage à ne pas consommer plus d'un certain niveau de puissance réactive et de puissance déformante. En cas de non respect de ces contraintes, des pénalités seront appliquées par le fournisseur. Des investissements destinés à compenser la puissance réactive et à compenser les harmoniques de courant peuvent s'avérer rentables.

4.2 La compensation de l'énergie réactive

4.3 Le filtrage des harmoniques

4.3.1 Choix des inductances de ligne

4.3.2 Filtre passif

4.3.3 Filtre actif

4.3.4 Alimentation à facteur de puissance unitaire

Chapitre 5

Présentation des différentes technologies d'actionneurs électriques

Les actionneurs électriques sont de deux types : les actionneurs linéaires qui produisent des mouvements de translation et les actionneurs rotatifs qui produisent des rotations par rapport à un axe. Ces derniers étant les plus courants, nous nous concentrerons sur leur étude. Par ailleurs, les principes de fonctionnement des actionneurs sont les mêmes pour les actionneurs linéaires que pour les actionneurs rotatifs.

5.1 Principe général de fonctionnement

Un actionneur est constitué de deux parties : le *stator* est la partie fixe. La partie mobile est nommée *rotor*. l'espace séparant le stator du rotor est occupé par de l'air ; on le nomme *entrefer*. Sa largeur est généralement inférieure au millimètre. Pour comprendre le fonctionnement des machines électriques, on est amené à s'intéresser de près à ce qui se passe dans l'entrefer. Cette partie étant à l'interface du stator et du rotor, c'est l'interaction des champs magnétiques dans son espace qui est responsable de la production de couple. On fait généralement l'hypothèse que le champ magnétique dans l'entrefer est radial. Supposons que la composante radiale du champ dans l'entrefer produit par le stator soit de la forme :

$$B_s(\xi) = B_s^{\max} \cos(p(\xi - \alpha_s)) \quad (5.1)$$

Il s'agit d'un champ à $2p$ pôles (p pôles nord et p pôles sud) à répartition spatiale sinusoïdale calé sur l'axe $\xi = \alpha_s$. Supposons que le rotor produise un champ de même nature :

$$B_r(\xi) = B_r^{\max} \cos(p(\xi - \alpha_r)) \quad (5.2)$$

Les deux champs opèrent comme deux aimants et cherchent à se rapprocher. On peut facilement imaginer que le couple qu'appliquera le stator au rotor est de la forme :

$$C = C^{\max} \sin(\alpha_s - \alpha_r) \quad (5.3)$$

En effet, ce couple est nul dès lors que les champs du rotor et du stator sont en phase ; il est maximum pour un décalage d'un quart de période. Lorsque c'est possible, on s'arrangera pour avoir $\alpha_s = \alpha_r + \frac{\pi}{2}$ afin d'utiliser le moteur au maximum de son efficacité. Le couple pourra être réglé avec les amplitudes des champs B_s^{\max} et B_r^{\max} .

5.2 La machine à courant continu

Le champ dans une machine à courant continu a la propriété d'être statique avec $\alpha_r = 0$ et $\alpha_s = \frac{\pi}{2p}$. Le champ du rotor est réalisé soit par des aimants permanents (pour les puissances inférieures au kW environ) soit par un bobinage dans lequel circule un courant appelé *courant d'excitation*.

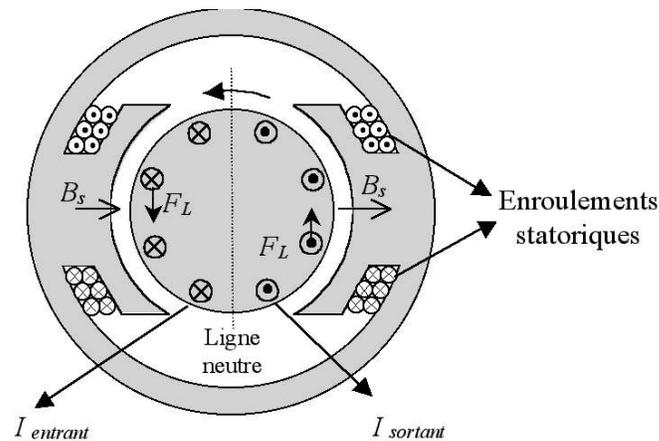


FIGURE 5.1 – Coupe d'une machine à courant continu à excitation bobinée [http://www.jmbprofessionnel.org/10-categorie-591480.html]

5.2.1 Principe et équations

Imaginons que le stator impose un champ constant sortant par un pôle nord et entrant par un pôle sud, l'axe du champ étant dans la direction $\alpha_s = 0$. Notons Φ_s le flux de ce champ et S la surface sous un pôle. Dans le cas où ce champ est produit par un bobinage, il s'écrit $\Phi_s = L_s i_s$ où i_s est le courant d'excitation du stator et L_s est son inductance.

Considérons que le rotor est formé d'une seule spire de section S parcourue par un courant i_r et ayant une tension u_s à ses bornes. On adoptera la convention récepteur. Le flux total ϕ_r qui traverse cette spire est la somme de deux flux :

- le flux auto-induit qui s'écrit $L_r i_r$ où L_r est l'inductance de la spire,
- le flux produit par l'excitation présente au stator ; celui-ci dépend de la position respective du rotor par rapport à la spire. En notant θ l'angle du rotor avec le stator et en faisant l'hypothèse qu'il a une forme sinusoïdale, il s'écrit $\Phi_s \cos(\theta)$ où Φ_s est le flux d'excitation ou encore $M(\theta) i_s$ où $M(\theta) = L_s \cos(\theta)$ est la mutuelle inductance supposée varier de manière sinusoïdale en fonction de la position.

On a donc $\phi_r = \Phi_s \cos(\theta) + L_r i_r = M(\theta) i_s + L_r i_r$. En notations vectorielles, la matrice des inductance s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_s & M(\theta) \\ M(\theta) & L_r \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

et la relation 2.105 donne $C = i_s \frac{dM}{d\theta} i_r$, ce qui s'écrit $C = -i_s i_r L_s \sin(\theta)$ ou encore $C = -\Phi_s i_r \sin(\theta)$.

La tension s'écrit par la loi de Lenz $u_r = \frac{d\phi_r}{dt}$ soit $u_r = -\Phi_s \sin(\theta) \Omega + L_r \frac{di_r}{dt}$. On peut distinguer la force électromotrice induite par le champ du stator $e_r = -\Phi_s \sin(\theta) \Omega$. En tenant compte de la résistance interne R_r de la spire, cela donne $u_r(t) = e_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt} + R_r i_r(t)$.

Si le courant i_r était constant, le moteur ne tournerait pas longtemps et s'immobiliserait dans la position de conjonction des champs du rotor et du stator $\theta = 0$. Pour maintenir un couple positif, il faut être capable d'imposer un courant $i_r(t)$ qui est en permanence du signe opposé à $\sin(\theta)$. Le système mécanique qui réalise cette fonction se nomme le *collecteur*¹. Cette pièce relie le courant d'alimentation continu à la spire par un contact glissant entre des lames de cuivre connectées à la spire et deux charbons par lesquels arrivent le courant d'alimentation $i(t)$. Les équations s'écrivent alors $C = i \Phi_s |\sin(\theta)|$ et $e = \Phi_s |\sin(\theta)| \Omega$.

1. Le collecteur est une pièce d'usure et les balais doivent être changés au bout d'un certain temps. De plus le contact glissant entre un balais et les lames du collecteur produit des étincelles. De ce fait, les moteurs à courants continus sont exclus de certaines applications.

Dans la pratique, le rotor est équipé de nombreuses spires ce qui permet de lisser le couple et la force électromotrice. On conserve toutefois la dépendance linéaire de la fem en fonction de la vitesse Ω et du couple en fonction du courant. Les équations de l'*induit*² s'écrivent alors³ :

$$e(t) = k\Phi_s\Omega(t) \quad (5.5)$$

$$C(t) = k\Phi_s i(t) \quad (5.6)$$

$$u(t) = e(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (5.7)$$

où k est un coefficient sans unité dépendant du bobinage du rotor, R est la résistance de l'induit ; L est son inductance. On notera que les deux premières équations lient les grandeurs électriques, magnétiques et mécaniques alors que la troisième équation, qui est une équation différentielle, ne concerne que les grandeurs électriques.

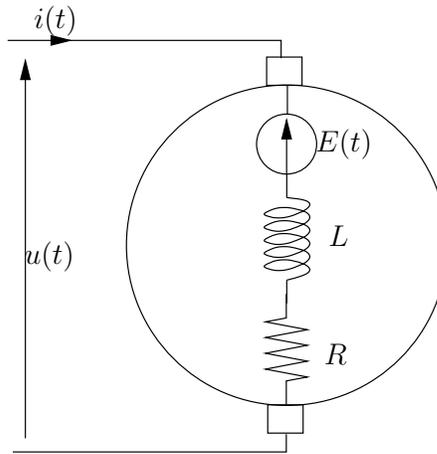


FIGURE 5.2 – Modèle de l'induit d'une machine à courant continu

L'évolution de la vitesse est déterminée par la relation fondamentale de la dynamique :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C - C_r \quad (5.8)$$

où J est l'inertie du moteur et de l'ensemble des parties mobiles qui lui sont connectées (en Kg.m^2), C_r est la somme des couples résistants (en N.m) qui freinent le moteur en s'opposant au couple moteur.

5.2.2 Différents types de moteurs

Moteur à aimants permanents

Le type de moteur à courant continu le plus répandu et notamment pour les petites puissances ($< 1 \text{ kW}$) possède un stator équipé d'aimants permanents. Dans ce cas, le flux Φ est constant et on peut réécrire les équations de la fem et du couple en faisant apparaître la constante $K = k\Phi$:

$$e(t) = K\Omega(t) \quad (5.9)$$

$$C(t) = Ki(t) \quad (5.10)$$

Il apparaît que la fem est rigidement liée à la vitesse et que le couple est lié au courant.

2. Par opposition au stator qui a le rôle d'inducteur ou encore d'excitation, le rotor d'un moteur à courant continu est qualifié d'induit.

3. Ces équations sont valables quelque soit le nombre de paires de pôles de la machine.

Moteur à rotor bobiné

Pour les puissances plus importantes où pour des applications particulières, on utilise des rotors bobinés. L'excitation est alors réalisée par un électro-aimant parcouru par un courant d'excitation i_e .

Intéressons nous aux variations du flux en fonction du courant d'excitation. A défaut de mesurer le flux, on peut estimer $k\Phi$ de la manière suivante : on entraîne la machine à courant continu grâce à une autre machine à une vitesse Ω . L'induit est maintenu ouvert de sorte d'avoir $i(t) = 0$, ce qui fait que la tension est égale à la fem : $u(t) = e(t)$. En mesurant la tension et la vitesse, on peut déterminer $k\Phi = \frac{u}{\Omega}$. A titre d'exemple, une allure typique est donnée sur la figure 5.3. Cette caractéristique a la même allure que la courbe B(H) d'un matériau magnétique. On observe une zone linéaire pour les faibles valeurs du courant où on peut écrire $k\Phi = L_e i_e$. Le coude de saturation apparaît dans cet exemple aux alentours de 0,75 A.

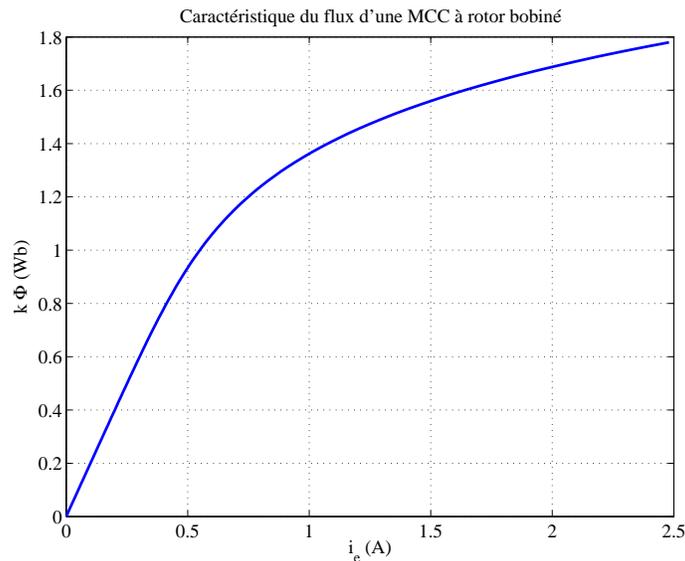


FIGURE 5.3 – Caractéristique du flux d'une MCC

En tenant compte de la résistance R_e du circuit d'excitation, l'équation de la tension s'écrit : $u_e(t) = R_e i_e(t) + \frac{d\Phi}{dt}$ où $u_e(t)$ est la tension d'alimentation de l'inducteur. En régime permanent, le courant se stabilise à $i_e = \frac{u_e}{R_e}$. En régime linéaire, le régime transitoire peut aussi s'écrire : $u_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$.

Les moteurs à rotor bobiné offrent différentes possibilités quant à l'alimentation du circuit d'excitation. On peut utiliser une alimentation indépendante permettant alors de régler le flux de manière arbitraire. Si on ne dispose pas d'alimentation supplémentaire à dédier à l'excitation, il faut alors utiliser la même alimentation que pour l'induit en le couplant soit en série, soit en parallèle.

Moteur universel

Considérons le cas du moteur à excitation série non saturé. Avec $i_e(t) = i(t)$, son couple s'écrit alors : $C(t) = L_e i^2(t)$. Ainsi, on observe que le couple est positif quelque soit le signe du courant. Il s'agit donc d'un moteur capable de fonctionner aussi bien sous alimentation continue qu'alternative. Pour cette raison, on le nomme *moteur universel*. Ces moteurs sont utilisées pour des applications bas coût de faible puissance comme les perceuses électriques.

Exercice 20 (Moteur à courant continu alimenté par un hacheur).

Un moteur à courant continu à aimants permanents est alimenté par un hacheur à 4 quadrants. Les

paramètres du moteur et du hacheur sont :

- $K_e = 1 \text{ V/rad.s}$ (constante de fem),
- $K_c = 1 \text{ N.m/A}$ (constante de couple),
- $R = 1 \Omega$ (résistance d'induit),
- $L = 4 \text{ mH}$ (inductance d'induit),
- $\Omega_n = 3000 \text{ tr/min}$ (vitesse nominale de rotation du rotor),
- $\Omega_{\max} = 5000 \text{ tr/min}$ (vitesse maximale),
- $C_n = 10 \text{ N.m}$ (couple nominal),
- $f_e = 10 \text{ kHz}$ (fréquence de commutation du hacheur),
- $J = 10^{-2} \text{ kg.m}^2$ (inertie des masses en rotation),
- $f = 10^{-3} \text{ kg.m}^2/\text{s}$ (coefficient de frottement fluide).

A. Etude du moteur et du hacheur

Déterminez :

1. La valeur du courant permettant d'alimenter le moteur à couple nominal.
2. La valeur moyenne de la tension à fournir au moteur pour le faire tourner à sa vitesse maximale avec le courant nominal,
3. La tension continue alimentant le hacheur sachant que les rapports-cycliques sont compris dans l'intervalle $[0.05, 0.95]$. Vous préciserez s'il s'agit d'une valeur minimale ou maximale.

Pour le régime nominal (vitesse et couple nominaux), calculez :

- 4 Les pertes joules (on négligera l'ondulation du courant),
- 5 Le rendement du moteur,
- 6 Le rapport-cyclique de la tension délivrée par le hacheur,
- 7 L'ondulation du courant,
- 8 Les pertes Joule en tenant compte de l'ondulation de courant (vous supposerez que le courant varie de manière affine entre deux commutations du hacheur). Comparez avec la valeur précédemment calculée.

B. Asservissement de courant.

On cherche à réaliser un asservissement du courant par un correcteur PI $C(s) = K_p \frac{1+\tau_i s}{\tau_i s}$.

- 9 Représentez le schéma de la boucle de correction faisant apparaître la grandeur de consigne, la mesure, la commande, le correcteur et le système à asservir. On supposera que la grandeur de commande est directement la tension du moteur.
- 10 Donnez la fonction de transfert entre la tension et le courant. Mettez-la sous la forme $H(s) = \frac{K(s+p_1)}{(s+p_2)(s+p_3)}$ et donnez les valeurs de K , p_1 , p_2 et p_3 .
- 11 Représentez le lieu de Bode de ce système.
- 12 On fixe le zéro du correcteur de manière à compenser le pôle rapide du système. Déduisez-en la valeur de τ_i .
- 13 Donnez la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi simplifiée. Représentez l'allure de son lieu de Bode.
- 14 On règle le gain de sorte que la bande passante soit égale à $f_e/5$. Donnez la valeur de K_p correspondante.
- 15 Donnez les marges de phase et de gain du système.

C. Asservissement de vitesse

On cherche à réaliser un asservissement du vitesse par bouclage externe avec un correcteur PI $C_2(s) = K_{p2} \frac{1+\tau_{i2}s}{\tau_{i2}s}$ dont la commande est la consigne de courant de la boucle de courant. La grandeur de commande est la consigne de courant de la boucle interne.

- 16 Donnez la fonction de transfert entre le courant et la vitesse.
- 17 On suppose que la boucle de courant se comporte comme un système du premier ordre de pulsation de coupure égale à sa bande passante. Donnez la fonction de transfert correspondante.
- 18 Représentez le schéma de la boucle de correction faisant apparaître la grandeur de consigne, la mesure, la commande, le correcteur et le système à asservir.
- 19 Donnez la fonction de transfert en boucle ouverte du système. Représentez son lieu de Bode.
- 20 On fixe le zéro du correcteur de manière à compenser le pôle lent du système. Déduisez-en la valeur de τ_{i2} . Représentez sur le lieu de Bode le correcteur.
- 21 Donnez la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi simplifiée. Représentez son lieu de Bode.
- 22 On règle le gain de sorte que la marge de phase soit égale à 45° . Déterminez K_{p2} .
- 23 Donnez la marge de gain et la bande passante de l'asservissement réalisé.

5.3 La machine synchrone

On considère la machine synchrone à pôles lisses, à entrefer uniforme et en régime linéaire (absence de saturation magnétique). Le champ dans l'entrefer est considéré comme radial à tout instant et s'écrit $\vec{B}(\xi) = B(\xi)\vec{u}_r$ en un point situé à un angle ξ par rapport au repère du stator.

5.3.1 Rotor

Le rotor est constitué d'une roue polaire à $2p$ pôles alternativement nord et sud. En notant θ l'angle que fait un pôle nord du rotor avec le stator et sous l'hypothèse de la répartition sinusoïdale, le champ produit dans l'entrefer s'écrit :

$$B_r(\xi, t) = B_r^{\max} \cos(p\xi - p\theta). \quad (5.11)$$

Il s'agit d'un *champ tournant*; sa vitesse de rotation est $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Ce champ peut-être produit par des aimants permanents et dans ce cas, l'amplitude du champ est fixée. Il peut également être produit par un bobinage alimenté par un courant continu I_r ; dans ce cas, l'amplitude du champ est variable et réglable à travers I_r . Dans le cas linéaire, on pourra écrire $B_r^{\max} = \lambda_r I_r$.

5.3.2 Stator

Le stator est constitué d'un ensemble de trois bobinages à $2p$ pôles, placés dans des encoches, noté 'a', 'b' et 'c', régulièrement espacés et orientés dans les directions $\xi = 0$, $\xi = \frac{2\pi}{3p}$ et $\xi = \frac{4\pi}{3p}$, et respectivement parcourus par les courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique (hypothèse de la répartition spatiale sinusoïdale des champs), ils produisent respectivement dans l'entrefer trois champs de la forme :

$$B_a(\xi) = \lambda_s i_a(t) \cos(p\xi) \quad (5.12)$$

$$B_b(\xi) = \lambda_s i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.13)$$

$$B_c(\xi) = \lambda_s i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.14)$$

En absence de saturation (régime linéaire), le champ résultant est la somme des trois champs :

$$B_s(\xi, t) = \lambda_s \left(i_a(t) \cos(p\xi) + i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (5.15)$$

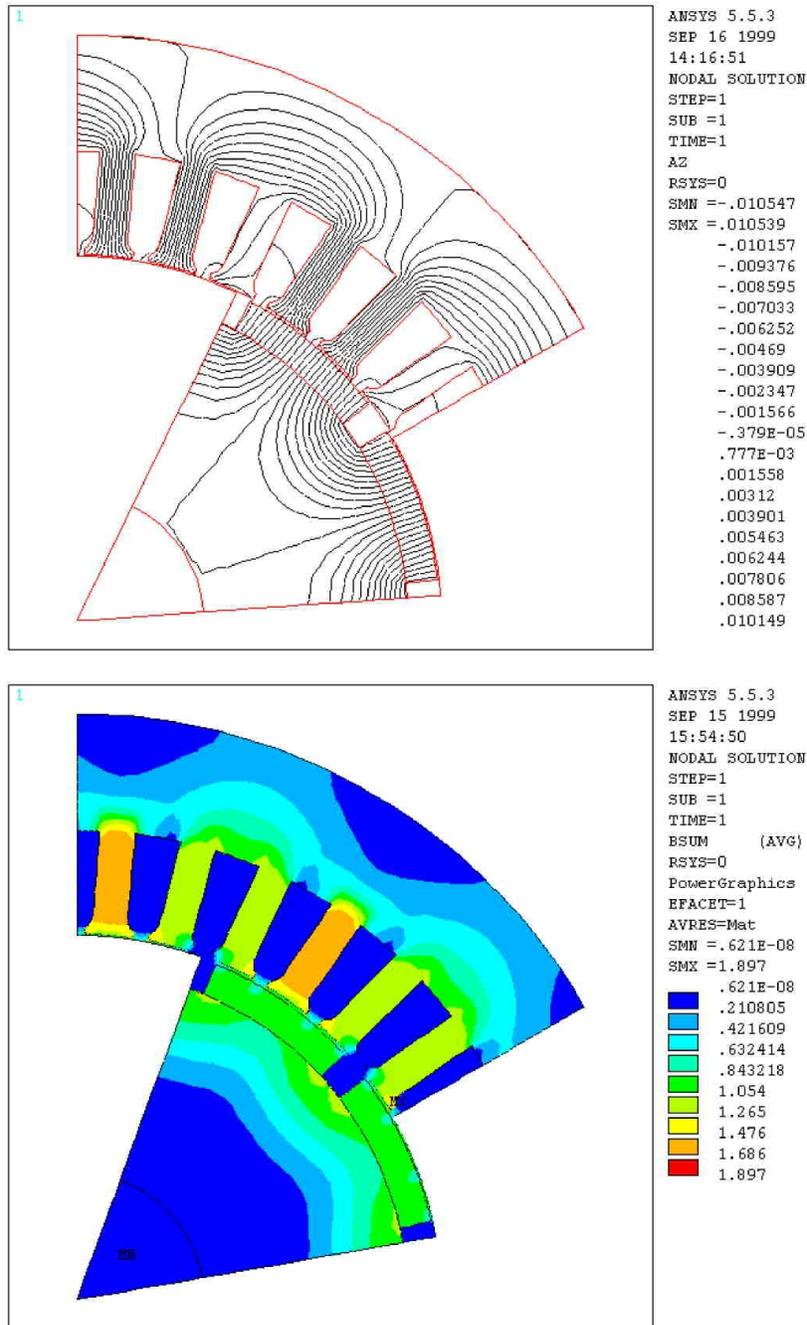


FIGURE 5.4 – Lignes de champ et induction magnétique dans une machine synchrone à aimants en surface à 6 paires de pôles (Source : laboratoire SATIE)

Dans le cas d'une alimentation sinusoïdale avec :

$$i_a(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.16)$$

$$i_b(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.17)$$

$$i_c(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.18)$$

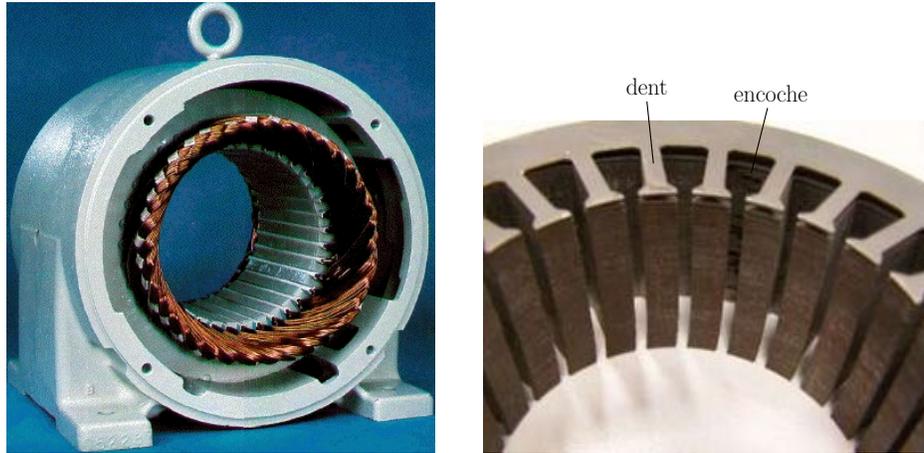


FIGURE 5.5 – Stator des machines synchrones et asynchrones [http://www.gel.usherbrooke.ca/leroux/projet/data/Moteur/chap9/Liens/09matp5a.gif], [http://uran.donetsk.ua/~masters/2006/eltf/romanova/library/280px-Stator_feuille.jpg]

le champ résultant est alors :

$$B_s(\xi, t) = \frac{3}{2} \lambda_s I_m \cos(p\xi - \omega t - \alpha). \quad (5.19)$$

Il s'agit d'un champ tournant, de même nature que celui produit par la roue du rotor. Sa vitesse de rotation $\frac{\omega}{p}$ est rigidement liée à la pulsation ω des courants. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Ferraris*. En fonctionnement normal, les champs du stator et du rotor tournent à la même vitesse, ce qui donne la relation suivante :

$$\Omega = \frac{\omega}{p}. \quad (5.20)$$

On dit qu'ils sont synchrones, d'où le nom de la machine. Par la suite, on supposera que les champs sont synchrones et que $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$. En moteur l'obligation d'avoir des courants du stator en phase avec la position du rotor donne lieu au principe de l'autopilotage. C'est-à-dire que pour maintenir un couple constant dans la machine, il faut alimenter la stator avec des courants dont la phase est déterminée par la position du rotor. Ainsi, c'est la machine elle-même qui pilote ses courants d'où le terme d'autopilotage.

5.3.3 Force électromotrice induite

Soit une spire placée au stator et orientée selon l'angle mécanique β constituée d'un conducteur aller placé à l'angle $\beta - \frac{\pi}{2p}$ et d'un conducteur retour placé à l'angle $\beta + \frac{\pi}{2p}$. Le champ étant radial, il est pratique de considérer comme surface une portion de cylindre délimitée par la spire, donnant ainsi $\vec{dS} = dS \vec{u}_r$ et $\vec{B} \cdot \vec{dS} = B \times dS$. Le champ étant uniforme selon la longueur de la machine, on peut donc considérer des éléments de surface qui sont des portions de cylindre d'angle $d\xi$, de longueur L et de surface $RLd\xi$ où R est le rayon moyen de l'entrefer. Calculons le flux produit par le champ du rotor dans cette spire :

$$\phi_{r\beta}(t) = \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} B_r(\xi, t) RLd\xi \quad (5.21)$$

$$= RLB_r^{\max} \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} \cos(p\xi - p\theta) d\xi \quad (5.22)$$

$$= \frac{2RLB_r^{\max}}{p} \cos(p\theta - p\beta) \quad (5.23)$$

De manière analogue, le flux produit par le champ du stator s'écrit :

$$\phi_{s\beta}(t) = \frac{2RLB_s^{\max}}{p} \cos(\omega t + \alpha - p\beta) \quad (5.24)$$

Pour obtenir le flux dans les trois phases du stator, il suffit de considérer respectivement $p\beta = 0$ pour la phase 'a', $p\beta = \frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'b' et $p\beta = -\frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'c', donnant ainsi un système triphasé équilibré de flux. Si on s'intéresse désormais à la phase 'a', on peut noter :

$$\underline{\phi}_{ra} = \phi_r^{\max} \exp(jp\theta) \quad (5.25)$$

ce qui signifie que le vecteur de Fresnel représentatif du flux tourne avec la position du rotor et pour le flux produit par le stator :

$$\underline{\phi}_{sa} = \phi_s^{\max} \exp(j(\omega t + \alpha)). \quad (5.26)$$

On remarque que le flux produit par le stator est en phase avec son propre courant. De plus, en régime linéaire (en absence de saturation magnétique), on peut considérer que l'amplitude du flux est proportionnelle à l'amplitude I_m du courant et écrire $\phi_s^{\max} = L_s I_m$, d'où :

$$\underline{\phi}_{sa} = L_s \underline{I}_a. \quad (5.27)$$

où \underline{I}_a est le vecteur de Fresnel représentatif de $i_a(t)$.

Le flux résultant $\underline{\phi}_a$ est la somme des flux produits par le stator et le rotor ($\underline{\phi}_a = \underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}$). La force électromotrice totale $e_a(t)$ s'écrit en convention générateur $e_a = -\frac{d\phi_a}{dt}$, soit en vecteurs :

$$\underline{E}_a = -j\omega \underline{\phi}_a \quad (5.28)$$

$$= -j\omega (\underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}) \quad (5.29)$$

$$= \underline{E}_{0a} - jL_s \omega \underline{I}_a \quad (5.30)$$

où \underline{E}_{0a} est la force électromotrice à vide de la phase 'a'.

5.3.4 Modèle de Behn-Eschenburg

En tenant compte du flux de fuites $\underline{\phi}_{fa} = L_{fa} \underline{I}_a$ et de la chute de tension résistive $R_s \underline{I}_a$ où L_{fa} et R_s sont respectivement l'inductance des fuites et la résistance d'induit du stator, on obtient :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_a - jL_s \omega \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (5.31)$$

En notant $X_s = (L_s + L_{fs})\omega$ la réactance synchrone, on obtient le modèle de Behn-Eschenburg permettant de modéliser les machines synchrones à pôles lisses en régime non saturé :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_{0a} - jX_s \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (5.32)$$

Dans ce modèle, on considère la vitesse et la fréquence comme constantes ; la force électromotrice dépend donc uniquement du courant d'excitation : $E_{0a} = E_0(I_r)$ où I_r est le courant d'excitation pour un rotor bobiné. Dans le cas d'un moteur à aimants, E_{0a} est constant égal à E_0 .

Naturellement, cette étude faite pour la phase 'a' reste valable pour les autres phases. Il faudra donc considérer que chacune des phases de la machine synchrone est modélisée par la mise en série d'une f.e.m. sinusoïdale, d'une réactance synchrone et d'une résistance. Afin de simplifier les équations, on pourra être amené à négliger la résistance de l'induit. On ne négligera cependant jamais la réactance synchrone qui est un paramètre essentiel de la machine ; en effet, il représente la réaction magnétique d'induit, c'est-à-dire l'effet des courants d'induit sur le champ dans l'entrefer, phénomène fondamental dans les machines tournantes. Remarquons d'ailleurs que cette RMI n'est pas compensable alors que c'était le cas pour le moteur à courant continu.

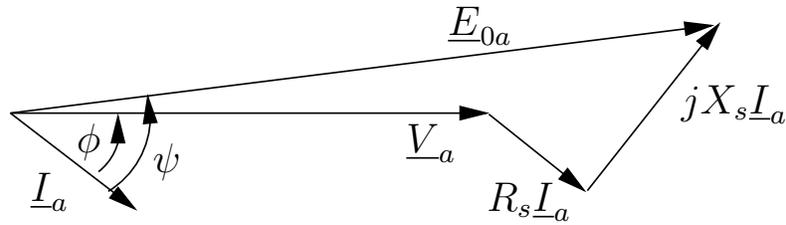


FIGURE 5.6 – Diagramme tension-courant pour une phase d’une machine synchrone (modèle de Behn-Eschenburg)

5.4 La machine asynchrone

On parle également de *moteur à induction*.

5.4.1 Constitution

Le stator d’un moteur asynchrone est identique à celui d’une machine synchrone. Il est donc constitué d’un enroulement triphasé à $2p$ pôles qui, lorsqu’il est parcouru par des courants à la pulsation ω , crée un champ tournant à la vitesse $\frac{\omega}{p}$.

Le rotor d’une machine asynchrone est une structure purement passive. Différentes technologies sont disponibles.

Rotor à cage

C’est la technologie de loin la plus répandue. Le rotor est constitué d’un ensemble de barres conductrices le plus souvent en aluminium et parfois en cuivre qui sont reliées entre elles à chaque extrémité par un anneau de court-circuit. Ce système de conducteurs de courant est coulé dans un empilage de tôles magnétiques qui favorisent le passage du champ magnétique entre les conducteurs, permettant ainsi la création de courants par induction magnétique.



FIGURE 5.7 – Coupe d’un rotor à cage (Source : http://fr.academic.ru/pictures/frwiki/67/Coupe_rotor_machine_asynchrone.jpg)

Rotor bobiné

Le rotor peut-être constitué d'une structure identique à celle du stator ; c'est-à-dire un systèmes polyphasé de conducteurs à $2p$ pôles. En utilisation courante, ces conducteurs sont court-circuités.

5.4.2 Principe de fonctionnement

Afin d'expliquer plus simplement le fonctionnement, considérons le cas d'un rotor bobiné. Les structures sont donc identiques au stator et au rotor ; on sait que la vitesse du champ produit par les courants est rigidement liée à leur pulsation.

Imaginons que le rotor tourne à la vitesse Ω . En se plaçant dans un référentiel lié au rotor, on voit le champ tournant circuler à la vitesse $\frac{\omega}{p} - \Omega$. Ce champ tournant donne donc naissance au rotor à des fem et à des courants à la pulsation ω_r où $\frac{\omega_r}{p} = \frac{\omega}{p} - \Omega$. Notons $\omega_r = g\omega$ où g est appelé *glissement*. On peut alors écrire $\Omega = (1 - g)\frac{\omega}{p}$. Un glissement unitaire correspond à l'arrêt ; un glissement nul correspond à une vitesse de rotation égale à la vitesse du champ tournant.

Les courants induits obéissent à la loi de Lenz, c'est-à-dire qu'il s'opposent aux variations de champ. Dans quelle situation le rotor ne voit-il pas de variation de champ ? Uniquement lorsqu'il tourne à la même vitesse que le champ tournant, c'est-à-dire pour un glissement nul. Dans ce cas précis, il n'y a pas de courant induit et donc pas de couple. Si la vitesse du rotor ralentit, devenant ainsi inférieure à celle du champ tournant, les courants induits agissent de sorte de ramener le rotor à la vitesse de synchronisme. Ils vont ainsi produire un couple positif. Au contraire, si la vitesse est supérieure à la vitesse du champ tournant, le couple produit par les courants induits est négatif. On peut donc postuler que le couple est de même signe que le glissement.

5.4.3 Modèle en régime permanent sinusoïdal

Modèle du transformateur tournant

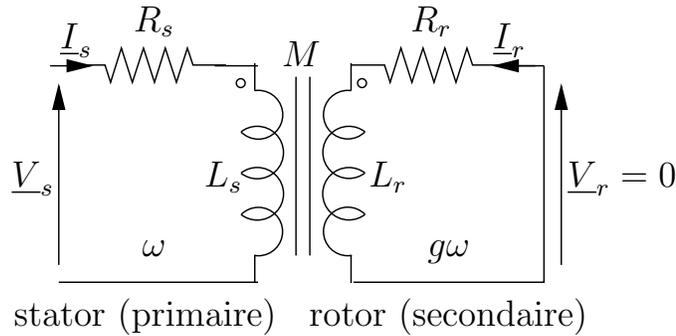


FIGURE 5.8 – Transformateur tournant (modèle équivalent valable en régime permanent sinusoïdal)

La machine asynchrone peut-être considérée comme un transformateur particulier dans lequel les grandeurs du rotor sont à la pulsation $g\omega$ (voir figure 5.8). En notant \underline{V}_s et \underline{V}_r les tensions d'une phase du stator et du rotor ; \underline{I}_s et \underline{I}_r les courants ; R_s et R_r les résistances ; L_s et L_r les inductances propres et M la mutuelle inductance, les équations s'écrivent :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega \underline{\phi}_s \quad (5.33)$$

$$\underline{V}_r = R_r \underline{I}_r + jg\omega \underline{\phi}_r \quad (5.34)$$

où les flux s'écrivent :

$$\underline{\phi}_s = L_s \underline{I}_s + M \underline{I}_r \quad (5.35)$$

$$\underline{\phi}_r = M \underline{I}_s + L_r \underline{I}_r \quad (5.36)$$

Le rotor étant court-circuité ($\underline{V}_r = 0$), l'équation de la tension du rotor s'écrit alors en divisant par g :

$$0 = \frac{R_r}{g} \underline{I}_r + j\omega \underline{\phi}_r \quad (5.37)$$

Les équations 5.33 et 5.35 à 5.37 sont celles d'un transformateur court-circuité au secondaire dont la résistance du secondaire serait $\frac{R_2}{g}$ (voir figure 5.9).

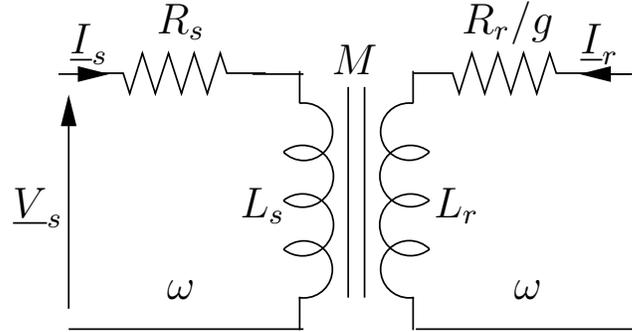


FIGURE 5.9 – Transformateur tournant avec secondaire ramené à la pulsation ω

Les modèles classiquement développés pour le transformateur sont valables. En ramenant l'ensemble des grandeurs au primaire du transformateur idéal, on obtient le schéma équivalent représenté sur la figure 5.10 où L_m est l'inductance magnétisante; R_f est la résistance des pertes fer; N_2 est l'inductance totale des fuites ramenées au stator; R_2 est la résistance du rotor ramenée au stator ($R_2 = R_r/m^2$ où m est le rapport de transformation). On a $\underline{I}_2 = m\underline{I}_2$. Chaque phase du moteur est donc équivalent à une impédance $\underline{Z}(g)$ dépendant du glissement.

$$\underline{Z}(g) = R_s + \frac{1}{\frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}} \quad (5.38)$$

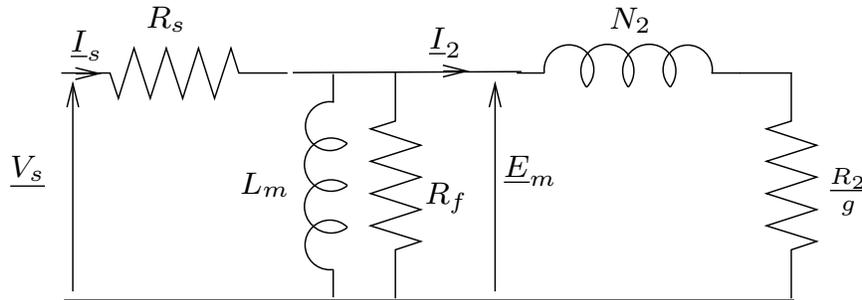


FIGURE 5.10 – Modèle du moteur asynchrone

Diagramme du cercle

Si on néglige la résistance du stator, le modèle s'écrit sous la forme d'une admittance $\underline{Y}(g) = \frac{1}{\underline{Z}(g)}$:

$$\underline{Y}(g) = \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}} \quad (5.39)$$

Pour une tension \underline{V}_s donnée, le lieu du courant lorsque g varie est $\underline{I}_s = \underline{V}_s \underline{Y}(g)$. En prenant $\underline{V}_s = V_s$ comme référence, cela donne $\underline{I}_s = V_s \underline{Y}(g)$.

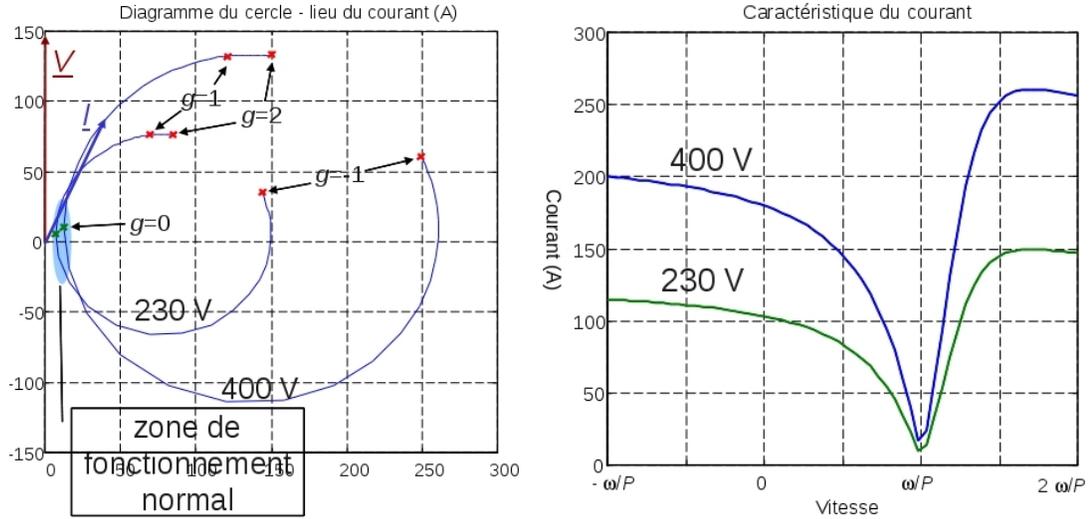


FIGURE 5.11 – Diagramme du cercle et evolution du courant en fonction de la vitesse

Cherchons maintenant à déterminer ce lieu. Le lieu de $\frac{R_2}{g}$ est l'axe réel. Le lieu de $jN_2\omega + \frac{R_2}{g}$ est une droite parallèle à l'axe réel et de partie imaginaire constante égale à $jN_2\omega$. Le lieu de $\frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}$ est un cercle passant par l'origine et le point d'affixe $-j/(N_2\omega)$ qui est symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Le lieu de $\underline{Y}(g)$ est un cercle de même taille que le cercle précédent mais translaté de $1/R_f - j/(L_m\omega)$. Le lieu du courant est alors obtenu par une dilatation de coefficient V_s . Sur ce cercle, on repère facilement les points correspondant aux glissements $g = 0$ et $g = \infty$ qui sont diamétralement opposés.

Exercice 21 (Diagramme du cercle). *En négligeant la résistance du stator, montrez que le lieu du vecteur de Fresnel du courant statorique est un cercle. Vous prendrez le soin de dessiner tous les ensembles intermédiaires vous permettant d'arriver à ce résultat. Précisez les points correspondant à $g = 0$ et $g = \infty$.*

5.4.4 Bilan de puissance

Puissance électromécanique

La résistance $\frac{R_2}{g}$ ne correspond pas uniquement à des pertes. En effet, elle inclut également la puissance électromagnétique qui est la puissance convertie. En décomposant $\frac{R_2}{g} = R_2 + \frac{1-g}{g}R_2$, on observe que la puissance dissipée dans $\frac{R_r}{g}$ se décompose en pertes Joule rotoriques $P_{jr} = 3R_2I_2^2 = 3R_rI_r^2$ et puissance électromécanique $P_{em} = 3\frac{1-g}{g}R_2I_2^2$. Avec $P_{em} = C_{em}\Omega$ et $\Omega = (1-g)\frac{\omega}{p}$, on obtient :

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2}{g} I_2^2 \quad (5.40)$$

qui est bien de même signe que le glissement.

La proportion entre les pertes Joule du rotor et la puissance électromécanique dépend du glissement : $P_{em} = \frac{1-g}{g}P_{jr}$. Si on note $P_2 = P_{em} + P_{jr}$ la puissance échangée entre le stator et le rotor, on a $P_{jr} = gP_2$ et $P_{em} = (1-g)P_2$.

Fonctionnement moteur

Le fonctionnement moteur correspond à $g \geq 0$. Le moteur absorbe l'énergie électrique au stator $P_a = 3V_sI_s \cos(\phi_s)$ et fournit l'énergie mécanique $P_u = C_{em}\Omega$ (on négligera les pertes mécaniques).

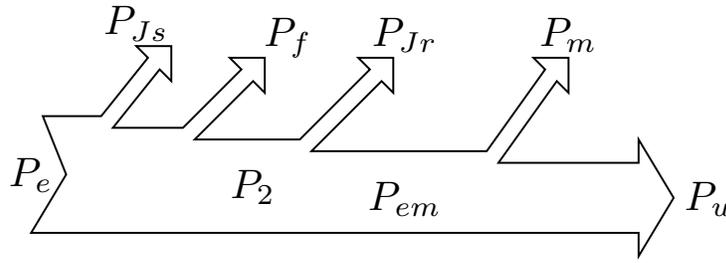


FIGURE 5.12 – Diagramme des puissances en fonctionnement moteur (P_e : puissance électrique absorbée ; P_{Js} : pertes Joule stator ; P_f : pertes fer ; P_2 : puissance transmise au rotor ; P_{Jr} : pertes Joule rotor ; P_{em} : puissance électro-mécanique ; P_m : pertes mécaniques ; P_u : puissance mécanique utile)

Les pertes sont :

- les pertes Joule au stator $P_{Js} = 3R_s I_s^2$,
- les pertes fer $P_f = 3 \frac{E_m^2}{R_f}$,
- les pertes Joule au rotor $P_{Jr} = 3R_r I_r^2$.

Le rendement est $\eta = \frac{P_u}{P_a}$. La conservation de l'énergie permet d'écrire $P_a = P_u + P_{Js} + P_f + P_{Jr}$. Si on ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on obtient $\eta = \frac{P_{em}}{P_2} = 1 - g$. Il s'agit d'un rendement idéalisé ; on a donc en pratique $\eta \leq 1 - g$.

A titre d'illustration, le rendement d'une série de moteurs asynchrones est donné sur la figure 5.4.4. On observe que les pertes diminuent régulièrement avec la puissance nominale.

Fonctionnement en génératrice

Le fonctionnement en génératrice correspond à $g \leq 0$. La génératrice absorbe l'énergie mécanique $P_a = C_{em} \Omega$ et fournit l'énergie électrique $P_u = 3V_s I_s \cos(\phi_s)$. Les pertes sont inchangées et le rendement s'écrit toujours $\eta = \frac{P_u}{P_a}$ avec $P_a = P_u + P_{Js} + P_f + P_{Jr}$. Dans le cas où ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on a $P_u = P_2$ et $P_a = P_{em}$ d'où $\eta = \frac{1}{1-g}$. Dans la pratique, on a $\eta \leq \frac{1}{1-g}$.

5.4.5 Expression du couple

Nous avons vu que le couple est de même signe que le glissement. Cherchons désormais à déterminer une expression analytique du couple. Pour cela, nous allons négliger les pertes Joule du stator ($R_s = 0$) afin de simplifier les calculs. Le module du courant I_2 est déterminé par :

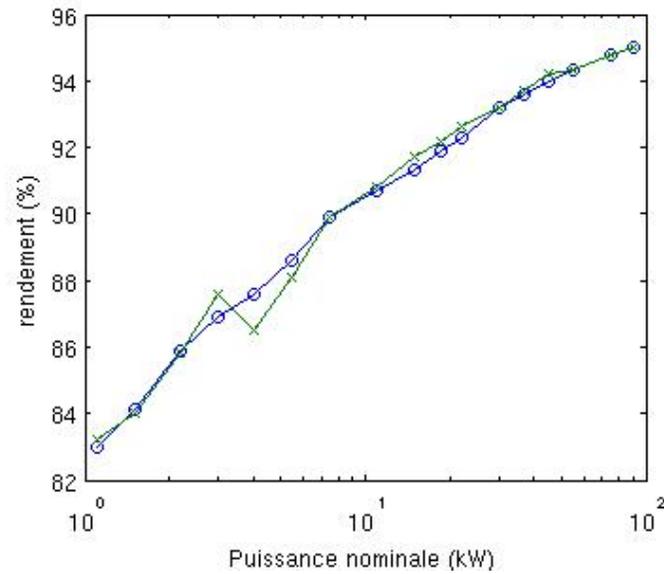
$$I_2^2 = \frac{V_s^2}{\left(\frac{R_r}{g}\right)^2 + (N_r \omega)^2} \quad (5.41)$$

En remplaçant dans l'équation 5.40, et en réarrangeant l'expression, on obtient :

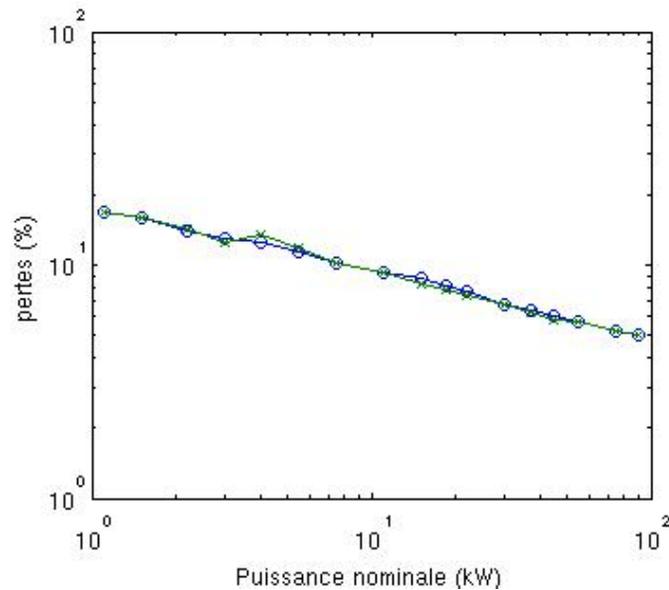
$$C_{em} = \frac{2C_m}{\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g}}. \quad (5.42)$$

où $g_m = \frac{R_2}{N_2 \omega}$ et $C_m = \frac{3pV_s^2}{2N_2 \omega^2}$. Il s'agit d'une fonction impaire qui présente un maximum pour $(g, C_{em}) = (g_m, C_m)$ et un minimum en $(g, C_{em}) = (-g_m, -C_m)$.

Sur la figure 5.14 est représentée l'allure du couple pour une machine à une paire de pôles d'une puissance nominale de 1,5 kW. On observe que le couple à l'arrêt ($g = 0$) est relativement faible par rapport au couple maximal. Dans la pratique, la machine est utilisée sur une plage de glissement relativement faible entre $-g_m$ et g_m . En dehors de cette plage, le rendement n'est plus acceptable.



a. rendement



b. pertes

FIGURE 5.13 – Pertes des machines asynchrones en alimentation sinusoïdale (moteur Leroy-Somer série FLS-ES; o : fonctionnement à 100 % de la puissance nominale; × : fonctionnement à 75 % de la puissance nominale).

Exercice 22 (Expression du couple de la machine asynchrone). *A partir du schéma équivalent d'une phase de la machine asynchrone représenté sur la figure 5.10, montrez que si on néglige la résistance du stator, on peut écrire le couple sous la forme $C_{em} = 2C_m / (\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g})$. Donnez les expressions de C_m et g_m en fonction des paramètres du modèle, de la tension d'alimentation et de la pulsation.*

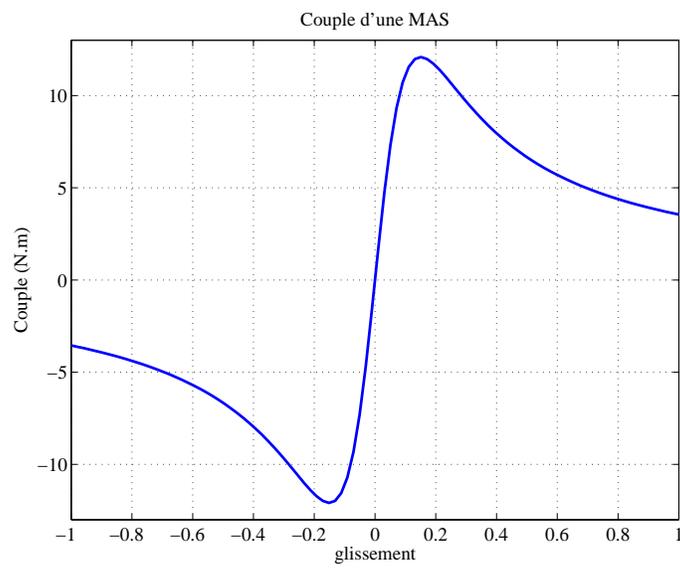


FIGURE 5.14 – Couple d'une machine asynchrone

Chapitre 6

Modèles dynamiques des machines à courant alternatif

6.1 Production d'un champ tournant

Le principe de base des machines électriques tournantes est de réaliser deux champs tournants, l'un par le rotor, l'autre par le stator ; l'attraction mutuelle de ces deux champs entraînant le rotor.

6.1.1 Champ produit dans l'entrefer par une spire

Soit une spire d'ouverture diamétrale, constituée d'un conducteur aller placé près de l'entrefer à l'angle $\alpha - \pi/2$ et d'un conducteur retour placé à l'angle $\alpha + \pi/2$. La spire étant parcourue par un courant i , un champ magnétique est donc présent dans l'entrefer. L'entrefer étant faible, on suppose le champ radial et on ne s'intéresse qu'à sa composante radiale que nous noterons B . Cette composante n'est pas uniforme sur l'entrefer et dépend de l'angle ξ repérant un point dans l'entrefer. Pour $\xi = \alpha$, on est dans l'axe de la bobine et le champ est maximal. Pour $\xi = \alpha - \pi/2$ et $\xi = \alpha + \pi/2$, la composante radiale du champ est nulle ; pour $\xi = -\alpha$, la composante radiale du champ est minimale et on a $B(-\alpha) = B(\alpha)$. On le voit donc, $B(\xi)$ a toutes les symétries du signal $\cos(\xi - \alpha)$.

Dans la suite, nous supposons que les champs produits par les enroulements ont des répartitions spatiales sinusoïdales. Ainsi, nous écrirons $B(\xi) = B_{\max} \cos(\xi - \alpha)$. Dans la pratique, cela est réalisé en multipliant le nombre de spires et en les répartissant dans différentes encoches.

Nous supposons également que la machine n'est pas saturée et que le champ magnétique est proportionnel au courant traversant la spire. Ainsi, on a $B_{\max} = \lambda i$. Notez bien que le maximum est un maximum sur l'entrefer qui peut varier au cours du temps si le courant varie : $B_{\max}(t) = \lambda i(t)$, d'où l'expression du champ produit par un bobinage monophasé à répartition sinusoïdale :

$$B(\xi, t) = \lambda i(t) \cos(\xi - \alpha) \quad (6.1)$$

Le champ produit ci-dessus a deux pôles (ou une paire de pôles) : un pôle nord et un pôle sud. Il est également possible de réaliser des champs ayant un nombre plus élevé de pôles en multipliant le nombre d'encoches et de conducteurs. Par exemple, on réalise un champ à 4 pôles en plaçant des conducteurs aller aux angles $\alpha - \pi/4$ et $\alpha + 3\pi/4$ et des conducteurs retour aux angles $\alpha + \pi/4$ et $\alpha - 3\pi/4$. Pour un enroulement monophasé à $2p$ pôles, le champ est :

$$B(\xi, t) = \lambda i(t) \cos(p(\xi - \alpha)). \quad (6.2)$$

De manière générale, le fonctionnement des machines ne dépend pas du nombre de paires de pôles et peut être expliqué en prenant $p = 1$. Lors d'une première lecture, il vous est donc conseillé de considérer le cas $p = 1$.

6.1.2 Champ produit dans l'entrefer par un bobinage triphasé

Le stator des machines à courant alternatif triphasées (synchrones et asynchrones) est constitué de trois bobinages à p paires de pôles, notés par les indices a , b et c . Notons i_a , i_b et i_c les courants les parcourant. Les trois bobinages sont répartis autour de l'entrefer. Par exemple, on a $\alpha_a = 0$, $\alpha_b = 2\pi/3p$ et $\alpha_c = -2\pi/3p$. En reprenant l'expression (6.2) du champ produit par un bobinage monophasé à répartition sinusoïdale et en l'appliquant pour chacun des trois bobinages, on obtient l'expression du champ total :

$$B(\xi, t) = \lambda (i_a(t) \cos(p\xi) + i_b(t) \cos(p\xi - 2\pi/3) + i_c(t) \cos(p\xi + 2\pi/3)) \quad (6.3)$$

Considérons maintenant le cas où les trois courants forment un système triphasé sinusoïdal équilibré :

$$i_a(t) = I_m \cos(\delta(t)) \quad (6.4)$$

$$i_b(t) = I_m \cos(\delta(t) - 2\pi/3) \quad (6.5)$$

$$i_c(t) = I_m \cos(\delta(t) + 2\pi/3) \quad (6.6)$$

avec par exemple $\delta(t) = \omega t + \delta_0$. Alors, le champ s'écrit :

$$B(\xi, t) = \lambda I_m (\cos(\delta(t)) \cos(p\xi) + \cos(\delta(t) - 2\pi/3) \cos(p\xi - 2\pi/3) + \cos(\delta(t) + 2\pi/3) \cos(p\xi + 2\pi/3)). \quad (6.7)$$

En utilisant la formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on obtient :

$$B(\xi, t) = \frac{1}{2} \lambda I_m (3 \cos(\delta(t) - \xi) + \cos(\delta(t) + \xi) + \cos(\delta(t) + \xi + 2\pi/3) + \cos(\delta(t) + \xi - 2\pi/3)). \quad (6.8)$$

En sachant que la somme de trois cosinus régulièrement décalés de $2\pi/3$ est nulle, on obtient que :

$$B(\xi, t) = \frac{3}{2} \lambda I_m \cos(\delta(t) - p\xi). \quad (6.9)$$

Analysons l'expression de ce champ. A un instant t fixé, il s'agit d'un champ ayant une répartition spatiale sinusoïdale en fonction de la variable d'espace ξ . A un endroit fixé de l'entrefer défini par une valeur de ξ , on voit un champ variant de manière sinusoïdale en fonction du temps. Si on cherche à suivre le point où le champ est maximal, c'est-à-dire où l'argument du cosinus est nul, on obtient $\xi = \delta(t)/p$. Il s'agit donc d'un champ tournant en fonction de la phase du courant. Pour un courant de pulsation ω , la vitesse de ce champ, aussi appelée vitesse de synchronisme est :

$$\Omega_s = \frac{\omega}{p} \quad (6.10)$$

Ce résultat est également connu sous le nom de *théorème de Ferraris*. On retiendra que la vitesse de synchronisme est un sous-multiple de la pulsation des courants; le rapport étant le nombre de paires de pôles. Pour une fréquence de 50 Hz, on obtient donc les vitesses de rotation de 3000, 1500, 1000, 750 tr/min... suivant le nombre de paires de pôles.

6.1.3 Roue polaire

Le rotor d'une machine synchrone est constitué d'une roue polaire à $2p$ pôles alternativement nord et sud. En notant θ l'angle que fait un pôle nord du rotor avec le stator et sous l'hypothèse de la répartition sinusoïdale, le champ produit dans l'entrefer s'écrit :

$$B_r(\xi, t) = B_r^{\max} \cos(p\xi - p\theta). \quad (6.11)$$

Il s'agit d'un *champ tournant*; sa vitesse de rotation est $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Ce champ peut-être produit par des aimants permanents et dans ce cas, l'amplitude du champ est fixée. Il peut également être produit par un bobinage alimenté par un courant continu I_r ; dans ce cas, l'amplitude du champ est variable et réglable à travers I_r . Dans le cas linéaire, on pourra écrire $B_r^{\max} = \lambda_r I_r$.

6.1.4 Flux traversant une spire

Considérons qu'un champ de répartition sinusoïdale est produit dans l'entrefer : $B(\xi) = B_{\max} \cos(\xi - \alpha)$. Une spire d'ouverture diamétrale, d'axe β faisant avec l'axe du champ un angle $\alpha - \beta$ est traversée par le champ magnétique. Le flux de ce champ peut-être calculé sur la surface d'un demi cylindre de rayon R et de longueur L s'appuyant sur la spire :

$$\Phi = \int_{\xi=\beta-\pi/2}^{\beta+\pi/2} B(\xi)LRd\xi \quad (6.12)$$

ce qui donne $\Phi = 2LRB_{\max} \cos(\beta - \alpha)$.

6.1.5 Mutuelle inductance entre deux spires décalées

Soit deux spires, d'ouverture diamétrale, placées soit au rotor, soit au stator et décalées d'un angle α variable. Ces spires échangent du champ magnétique. Pour un angle $\alpha = 0$, les spires sont dans le même sens et leur mutuelle inductance est maximale. Pour un angle $\alpha = \pi/2$, les spires sont en quadrature ; elles n'échange plus de champ et leur mutuelle inductance est donc nulle. Pour $\alpha = \pi$, les spires sont en sens inverse. Elles échangent un champ dans le sens inverse et on a donc $M(\pi) = -M(0)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique, on suppose que la mutuelle inductance s'écrit :

$$M(\alpha) = M_{\max} \cos(\alpha) \quad (6.13)$$

6.2 Machine synchrone

On se limitera au cas des machines synchrones triphasées à pôles lisses non saturées.

6.2.1 Modèle triphasé

Flux propre du stator

Le stator est composé de 3 enroulements à $2p$ pôles comme décrit au paragraphe 6.1.2. Ces trois enroulements sont identiques. Notons L_{s0} l'inductance propre d'une phase du stator. Si on néglige les fuites, la mutuelle inductance entre 2 enroulements séparés d'un angle $2\pi/3p$ est $L_{s0} \cos(2\pi/3) = -L_{s0}/2$. Ainsi, le flux produit par les courant du stator sur lui-même s'écrit :

$$\phi_{sa}(t) = L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (6.14)$$

$$\phi_{sb}(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) + L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (6.15)$$

$$\phi_{sc}(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) + L_{s0}i_c(t) \quad (6.16)$$

Les fuites diminuent le flux produit par chaque enroulement. En notant l_f l'inductance de fuite, les flux de fuite sont respectivement $l_f i_a(t)$, $l_f i_b(t)$ et $l_f i_c(t)$. On obtient donc :

$$\phi_{sa}(t) - l_f i_a(t) = L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (6.17)$$

$$\phi_{sb}(t) - l_f i_b(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) + L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (6.18)$$

$$\phi_{sc}(t) - l_f i_c(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) + L_{s0}i_c(t) \quad (6.19)$$

En notant $L_s = l_f + L_{s0}$ l'inductance propre du stator et $M_s = -\frac{1}{2}L_{s0}$ la mutuelle inductance entre deux enroulements, les flux s'écrivent alors :

$$\phi_{sa}(t) = L_s i_a(t) + M_s i_b(t) + M_s i_c(t) \quad (6.20)$$

$$\phi_{sb}(t) = M_s i_a(t) + L_s i_b(t) + M_s i_c(t) \quad (6.21)$$

$$\phi_{sc}(t) = M_s i_a(t) + M_s i_b(t) + L_s i_c(t) \quad (6.22)$$

ce qui se met sous forme vectorielle

$$\phi_{3s} = \mathcal{M} \mathbf{i}_3 \quad (6.23)$$

avec $\phi_{3s} = [\phi_{sa} \ \phi_{sb} \ \phi_{sc}]^T$ et $\mathbf{i}_3 = [i_a \ i_b \ i_c]^T$ et :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Flux du stator produit par le rotor

Le rotor est assimilé à un enroulement à $2p$ pôles d'axe $\theta(t)$. Il fait donc un angle avec les trois bobinages du stator respectivement de θ , $\theta - 2\pi/3p$ et $\theta - 4\pi/3p$. En notant ϕ_f le flux maximal reçu du rotor par un enroulement du stator, le flux créé au stator par le rotor s'écrit :

$$\phi_{ra}(t) = \phi_f \cos(p\theta) \quad (6.25)$$

$$\phi_{rb}(t) = \phi_f \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad (6.26)$$

$$\phi_{rc}(t) = \phi_f \cos(p\theta + 2\pi/3) \quad (6.27)$$

ce qui se met sous forme vectorielle

$$\phi_{3r} = \begin{bmatrix} \phi_{ra} \\ \phi_{rb} \\ \phi_{rc} \end{bmatrix} = \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - 2\pi/3) \\ \cos(p\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Flux totaux

Le flux total reçu au stator est la somme du flux propre produit au stator et du flux produit au rotor, soit $\phi_3 = \phi_{3s} + \phi_{3r}$. En notant L_r l'inductance du rotor avec $\phi_f = L_r i_r$, on peut écrire :

$$\phi_3 = \mathcal{M} \mathbf{i}_3 + L_r \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - 2\pi/3) \\ \cos(p\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

On peut compléter cette équation en écrivant le flux du rotor :

$$\phi_r = L_r [\cos(p\theta) \ \cos(p\theta - 2\pi/3) \ \cos(p\theta + 2\pi/3)] \mathbf{i}_3 + L_r i_r \quad (6.30)$$

En notant $\phi = [\phi_s^T \ \phi_r]^T$ le vecteur de l'ensemble des flux et $\mathbf{i} = [\mathbf{i}_3 \ i_r]$ le vecteur de l'ensemble des courants, on peut réécrire le flux :

$$\phi = \mathcal{L}(\theta) \mathbf{i} \quad (6.31)$$

avec :

$$\mathcal{L}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M} & M_{sr}(\theta) \\ \hline M_{sr}^T(\theta) & L_r \end{array} \right] \quad (6.32)$$

avec

$$M_{sr}(\theta) = L_r [\cos(p\theta) \ \cos(p\theta - 2\pi/3) \ \cos(p\theta + 2\pi/3)]^T. \quad (6.33)$$

Équation de la tension

En notant R_s la résistance d'un enroulement du stator (on suppose que cette résistance est identique sur les trois phases), les équations aux tensions s'écrivent :

$$v_a(t) = R_s i_a(t) + \frac{d\phi_a}{dt} \quad (6.34)$$

$$v_b(t) = R_s i_b(t) + \frac{d\phi_b}{dt} \quad (6.35)$$

$$v_c(t) = R_s i_c(t) + \frac{d\phi_c}{dt} \quad (6.36)$$

ce qui se met sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}_3 = R_s \mathbf{i}_3 + \frac{d\phi_3}{dt} \quad (6.37)$$

avec $\mathbf{v}_3 = [v_a \ v_b \ v_c]^T$.

Expression du couple

En reprenant l'expression générale du couple (2.105) et en l'appliquant à l'expression du flux (6.32), on obtient :

$$C = \mathbf{i}_3^T p \phi_f \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

ce qui se réécrit :

$$C = p \phi_f \left(i_a(t) \sin(p\theta) + i_b(t) \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) + i_c(t) \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \right) \quad (6.39)$$

6.2.2 Modèle diphasé de la machine synchrone

Transformation de Concordia

Au vu de l'expression du couple développée ci-dessus, il s'avère qu'une composante homopolaire¹ intervenant simultanément sur les trois phases du courant ne produirait pas de couple². Parmi les trois courants, il n'y a donc que deux degrés de liberté et non trois comme on pourrait le croire. Nous allons donc présenter un changement de variable permettant de se ramener à deux courants au lieu de trois, ce qui aura le mérite de nettement simplifier les équations. Ce modèle, nous le verrons ressembler à celui d'une machine diphasée.

Le vecteur des trois cosinus intervenant dans l'expression des flux ainsi que dans le couple peut se réécrire de la manière suivante en fonction de $\cos(p\theta)$ et de $\sin(p\theta)$:

$$\begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Notons C_{32} cette matrice de passage, aussi appelée matrice de Concordia d'après le nom d'une scientifique ayant travaillé sur le sujet au début du vingtième siècle.

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

1. On appelle composante homopolaire une composante qui intervient simultanément sur les trois phases, sans déphasage.

2. En effet, ajouter i_0 à chacun des trois courants revient à ajouter au couple $p\phi_f i_0 (\sin(p\theta) + \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}))$ ce qui est nul puisque la somme de trois sinus déphasés de $2\pi/3$ est nulle.

Notons que cette matrice a quelques propriétés intéressantes qui permettront de simplifier les expressions :

$$C_{32}C_{32}^T = \mathcal{I}_3 \quad (6.42)$$

et

$$C_{32}^TC_{32} = \frac{3}{2}\mathcal{I}_2 \quad (6.43)$$

Exercice 23 (Propriétés de la matrice de Concordia). *Montrez les propriétés de la matrice de Concordia présentées ci-dessus.*

La transformation de Concordia consiste à travailler à partir de deux composantes notées avec les indices α et β au lieu de trois. Ainsi, pour les courants, définissons i_α et i_β tels que :

$$\mathbf{i}_3 = C_{32} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

et notons $\mathbf{i}_2 = [i_\alpha \ i_\beta]^T$. On vérifie bien que la somme des courants $i_a + i_b + i_c$ est nulle puisque la somme des éléments des deux colonnes de C_{32} est bien nulle. Ainsi, cette transformation permet de régler les courants triphasés tout en maintenant leur somme nulle.

En multipliant à gauche la relation précédente par C_{32}^T et en utilisant la relation 6.43, on obtient la relation inverse :

$$\mathbf{i}_2 = \frac{2}{3}C_{32}^T\mathbf{i}_3 \quad (6.45)$$

qui permet d'obtenir des composantes diphasées à partir des composantes triphasées.

Expression des flux

Le flux créé par le rotor au stator s'écrit alors :

$$\phi_{3r} = \phi_f C_{32} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Notons $\phi_{2r} = [\phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta}]$ le vecteur des composantes diphasées du flux du stator produit par le rotor et définis par $\phi_{3r} = C_{32}\phi_{2r}$. En remplaçant dans l'équation ci-dessus ϕ_{3r} par $C_{32}\phi_{2r}$ puis en multipliant à gauche par C_{32}^T on obtient :

$$C_{32}^TC_{32}\phi_{2r} = \phi_f C_{32}^TC_{32} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

En utilisant la propriété 6.43, on obtient finalement :

$$\phi_{2r} = \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Reprenons l'expression 6.23 du flux propre du stator. En notant $\phi_{2s} = [\phi_{s\alpha} \ \phi_{s\beta}]^T$ le vecteur des composantes diphasées du flux propre du stator, on obtient $C_{32}\phi_{2s} = \mathcal{M}C_{32}\mathbf{i}_2$. En multipliant à gauche par C_{32}^T , on obtient alors $C_{32}^TC_{32}\phi_{2s} = \frac{3}{2}\phi_{2s} = C_{32}^T\mathcal{M}C_{32}\mathbf{i}_2$. Cette dernière équation se simplifie grandement en vérifiant que $C_{32}^T\mathcal{M}C_{32} = \frac{3}{2}(L_s - M_s)\mathcal{I}_2$, ce qui donne $\phi_{2s} = (L_s - M_s)\mathbf{i}_2$. Par la suite, on notera $L_{cs} = L_s - M_s$ que l'on appelle *inductance propre cyclique* du stator.

En tenant compte du flux propre et du flux mutuel, on obtient finalement :

$$\phi_2 = L_{cs}\mathbf{i}_2 + \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Exercice 24. *Montez que $C_{32}^T\mathcal{M}C_{32} = \frac{3}{2}L_{cs}\mathcal{I}_2$*

Équations aux tensions

Reprenons l'équation 6.37 aux tensions. En remplaçant \mathbf{v}_3 par $C_{32}\mathbf{v}_2$, \mathbf{i}_3 par $C_{32}\mathbf{i}_2$ et ϕ_3 par $C_{32}\phi_2$ puis en multipliant à gauche les deux membres par C_{32}^T , on obtient l'équation suivante :

$$\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + \frac{d\phi_2}{dt} \quad (6.50)$$

Expression du couple

Reprenons l'expression 6.38 du couple. On peut faire intervenir la matrice C_{32} pour simplifier le vecteur des trois sinus. En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = C_{32} \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

On obtient alors :

$$C = p\phi_f \mathbf{i}_2^T C_{32}^T C_{32} \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

ce qui se simplifie en :

$$C = \frac{3}{2} p\phi_f \mathbf{i}_2^T \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

où encore $C = \frac{3}{2} p\phi_f (i_\alpha \sin(p\theta) - i_\beta \cos(p\theta))$.

Modèle d'état

A partir des différentes équations déterminées ci-dessus (expressions du flux, équations aux tensions et expression du couple), il est possible d'écrire un modèle d'état permettant de simuler la machine synchrone ou encore de synthétiser une loi de commande. Les deux dérivées intervenant dans ces équations sont celles des flux ϕ_α et ϕ_β . On peut donc logiquement choisir ces grandeurs comme variables d'état ($x = \phi_2$). L'équation d'état vient alors de l'équation de la tension $\frac{d\phi_2}{dt} = \mathbf{v}_2 - R_s \mathbf{i}_2$; mais encore faut-il écrire la dérivée de l'état en fonction de l'entrée du système et de l'état. Les courants et les flux sont liés par l'expression 6.49 qui fait également intervenir la position θ du rotor. Considérons θ comme une entrée du système. On peut alors déterminer le courant à partir de l'état et de l'entrée par la relation $\mathbf{i}_2(\phi_2, \theta) = \frac{1}{L_s - M_s} (\phi_2 - \phi_f [\cos(p\theta) \sin(p\theta)]^T)$. La tension \mathbf{v}_2 fait également partie des entrées du système; l'équation d'état est finalement $\frac{d\phi_2}{dt} = \mathbf{v}_2 - R_s \mathbf{i}_2(\phi_2, \theta)$.

En sortie, on donnera généralement les courants diphasés et le couple (on peut également sortir les flux). On utilisera également les matrices de Concordia C_{32} et C_{32}^T afin de passer des grandeurs triphasées aux grandeurs diphasées.

La position du rotor, considérée comme une entrée du système peut-être calculée à partir de l'équation dynamique. La vitesse est la dérivée de la position : $\frac{d\theta}{dt} = \Omega(t)$ où la vitesse de rotation $\Omega(t)$ est donnée par l'équation mécanique $J \frac{d\Omega}{dt} = C - C_r$ faisant intervenir l'inertie J des parties tournantes, le couple moteur C et le couple résistant C_r considéré comme une entrée du système mécanique.

Exercice 25 (Modèle de simulation de la machine synchrone).

Donnez un schéma de simulation de la machine synchrone sous forme de schéma-bloc faisant apparaître deux blocs : un bloc contenant l'équation électrique d'entrées les tensions et la position du rotor et comme sorties les courants et le couple; et un second bloc d'entrée le couple moteur et le couple résistant et de sortie la position et la vitesse du moteur.

Il est également possible de choisir les courants comme variables d'état à la place des flux.

Exercice 26 (Modèle de la machine synchrone basé sur les courants). *Donnez les équations d'état de la machine synchrone où les courants diphasés du stator sont choisis comme variables d'état.*

Commande vectorielle

Afin de maintenir un couple constant lorsque le rotor tourne, il est nécessaire d'imposer au stator un champ tournant à la même vitesse que le rotor. Choisissons par exemple les courants sous la forme :

$$i_\alpha(t) = I_m \cos(p\theta(t) - \delta) \quad (6.54)$$

$$i_\beta(t) = I_m \sin(p\theta(t) - \delta) \quad (6.55)$$

Le couple s'écrit alors $C = \frac{3}{4}p\phi_f I_m \sin(\delta)$. Pour une amplitude des courants I_m fixée, le couple est une fonction sinusoidale du déphasage δ . Il apparaît clairement que le couple est maximal pour $\delta = \pi/2$. Afin d'utiliser la machine au mieux de son efficacité (en réduisant ses pertes au minimum), on choisit comme stratégie de commande de fixer $\delta = \pi/2$ et de réguler le couple en réglant I_m . Cela peut se faire par deux boucles de courant sur i_α et i_β ayant comme référence respectivement $i_\alpha^* = I_m^* \cos(p\theta - \pi/2)$ et $i_\beta^* = I_m^* \sin(p\theta - \pi/2)$ avec $I_m^* = \frac{4C^*}{3p\phi_f}$ où C^* est la valeur de référence du couple.

On utilise généralement des correcteurs PI. Afin de les régler, il importe de connaître le transfert entre la tension et le courant. Développons donc l'équation 6.50 de la tension en remplaçant le flux par son expression 6.49. On obtient :

$$\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + \phi_f \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ -\sin(p\theta) \end{bmatrix} \right) \quad (6.56)$$

$$= R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + p\Omega\phi_f \begin{bmatrix} -\sin(p\theta) \\ \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme $\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + \mathbf{e}_2$ où \mathbf{e}_2 regroupe les termes de force électromotrice induites par la rotation du rotor :

$$\mathbf{e}_2 = p\Omega\phi_f \begin{bmatrix} -\sin(p\theta) \\ \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Le modèle du système peut-être représenté comme suit : pour chaque composante, à la tension de commande, on retranche la fem avant de passer la différence dans la fonction de transfert du premier ordre $1/(R + L_{cs}p)$; la sortie donnant le courant. Afin d'améliorer les résultats de l'asservissement, il est possible d'estimer les termes de fem et de les compenser dans la commande.

L'inconvénient de cette stratégie de commande est qu'elle travaille avec des consignes sinusoidales. Ainsi, on n'atteint pas de régime permanent constant et une erreur de suivi risque d'altérer la qualité de la régulation. Pour pallier ce problème, on peut choisir d'effectuer un changement de repère de manière à se placer dans le repère du rotor grâce à une matrice de rotation.

6.2.3 Modèle de Park de la machine synchrone

Transformation de Park

Soit $R(x)$ la matrice de rotation d'angle x :

$$R(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Cette matrice présente un certain nombre de propriétés.

Propriété 5 (Propriétés de la matrice de rotation).

- $R^{-1}(x) = R^T(x) = R(-x)$
- $\frac{d}{dx}(R(x)) = R(x + \pi/2)$
- $R(x + y) = R(x)R(y)$

La matrice $R(p\theta)$ permet de passer du repère du stator au repère du rotor. Pour le vecteur $\mathbf{i}_2 = [i_\alpha \ i_\beta]^T$, définissons les grandeurs (d,q) $\mathbf{i}_{dq} = [i_d \ i_q]^T$ définies par $\mathbf{i}_2 = R(p\theta)\mathbf{i}_{dq}$; la transformation inverse étant $\mathbf{i}_{dq} = R(-p\theta)\mathbf{i}_2$. De la même manière, on définit les composantes (d,q) du flux et de la tension.

La composition de la transformation de Concordia et de la matrice de rotation est appelée transformation de Park du nom du scientifique qui a travaillé sur le domaine. On note cette matrice $P(p\theta) = C_{32}R(p\theta)$.

Équation du flux

En remplaçant dans l'équation 6.49 des flux ϕ_2 par $R(p\theta)\phi_{dq}$, \mathbf{i}_{dq} par $R(p\theta)\mathbf{i}_{dq}$, on obtient :

$$R(p\theta)\phi_{dq} = L_{cs}R(p\theta)\mathbf{i}_{dq} + \phi_f R(p\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

En multipliant les deux membre à gauche par $R(-p\theta)$, on obtient l'expression simplifiée du flux :

$$\phi_{dq} = L_{cs}\mathbf{i}_{dq} + \phi_f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Cette expression montre bien l'intérêt de la transformation : l'axe d, appelé axe direct, est orienté dans la direction du flux du rotor. L'axe q, appelé axe en quadrature, est orienté orthogonalement au flux du rotor. Ainsi, le flux ϕ_f du rotor n'intervient que sur la composante d du flux du stator.

Équation de la tension

En reprenant les équations 6.50 de la tension et en y faisant le même changement de variable que pour l'équation des flux, on obtient :

$$R(p\theta)\mathbf{v}_{dq} = R_s R(p\theta)\mathbf{i}_{dq} + \frac{d}{dt}(R(p\theta)\phi_{dq}) \quad (6.62)$$

Le dernier terme de cette équation est la dérivée d'un produit et se développe comme suit :

$$\frac{d}{dt}(R(p\theta)\phi_{dq}) = \frac{d}{dt}(R(p\theta))\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (6.63)$$

$$= \frac{dp\theta}{dt} \frac{d}{dp\theta}(R(p\theta))\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (6.64)$$

$$= p\Omega R(p\theta + \frac{\pi}{2})\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (6.65)$$

$$(6.66)$$

où Ω est la vitesse de rotation du rotor. En multipliant à gauche par $R(-p\theta)$, on obtient l'équation de la tension :

$$\mathbf{v}_{dq} = R_s\mathbf{i}_{dq} + p\Omega R(\frac{\pi}{2})\phi_{dq} + \frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (6.67)$$

Le changement de repère a fait apparaître un terme $p\Omega R(\frac{\pi}{2})\phi_{dq}$ dépendant de la vitesse de rotation et du flux du rotor. Il s'agit d'une force électromotrice induite par la rotation du rotor.

Expression du couple

Reprenons l'expression 6.53 du couple. La partie de droite peut se transformer de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} = -R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

On obtient donc

$$C = -\frac{3}{2}p\phi_f \mathbf{i}_{dq}^T R^T(p\theta) R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

qui se simplifie en :

$$C = -\frac{3}{2}p\phi_f i_q \quad (6.70)$$

On retrouve là un résultat classique de la commande des machines synchrones qui énonce que seule la composante en quadrature avec le flux du rotor produit du couple.

Modèle d'état

Comme pour le modèle en (α, β) , il est possible d'écrire le modèle d'état en prenant comme variables d'état soit les flux, soit les courants.

Exercice 27 (Modèle d'état dans le repère de Park). *Donnez les équations d'état du modèle de Park de la machine synchrone dans les deux cas suivants :*

- en prenant les composantes du courant comme variables d'état,
- en prenant les composantes du flux comme variables d'état (vous penserez à préciser la relation permettant d'écrire les courants à partir des flux).

Commande vectorielle du couple

Après changement de repère, le couple ne dépend plus que de la composante i_q du courant du stator. On règle donc le couple en réglant ce courant tout en asservissant i_d à une consigne nulle. On effectue donc un asservissement du courant i_q à une valeur $i_q^* = \frac{4C^*}{3p\phi_f}$ où C^* est la valeur de référence du couple.

Le modèle entre la tension et le courant s'obtient en reprenant les équations de la tension et en remplaçant les flux par leurs expressions. On obtient alors :

$$\mathbf{v}_{dq} = R_s \mathbf{i}_{dq} + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_{dq}}{dt} + \mathbf{e}_{dq} \quad (6.71)$$

où \mathbf{e}_{dq} est un terme de fem défini par :

$$\mathbf{e}_{dq} = \begin{bmatrix} -p\Omega\phi_q \\ p\Omega\phi_d \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Pour chacune des deux phase, le modèle est donc composé d'un sommateur où la fem est retranchée à la tension d'alimentation; la différence entre ensuite dans une fonction de transfert $\frac{1}{R+L_{cs}}$ pour donner en sortie le courant. Le cas échéant, les termes de fem peuvent être estimés et compensés par la commande.

6.2.4 Régime permanent sinusoïdal

Notations complexes

A partir des grandeurs $(x_\alpha(t), x_\beta(t))$ du modèle de Concordia, introduisons le vecteur :

$$\underline{x}_2(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t). \quad (6.73)$$

La transformation permettant de passer des composantes triphasées (x_a, x_b, x_c) au nombre complexe \underline{x}_2 est appelée transformation de Clarke. En appliquant cette transformation aux différentes grandeurs (tension, courant et flux), on peut réécrire les équations de la machine synchrone de manière plus compacte. L'équation de la tension s'écrit alors :

$$\underline{v}_2(t) = R_s \underline{i}_2(t) + \frac{d\phi_2(t)}{dt}; \quad (6.74)$$

l'équation du flux s'écrit :

$$\underline{\phi}_2(t) = L_{cs}\underline{i}_2(t) + \phi_f \exp(jp\theta(t)). \quad (6.75)$$

En notant $\underline{\phi}_f(t) = \phi_f \exp(jp\theta(t))$ le vecteur du flux d'excitation, on obtient :

$$\underline{\phi}_2(t) = L_{cs}\underline{i}_2(t) + \underline{\phi}_f(t). \quad (6.76)$$

Le couple s'écrit :

$$C(t) = \frac{3}{2}p \operatorname{Im}(\underline{i}_2^*(t) \underline{\phi}_f(t)). \quad (6.77)$$

Régime sinusoïdal

En régime permanent sinusoïdal équilibré, les grandeurs triphasées s'écrivent sous la forme :

$$x_a(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (6.78)$$

$$x_b(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.79)$$

$$x_c(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \quad (6.80)$$

où X est la valeur efficace. Pour la phase 'a', on définit le vecteur de Fresnel comme le nombre complexe suivant :

$$\underline{X}_a = X \exp(j\alpha). \quad (6.81)$$

En appliquant la transformation de Concordia (6.41) à ces grandeurs triphasées, on obtient :

$$x_\alpha(t) = \frac{3}{2}X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (6.82)$$

$$x_\beta(t) = \frac{3}{2}X\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.83)$$

ou encore :

$$\underline{x}_2(t) = \frac{3}{2}X \exp(j(\omega t + \alpha)) = \frac{3}{2}\underline{X}_a \exp(j\omega t) \quad (6.84)$$

On observe donc que les grandeurs diphasées complexes (composantes de Clarke) sont identiques aux grandeurs de Fresnel (ou amplitude complexe) de la première phase, à un facteur multiplicatif $\frac{3}{2} \exp(j\omega t)$ près.

Par ailleurs, le modèle dynamique peut s'écrire plus simplement en notant qu'en régime sinusoïdal, la dérivée est équivalente à une multiplication par $j\omega$. L'équation de la tension s'écrit alors :

$$\underline{v}_2(t) = R_s \underline{i}_2(t) + jL_{cs}\omega \underline{i}_2(t) + j\omega \underline{\phi}_f(t). \quad (6.85)$$

Dans cette équation, on reconnaît que le modèle en régime permanent est composé de la mise en série de trois termes : une résistance, une inductance et une force-électromotrice $j\omega \underline{\phi}_f$. Ce modèle est également valable avec les grandeurs de Fresnel relatives à la première des trois phases :

$$\underline{V}_a = R_s \underline{I}_a + jL_{cs}\omega \underline{I}_a + \underline{E}_a \quad (6.86)$$

où

$$\underline{E}_a = j\omega \underline{\Phi}_f \quad (6.87)$$

et $\underline{\Phi}_f = \frac{2}{3}\underline{\phi}_f$. Il s'agit du modèle de Behn-Eschenburg classiquement utilisé pour l'analyse du régime sinusoïdal des machines synchrones à pôles lisses non saturée (cf. paragraphe 5.3.4).

6.2.5 Alternateur

On s'intéresse ici au fonctionnement d'un alternateur triphasé débitant sur un réseau modélisé par la mise en série d'une fem sinusoïdale de valeur efficace E_r , d'une résistance R_r et d'une inductance L_r . L'axe de l'alternateur est entraîné par une turbine délivrant un couple C_t .

Utilisons les conventions générateur pour l'alternateur (changement par rapport au point de vue adopté jusqu'alors) et récepteur pour le réseau (il s'agit de la charge). Les équations de l'alternateur s'écrivent alors, dans le repère du stator, en changeant les signes des courants :

$$\phi_{dq} = -L_{cs}\mathbf{i}_{dq} + \phi_f(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.88)$$

$$\mathbf{v}_{dq} = -R_s\mathbf{i}_{dq} + p\Omega R(\frac{\pi}{2})\phi_{dq} + \frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (6.89)$$

et

$$C = \frac{3}{2}p\phi_f(t)i_q \quad (6.90)$$

où C est ici le couple de freinage produit par l'alternateur, s'opposant au couple de la turbine à travers l'équation mécanique :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C_t - C \quad (6.91)$$

Afin de simplifier les équations, il est intéressant d'écrire un modèle diphasé des équations du réseau. Dans le cas d'un réseau sinusoïdal équilibré à la pulsation ω , on a :

$$v_a(t) = e_{ra}(t) + R_r i_a(t) + L_r \frac{di_a(t)}{dt} \quad (6.92)$$

$$v_b(t) = e_{rb}(t) + R_r i_b(t) + L_r \frac{di_b(t)}{dt} \quad (6.93)$$

$$v_c(t) = e_{rc}(t) + R_r i_c(t) + L_r \frac{di_c(t)}{dt} \quad (6.94)$$

avec :

$$e_{ra}(t) = E_r \cos(\gamma(t)) \quad (6.95)$$

$$e_{rb}(t) = E_r \cos(\gamma(t) - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.96)$$

$$e_{rc}(t) = E_r \cos(\gamma(t) + \frac{2\pi}{3}) \quad (6.97)$$

où $\gamma(t)$ est la phase avec :

$$\omega = \frac{d\gamma(t)}{dt} \quad (6.98)$$

Après une transformation triphasé-diphasée, on obtient :

$$v_\alpha(t) = e_{r\alpha}(t) + R_r i_\alpha(t) + L_r \frac{di_\alpha(t)}{dt} \quad (6.99)$$

$$v_\beta(t) = e_{r\beta}(t) + R_r i_\beta(t) + L_r \frac{di_\beta(t)}{dt} \quad (6.100)$$

où :

$$e_{r\alpha}(t) = E_r \cos(\gamma(t)) \quad (6.101)$$

$$e_{r\beta}(t) = E_r \sin(\gamma(t)) \quad (6.102)$$

Différentes possibilités sont possibles pour simuler les deux systèmes dans le même repère ; on peut choisir soit le repère du rotor de l'alternateur, soit le repère de la phase du réseau. La position du rotor

est une grandeur continue (car sa vitesse est finie) alors qu'on peut imaginer une phase du réseau qui varie de manière discontinue. On prendra donc dans la suite comme repère celui lié à la position $p\theta$ du rotor. Dans la suite, on prend $E = 0$ afin d'alléger les calculs. Ce cas particulier correspond au cas d'un alternateur couplé à un réseau passif. On rencontre ce cas de figure dans les systèmes embarqués ou dans les installations isolées alimentées par groupe électrogène.

L'identité des tensions (tension alternateur égale tension charge) s'écrit :

$$\begin{aligned} v_d(t) &= -R_s i_d(t) + p\Omega L_s i_q(t) - L_{cs} \frac{di_d(t)}{dt} = R_r i_d(t) + L_r \frac{di_d(t)}{dt} \\ v_q(t) &= -R_s i_q(t) + p\Omega(\phi_f(t) - L_{cs} i_d(t)) - L_{cs} \frac{di_q(t)}{dt} = R_r i_q(t) + L_r \frac{di_q(t)}{dt} \end{aligned}$$

Les grandeurs d'entrée (celle que l'on peut modifier arbitrairement) sont la vitesse (en jouant sur la turbine) et le flux (il est réglable par une tension d'alimentation). Les états sont les courants (on peut aussi choisir les flux). Les grandeurs de sortie sont les courants et les tensions. Les équations d'état se réécrivent sous la forme :

$$L_t \frac{di_d(t)}{dt} + R_t i_d(t) = p\Omega L_s i_q(t) \quad (6.103)$$

$$L_t \frac{di_q(t)}{dt} + R_t i_q(t) = p\Omega(\phi_f(t) - L_s i_d(t)) \quad (6.104)$$

où L_t est l'inductance cyclique totale comprenant les effets de l'alternateur et de la charge ; R_t est la résistance totale (alternateur + charge). Pour déterminer les équations de la tension en fonction de l'état et de l'entrée, il faut faire disparaître les dérivées des courants. Cela donne :

$$\begin{aligned} v_d(t) &= p\Omega \frac{L_r}{L_r + L_{cs}} L_{cs} i_q(t) + \frac{L_{cs} R_r - L_r R_s}{L_{cs} + L_r} i_d(t) \\ v_q(t) &= p\Omega \frac{L_r}{L_r + L_{cs}} (\phi_f(t) - L_{cs} i_d(t)) + \frac{L_{cs} R_r - L_r R_s}{L_{cs} + L_r} i_q(t) \end{aligned}$$

Différentes boucles de régulation sont incluses sur un alternateur. La variation du flux permet de modifier la valeur efficace de la tension. Ainsi, une régulation de la tension agissant sur le flux permet de maintenir la tension constante en présence de variations de la charge. La pulsation doit être également maintenue constante. Cela peut se faire en asservissant la vitesse à une valeur de référence $\frac{\omega}{p}$ en ajustant le couple de la turbine.

6.3 La machine asynchrone

On considère le cas des machines triphasées à rotor bobiné sachant que le modèle est globalement valable pour les machines à rotor à cage. Le stator est identique à celui des machines synchrones. Le rotor est de même nature que le stator.

6.3.1 Modèle triphasé

Le stator est constitué de trois enroulements faisant respectivement un angle avec l'axe de référence du rotor de $\xi = 0, 2\pi/3p$ et $-2\pi/3p$. Le rotor faisant un angle θ avec le stator est composé de trois enroulements faisant respectivement un angle avec l'axe du stator de $\xi = \theta, \theta + 2\pi/3p$ et $\theta - 2\pi/3p$. Les enroulements du stator sont parcourus par les courants i_{sa}, i_{sb} et i_{sc} ; ceux du rotor par i_{ra}, i_{rb} et i_{rc} . Notons ϕ_{sa}, ϕ_{sb} et ϕ_{sc} les flux du stator et ϕ_{ra}, ϕ_{rb} et ϕ_{rc} ceux du rotor.

Flux propre

Les flux propres du stator et du rotor s'expriment comme dans le cas du flux du stator de la machine synchrone. Notons ϕ_{ssa}, ϕ_{ssb} et ϕ_{ssc} les flux propres du stator et ϕ_{rra}, ϕ_{rrb} et ϕ_{rrc} ceux du

rotor. En notant L_s l'inductance propre d'une phase du stator et M_s la mutuelle inductance entre 2 phases du stator, on a :

$$\phi_{ssa}(t) = L_s i_{sa}(t) + M_s i_{sb}(t) + M_s i_{sc}(t) \quad (6.105)$$

$$\phi_{ssb}(t) = M_s i_{sa}(t) + L_s i_{sb}(t) + M_s i_{sc}(t) \quad (6.106)$$

$$\phi_{ssc}(t) = M_s i_{sa}(t) + M_s i_{sb}(t) + L_s i_{sc}(t) \quad (6.107)$$

En notant L_r l'inductance propre d'une phase du rotor et M_r la mutuelle inductance entre 2 phases du rotor, on a :

$$\phi_{rra}(t) = L_r i_{ra}(t) + M_r i_{rb}(t) + M_r i_{rc}(t) \quad (6.108)$$

$$\phi_{rrb}(t) = M_r i_{ra}(t) + L_r i_{rb}(t) + M_r i_{rc}(t) \quad (6.109)$$

$$\phi_{rrc}(t) = M_r i_{ra}(t) + M_r i_{rb}(t) + L_r i_{rc}(t) \quad (6.110)$$

Ces équations se mettent sous forme vectorielle

$$\phi_{3ss} = \mathcal{M}_s \mathbf{i}_{3s} \quad (6.111)$$

$$\phi_{3rr} = \mathcal{M}_r \mathbf{i}_{3r} \quad (6.112)$$

avec $\phi_{3ss} = [\phi_{ssa} \ \phi_{ssb} \ \phi_{ssc}]^T$ et $\mathbf{i}_{3s} = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T$,

$$\mathcal{M}_s = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad (6.113)$$

et

$$\mathcal{M}_r = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

Flux mutuel

Notons ϕ_{sra} , ϕ_{srb} et ϕ_{src} les flux du stator produits par le rotor. En notant M_{rs} la mutuelle inductance maximale entre un enroulement du stator et un enroulement du rotor. Il suffit de multiplier cette grandeur par le cosinus de p fois l'angle entre deux enroulements pour déterminer son inductance mutuelle. Ainsi, on obtient pour le flux du stator produit par le rotor :

$$\phi_{sra}(t) = M_{rs} \cos(p\theta) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rc}(t)$$

$$\phi_{srb}(t) = M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos(p\theta) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rc}(t)$$

$$\phi_{src}(t) = M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos(p\theta) i_{rc}(t)$$

Ce qui se met sous la forme $\phi_{3sr} = \mathcal{M}_{sr}(\theta) \mathbf{i}_{3r}$ où $\phi_{3sr} = [\phi_{sra} \ \phi_{srb} \ \phi_{src}]^T$, $\mathbf{i}_{3r} = [i_{ra} \ i_{rb} \ i_{rc}]^T$ et $\mathcal{M}_{sr}(\theta) = M_{rs} S(p\theta)$ avec :

$$S(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) \\ \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos(x) & \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) \\ \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

Le flux produit par le stator sur le rotor s'écrit avec la même matrice : $\phi_{3rs} = \mathcal{M}_{rs}(\theta) \mathbf{i}_{3s}$ où $\phi_{3rs} = [\phi_{rsa} \ \phi_{rsb} \ \phi_{rsc}]^T$, $\mathbf{i}_{3s} = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T$ et avec $\mathcal{M}_{rs}(\theta) = \mathcal{M}_{sr}^T(\theta)$.

Flux total et équations aux tensions

Le flux total reçu au stator est la somme du flux propre produit au stator et du flux produit au rotor, soit $\phi_{3s} = \phi_{3ss} + \phi_{3sr}$; de même, pour les flux produits au rotor, on a $\phi_{3r} = \phi_{3rr} + \phi_{3rs}$, ce qui donne les relations :

$$\phi_{s3} = \mathcal{M}_s \mathbf{i}_{s3} + \mathcal{M}_{sr}(\theta) \mathbf{i}_{r3} \quad (6.116)$$

$$\phi_{r3} = \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) \mathbf{i}_{s3} + \mathcal{M}_r \mathbf{i}_{r3} \quad (6.117)$$

En notant R_s la résistance d'un enroulement du stator et R_r celle d'un enroulement du rotor, les équations aux tensions s'écrivent pour le stator :

$$v_{sa}(t) = R_s i_{sa}(t) + \frac{d\phi_{sa}(t)}{dt} \quad (6.118)$$

$$v_{sb}(t) = R_s i_{sb}(t) + \frac{d\phi_{sb}(t)}{dt} \quad (6.119)$$

$$v_{sc}(t) = R_s i_{sc}(t) + \frac{d\phi_{sc}(t)}{dt} \quad (6.120)$$

et pour le rotor supposé court-circuité :

$$v_{ra}(t) = 0 = R_r i_{ra}(t) + \frac{d\phi_{ra}(t)}{dt} \quad (6.121)$$

$$v_{rb}(t) = 0 = R_r i_{rb}(t) + \frac{d\phi_{rb}(t)}{dt} \quad (6.122)$$

$$v_{rc}(t) = 0 = R_r i_{rc}(t) + \frac{d\phi_{rc}(t)}{dt} \quad (6.123)$$

ce qui se met sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}_{s3} = R_s \mathbf{i}_{s3} + \frac{d\phi_{s3}}{dt} \quad (6.124)$$

$$0 = R_r \mathbf{i}_{r3} + \frac{d\phi_{r3}}{dt} \quad (6.125)$$

$$(6.126)$$

avec $\mathbf{v}_3 = [v_{sa} \ v_{sb} \ v_{sc}]^T$.

Expression du couple

En reprenant l'expression générale du couple (2.105) avec $\mathbf{i} = [\mathbf{i}_{3s}^T \ \mathbf{i}_{3r}^T]^T$ et :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_s & \mathcal{M}_{sr}(\theta) \\ \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) & \mathcal{M}_r \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

on obtient :

$$C = \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_{3s}^T \frac{d\mathcal{M}_{sr}(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}_{3r} + \mathbf{i}_{3r}^T \frac{d\mathcal{M}_{sr}^T(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}_{3s} \right) \quad (6.128)$$

En notant que $\frac{d\mathcal{M}_{sr}(\theta)}{d\theta} = p\mathcal{M}_{sr}(\theta + \frac{\pi}{2p})$ et que les deux termes de la somme sont identiques, le couple se réécrit :

$$C = pM_{sr} \mathbf{i}_{3s}^T S(p\theta + \frac{\pi}{2}) \mathbf{i}_{3r} \quad (6.129)$$

6.3.2 Modèle diphasé

Effectuons la transformation de Concordia afin de transformer les grandeurs triphasées en des grandeurs diphasées. Au stator, nous avons $\mathbf{i}_{2s} = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]$ tel que $\mathbf{i}_{3s} = C_{32} \mathbf{i}_{2s}$, $\phi_{2s} = [\phi_{s\alpha} \ \phi_{s\beta}]$ tel que $\phi_{3s} = C_{32} \phi_{2s}$ et $\mathbf{v}_{3s} = C_{32} \mathbf{v}_{2s}$. Au rotor, nous avons $\mathbf{i}_{2r} = [i_{r\alpha} \ i_{r\beta}]$ tel que $\mathbf{i}_{3r} = C_{32} \mathbf{i}_{2r}$ et $\phi_{2r} = [\phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta}]$ tel que $\phi_{3r} = C_{32} \phi_{2r}$.

Expressions des flux

Prenons l'expression des flux du stator et du rotor, remplaçons les grandeurs triphasées par C_{32} fois la grandeur diphasée et multiplions les deux termes de l'équation par C_{32}^T .

$$\frac{3}{2}\phi_{2s} = C_{32}^T \mathcal{M}_s C_{32} \mathbf{i}_{2s} + C_{32}^T \mathcal{M}_{sr}(\theta) C_{32} \mathbf{i}_{2r} \quad (6.130)$$

$$\frac{3}{2}\phi_{2r} = C_{32}^T \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) C_{32} \mathbf{i}_{2s} + C_{32}^T \mathcal{M}_r C_{32} \mathbf{i}_{2r} \quad (6.131)$$

Comme pour la machine synchrone, nous avons $C_{32}^T \mathcal{M}_s C_{32} = \frac{3}{2} L_{cs} \mathcal{I}_2$ où $L_{cs} = L_s - M_s$ est l'inductance propre cyclique du stator ainsi que $C_{32}^T \mathcal{M}_r C_{32} = \frac{3}{2} L_{cr} \mathcal{I}_2$ où $L_{cr} = L_r - M_r$ est l'inductance propre cyclique du rotor.

Par ailleurs, on peut montrer que :

$$C_{32}^T S(x) C_{32} = \frac{3}{2} R(x) \quad (6.132)$$

où $R(x)$ est la matrice de rotation d'angle x . Ainsi, on obtient les expressions simplifiées des flux :

$$\phi_{2s} = L_{cs} \mathbf{i}_{2s} + M_{sr} R(p\theta) \mathbf{i}_{2r} \quad (6.133)$$

$$\phi_{2r} = M_{sr} R(-p\theta) \mathbf{i}_{2s} + L_{cr} \mathbf{i}_{2r} \quad (6.134)$$

Exercice 28 (Propriétés de la matrice $S(x)$).

Montrez que $C_{32}^T S(x) C_{32} = \frac{3}{2} R(x)$.

Équations aux tensions

Comme pour la machine synchrone, les équations aux tensions s'écrivent simplement :

$$\mathbf{v}_{2s} = R_s \mathbf{i}_{2s} + \frac{d\phi_{2s}}{dt} \quad (6.135)$$

$$\mathbf{v}_{2r} = R_r \mathbf{i}_{2r} + \frac{d\phi_{2r}}{dt} \quad (6.136)$$

$$(6.137)$$

avec $\mathbf{v}_{2r} = 0$ lorsque le rotor est court-circuité.

Expression du couple

A partir de l'expression 6.129 du couple, on obtient :

$$C = \frac{3}{2} p M_{sr} \mathbf{i}_{2s}^T R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \mathbf{i}_{2r} \quad (6.138)$$

Modèle d'état

A partir des équations des tensions, des flux et de l'expression du couple, il est possible d'écrire un modèle d'état utilisable par exemple pour simuler la machine. Néanmoins, le modèle présenté a l'inconvénient de conserver des grandeurs au stator et au rotor à des pulsations différentes ce qui se manifeste dans les équations par la matrice de rotation $R(p\theta)$. Nous allons donc présenter le modèle diphasé où les grandeurs sont ramenées dans le même repère grâce à une transformation de Park.

6.3.3 Modèle de Park dans un repère quelconque

On effectue un changement de repère qui est une rotation d'angle respectivement ξ_s sur les grandeurs du stator et ξ_r sur celles du rotor. Sur les courants, nous avons $\mathbf{i}_{2s} = R(\xi_s)\mathbf{i}_{sdq}$ et $\mathbf{i}_{2r} = R(\xi_r)\mathbf{i}_{rdq}$.

Les expressions des flux sont les suivantes :

$$\phi_{sdq} = L_{cs}\mathbf{i}_{sdq} + M_{sr}R(p\theta - \xi_s + \xi_r)\mathbf{i}_{rdq} \quad (6.139)$$

$$\phi_{rdq} = M_{sr}R(-p\theta + \xi_s - \xi_r)\mathbf{i}_{sdq} + L_{cr}\mathbf{i}_{rdq} \quad (6.140)$$

Afin de simplifier les équations, il convient de ramener les grandeurs du rotor et du stator dans un unique repère, ce qui correspond à imposer $\xi_r + p\theta = \xi_s$. Dans la suite, nous nous placerons dans ce cas. L'expression des flux se simplifie :

$$\phi_{sdq} = L_{cs}\mathbf{i}_{sdq} + M_{sr}\mathbf{i}_{rdq} \quad (6.141)$$

$$\phi_{rdq} = M_{sr}\mathbf{i}_{sdq} + L_{cr}\mathbf{i}_{rdq} \quad (6.142)$$

ce qui s'écrit aussi en notations scalaires :

$$\phi_{sd} = L_{cs}i_{sd} + M_{sr}i_{rd} \quad (6.143)$$

$$\phi_{sq} = L_{cs}i_{sq} + M_{sr}i_{rq} \quad (6.144)$$

$$\phi_{rd} = M_{sr}i_{sd} + L_{cr}i_{rd} \quad (6.145)$$

$$\phi_{rq} = M_{sr}i_{sq} + L_{cr}i_{rq} \quad (6.146)$$

Ces équations peuvent s'inverser pour exprimer les courants en fonction des flux :

$$\mathbf{i}_{sdq} = \frac{1}{L_{cs}L_{cr} - M_{sr}^2} (L_{cr}\phi_{sdq} - M_{sr}\phi_{rdq}) \quad (6.147)$$

$$\mathbf{i}_{rdq} = \frac{1}{L_{cs}L_{cr} - M_{sr}^2} (-M_{sr}\phi_{sdq} + L_{cr}\phi_{rdq}) \quad (6.148)$$

Les équations des tensions s'écrivent :

$$\mathbf{v}_{sdq} = R_s\mathbf{i}_{sdq} + R(-\xi_s)\frac{d}{dt}(R(\xi_s)\phi_{sdq}) \quad (6.149)$$

$$\mathbf{v}_{rdq} = R_r\mathbf{i}_{rdq} + R(-\xi_r)\frac{d}{dt}(R(\xi_r)\phi_{rdq}) \quad (6.150)$$

En notant que $\frac{d}{dt}(R(\xi_s)\phi_{sdq}) = \frac{d}{dt}(R(\xi_s))\phi_{sdq} + R(\xi_s)\frac{d\phi_{sdq}}{dt} = \dot{\xi}_s R(\xi_s + \frac{\pi}{2})\phi_{sdq} + R(\xi_s)\frac{d\phi_{sdq}}{dt}$, on obtient :

$$\mathbf{v}_{sdq} = R_s\mathbf{i}_{sdq} + \dot{\xi}_s R(\frac{\pi}{2})\phi_{sdq} + \frac{d\phi_{sdq}}{dt} \quad (6.151)$$

$$\mathbf{v}_{rdq} = R_r\mathbf{i}_{rdq} + \dot{\xi}_r R(\frac{\pi}{2})\phi_{rdq} + \frac{d\phi_{rdq}}{dt} \quad (6.152)$$

ce qui s'écrit aussi en notation scalaire :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} - \dot{\xi}_s \phi_{sq} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} \quad (6.153)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\xi}_s \phi_{sd} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \quad (6.154)$$

$$v_{rd} = R_r i_{rd} - \dot{\xi}_r \phi_{rq} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (6.155)$$

$$v_{rq} = R_r i_{rq} + \dot{\xi}_r \phi_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \quad (6.156)$$

L'expression du couple est :

$$C = \frac{3}{2}pM_{sr}\mathbf{i}_{sdq}^T R(\frac{\pi}{2})\mathbf{i}_{rdq} \quad (6.157)$$

ce qui s'écrit aussi $C = \frac{3}{2}pM_{sr}(-i_{sd}i_{rq} + i_{sq}i_{rd})$.

6.3.4 Modèle de Park dans le repère du stator

Nous avons déjà précisé qu'un unique repère était choisi pour les grandeurs du stator et du rotor, mais nous n'avons pas précisé lequel. Différents choix sont possibles. On peut choisir de se placer dans le repère du stator avec $\xi_s = 0$ et $\xi_r = -p\theta$; on peut choisir de se placer dans le repère du rotor avec $\xi_s = p\theta$ et $\xi_r = 0$; on peut aussi se placer dans un repère suivant le flux du rotor où toute autre grandeur du stator ou du rotor.

Pour la simulation, il est conseillé de choisir le repère du stator qui a l'avantage de ne pas obliger à effectuer de changer de repère les grandeurs du stator, ce qui simplifie quelque peu le modèle. Par rapport au modèle dans un repère quelconque, seules les équations des tensions sont simplifiées :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} \quad (6.158)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \quad (6.159)$$

$$0 = R_r i_{rd} + p\Omega\phi_{rq} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (6.160)$$

$$0 = R_r i_{rq} - p\Omega\phi_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \quad (6.161)$$

où Ω est la vitesse de rotation.

Un modèle d'état peut-être établi basé, soit sur les flux, soit sur les courants. Notons que ce modèle a besoin de la connaissance de la vitesse Ω qui doit donc lui être fournie en entrée alors que le modèle de la machine synchrone avait besoin de la position θ .

Exercice 29 (Modèle de simulation de la machine asynchrone). *Déterminez un modèle de simulation de la machine asynchrone basé sur les équations diphasées exprimées dans le repère du stator. Vous donnerez les équations d'état en fonction soit des flux, soit des courants du stator. Vous préciserez les transformations permettant de passer des grandeurs triphasées aux grandeurs diphasées.*

6.3.5 Commande par orientation du flux du rotor

La technique de commande vectorielle du couple la plus répandue s'appuie sur les équations dans le repère du flux du rotor. On parle de flux rotorique orienté (FRO ou en anglais FOC pour flux oriented control). Cette méthode a été développée à la fin des années 1980 par Siemens. Son intérêt se trouve dans une simplification de l'expression du couple. Elle est généralement employée pour la commande vectorielle des machines de faible et moyenne puissance; pour les machines de forte et de très forte puissance où l'effet de l'onduleur devient sensible³, on préfère généralement les techniques appelées *commande directe du couple* (DTC pour *direct torque control* en anglais).

Principe

A partir des expressions des courants en fonction des courants, on peut établir différentes expressions du couple. Choissant de l'exprimer en fonction du flux du rotor et du courant du stator, l'expression du flux du rotor nous permet d'écrire $\mathbf{i}_{rdq} = \frac{1}{L_{cr}}(\phi_{rdq} - M_{sr}\mathbf{i}_{sdq})$. En remplaçant dans l'expression du couple, on obtient :

$$C = k\mathbf{i}_{sdq}^T R\left(\frac{\pi}{2}\right)\phi_{rdq} \quad (6.162)$$

avec $k = \frac{3pM_{sr}}{2L_{cr}}$, ce qui s'écrit aussi $C = k(-i_{sd}\phi_{rq} + i_{sq}\phi_{rd})$. En imposant la relation $\phi_{rq} = 0$, c'est-à-dire en choisissant le repère, aligné avec le champ du rotor, on obtient une expression simplifiée du couple :

$$C = ki_{sq}\phi_{rd} \quad (6.163)$$

3. Les constantes de temps des machines augmentent avec leur taille et leur puissance; mais les temps de commutation des composants semi-conducteurs utilisés dans les onduleurs (transistors, IGBT, GTO) augmente plus rapidement encore ce qui fait que l'effet de l'onduleur est plus critique pour les fortes puissances.

ce qui ressemble à l'expression du couple d'une machine à courant continu ou encore à celle d'une machine synchrone autopilotée.

Les variables pertinentes pour cette commande sont les courants du stator et les flux du rotor. Commençons par écrire les équations en fonction de ces grandeurs tout en tenant compte du fait qu'on suppose $\phi_{rq} = 0$. Il faut pour cela exprimer les flux du stator et les courants du rotor en fonctions des variables choisies. A partir des expressions des flux du rotor (6.145) et (6.146), on obtient :

$$i_{rd} = \frac{1}{L_{cr}}(\phi_{rd} - M_{sr}i_{sd}) \quad (6.164)$$

$$i_{rq} = -\frac{M_{sr}}{L_{cr}}i_{sd} \quad (6.165)$$

En remplaçant dans les expressions 6.143 et 6.144 des flux du stator, on obtient :

$$\phi_{sd} = \sigma L_{cs}i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}}\phi_{rd} \quad (6.166)$$

$$\phi_{sq} = \sigma L_{cs}i_{sq} \quad (6.167)$$

où $\sigma = 1 - \frac{M_{sr}^2}{L_{cs}L_{cr}}$ est le coefficient de dispersion des fuites.

Avec ces relations, on peut réécrire les équations aux tensions :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} - \dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (6.168)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\xi}_s (\sigma L_{cs} i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \phi_{rd}) + \sigma L_{cs} \frac{di_{sq}}{dt} \quad (6.169)$$

$$0 = -\frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} i_{sd} + \frac{R_r}{L_{cr}} \phi_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (6.170)$$

$$0 = -\frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} i_{sq} + \dot{\xi}_r \phi_{rd} \quad (6.171)$$

Estimateurs

Afin d'asservir le couple par la méthode FRO, il convient d'estimer ϕ_{rd} ainsi que l'angle ξ_s de changement de repère des grandeurs du stator.

L'équation 6.171 se réécrit :

$$\dot{\xi}_r = \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} \frac{i_{sq}}{\phi_{rd}} \quad (6.172)$$

Cette relation permet de déterminer l'angle ξ_r de changement de repère des grandeurs du rotor à condition de connaître ϕ_{rd} . Pour le stator, il suffit d'ajouter $p\theta$:

$$\xi_s = \xi_r + p\theta \quad (6.173)$$

où ξ_r est calculé par intégration de $\dot{\xi}_r$. La connaissance de cet angle permet de calculer les composantes de Park des courants mesurés et de calculer les tensions triphasées à fournir par l'onduleur à partir des composantes (d,q).

L'estimation $\hat{\phi}_{rd}$ de ϕ_{rd} est donnée par l'équation 6.170 : ϕ_{rd} peut être estimé à partir de i_{sd} grâce à une fonction de transfert du premier ordre $H(s) = \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}s + R_r}$, ce qui donne en variable de Laplace :

$$\phi_{rd}(s) = H(s)i_{sd}(s) \quad (6.174)$$

Boucles de régulation

Il convient d'asservir les grandeurs intervenant dans l'expression du couple. L'estimée du flux $\hat{\phi}_{rd}$ est généralement régulé à sa valeur nominale ϕ_{rd}^* en asservissant le courant i_{sd} à la valeur $i_{sd}^* = \phi_{rd}^*/M_{sr}$. On peut faire fonctionner la machine à une valeur nominale du flux avec $\phi_{rd}^* = \phi_n$ ou diminuer cette valeur (on parle de *défluxage*), soit pour atteindre des vitesses élevées, soit pour réduire les pertes si le couple nécessaire ne représente qu'une fraction du couple nominal de la machine.

Une fois le flux stabilisé à sa valeur de référence, le couple est alors proportionnel au courant i_{iq} , soit $C^* = K i_{sq}$ où $K = k \phi_{sd}^*$ et $k = \frac{3pM_{sr}}{2L_r}$. Afin d'imposer le couple à une valeur de référence C^* , on asservie la composante en quadrature du courant du stator, i_{sq} , à une valeur de référence $i_{sq}^* = C^*/K$.

L'équation 6.168 de la tension v_{sd} contient à la fois des dérivées du courant et du flux. On peut faire disparaître les dérivées du flux en retranchant $\frac{M_{sr}}{L_{cr}}$ fois l'équation 6.170 à l'équation 6.168, ce qui donne :

$$v_{sd} = R_t i_{sd} - \dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} - \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}^2} \phi_{rd} \quad (6.175)$$

où $R_t = R_s + R_r \left(\frac{M_{sr}}{L_{cr}} \right)^2$. Cette équation se réécrit sous la forme :

$$v_{sd} = R_t i_{sd} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} + e_d(t) \quad (6.176)$$

avec $e_d(t) = -\dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} - \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}^2} \phi_{rd}$. Notons que le terme de perturbation e_d ne fait pas intervenir de terme en i_{sd} .

Pour l'axe q, il est préférable de décomposer le terme $\dot{\xi}_s$ car il fait intervenir i_{sq} à travers $\dot{\xi}_s$. On obtient alors :

$$v_{sq} = R_t i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sq}}{dt} + e_q(t) \quad (6.177)$$

avec $e_q(t) = p\Omega(\sigma L_{cs} i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \phi_{rd}) + \frac{pR_r M_{sr} L_{cs}}{L_{cr}} \frac{i_{sq}^2}{\phi_{rd}}$ qui ne contient pas de terme linéaire en i_{sq} . Remarquons que, bien que passablement plus compliqué que les fem des machines à courant continu et synchrones auto-pilotées, cette fem contient bien le produit de la vitesse et du flux ; terme qui est d'ailleurs prépondérant.

Des correcteurs PI sont généralement utilisés pour asservir les composantes i_{sd} et i_{sq} du courant. La commande peut également compenser les termes de perturbation e_d et e_q . En régime permanent, on a $\phi_{rd} = M_{sr} i_{sd}$. Ainsi, dans le cas d'une consigne de flux constante, il suffit de réguler i_{sd} à la valeur de consigne $i_{sd}^* = \frac{\phi_{rd}^*}{M_{sr}}$.

Annexe A

Lexique

A.1 Convertisseur de fréquence

La variation de vitesse d'un moteur à courant alternatif suppose de faire varier la fréquence de sa tension d'alimentation. On appelle variateur de fréquence ces produits. Ils sont généralement composés d'un étage de redressement (*AC/DC converter*) et d'un onduleur (*DC/AC converteur*). Les variateurs pour moteurs à courant alternatif intègrent un variateur de fréquence.

A.2 Démarreur

Les moteurs asynchrones (ou moteur à induction) sont capables de démarrer seuls à partir d'un réseau alternatif. Cependant, lors de leur démarrage, ils absorbent des courants très élevés, ce qui interdit généralement un démarrage direct. Le démarreur est un produit industriel destiné à permettre d'assurer le démarrage des moteurs asynchrones en respectant les contraintes de courant. Il est généralement composé d'un gradateur triphasé, qui est un convertisseur alternatif/alternatif ne modifiant pas la fréquence. Une fois le moteur démarré, le gradateur est simplement court-circuité afin d'alimenter directement le moteur sans perte.

A.3 Freinage dynamique

Les moteurs électriques classiques (moteur à courant continu, moteur synchrone et moteur asynchrone) sont réversibles. Ainsi, ils peuvent être utilisés pour convertir l'énergie cinétique d'un véhicule en électricité et recharger ainsi ses batteries. Ainsi, l'énergie cinétique n'est plus brûlée au freinage, comme c'est le cas dans les véhicules classiques équipés de moteur thermique, mais est récupérée, permettant ainsi une meilleure efficacité énergétique des véhicules électriques ou hybrides par rapport aux véhicules classiques. Pour permettre au système électrique de récupérer l'énergie de freinage, il faut aussi que le chaîne de conversion de l'énergie électrique soit réversible, ce qui représente un certain surcoût.

A.4 Moteur DC brushless

Un moteur *DC brushless* est en fait un moteur synchrone. Si on parle de *moteur à courant continu sans balais*, c'est pour bien préciser que le moteur synchrone (MS) est un moteur sans balais ni collecteur, ce qui est un argument marketing car les balais sont des éléments d'usure et représente une sources d'étincelles, ce qui interdit l'utilisation de moteur à collecteurs dans des ambiances explosives. Mais le moteur synchrone est un moteur à courant alternatif (AC). Si on le qualifie parfois de DC, c'est parce qu'on inclut l'onduleur qui sert à alimenter le moteur et qui est alimenté en DC. Ainsi, l'ensemble onduleur + MS est équivalent à un moteur à courant continu sans balais. Dans certains

cas, l'ensemble MS + onduleur + système d'autopilotage est fourni dans un seul boîtier, justifiant pleinement de terme de DC brushless. C'est par exemple le cas de certains moteurs de ventilateurs utilisés dans les ordinateurs. Plus généralement, et pour les puissances plus élevées, l'onduleur et l'électronique de commande est délivrée à part et compose le *variateur*.

A.5 Onduleur

Le terme “onduleur” recouvre plusieurs réalités :

- Dans le monde académique, il désigne généralement un convertisseur statique permettant de convertir de l'énergie électrique sous forme continue en énergie électrique sous forme alternative. En anglais, on parle de *invert* ou de *DC/AC converter*. On retrouve ce type d'onduleur dans les matériels destinés à délivrer une tension alternative à partir de la tension continue fournie par des panneaux solaires.
- Dans le monde industriel, il désigne plus généralement un équipement destiné à garantir la qualité de la tension délivrée à des appareils sensibles en dépit des coupures du réseau. Si cet onduleur comprend généralement un *DC/AC converter*, il ne se réduit pas à cette partie. Il intègre notamment des condensateurs ou batteries destinées à compenser les coupures du réseau. On parle aussi d'*Alimentation Sans Interruption (ASI)*

A.6 Pompe à chaleur

Les pompes à chaleur sont des dispositifs thermodynamiques qui permettent d'échanger des calories avec l'environnement extérieur (l'air de l'atmosphère où le sol) afin de chauffer où de refroidir une cible (pièce d'habitation, chauffe-eau). L'échange des calories se fait grâce à un fluide caloporteur qui circule en circuit fermé. Celui-ci est chauffé par compression et refroidit par détente. La performance énergétique d'une pompe à chaleur est quantifiée par le *coefficient opérationnel de performance (COP)* qui est le rapport entre l'énergie thermique échangée avec la cible et l'énergie électrique consommée par le compresseur. Les systèmes de pompes à chaleur les plus répandus sont certainement les systèmes de climatisation réversibles qui sont qualifiés de air/air (calories échangées entre l'air extérieur et l'air intérieur). Il existe depuis peu des chauffe-eau thermodynamiques qui intègrent une pompe à chaleur. Les réfrigérateurs fonctionnent sur ce principe : la production entraîne la production de chaleur restituée à l'extérieur.

A.7 Variateur

Un variateur est un produit destiné à assurer la variation de vitesse (ou de position) d'un actionneur électrique. Suivant les cas, son alimentation se fera en continu (plutôt pour les petites puissances) ou en alternatif, monophasé ou triphasé (généralement pour les puissances élevées, typiquement supérieures au kilo Watt).

Annexe B

Méthode de l'optimum symétrique

Cette méthode permet d'obtenir de très bon réglages des correcteur PI pour de nombreuses applications. On suppose que le système à asservir a comme fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{1}{Ls(1 + \tau s)}. \quad (\text{B.1})$$

Le correcteur PI s'écrivant $K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$, la FTBO s'écrit :

$$H_{\text{bo}}(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i L s^2 (1 + \tau s)} \quad (\text{B.2})$$

On règle le correcteur de la manière suivante :

- On choisit τ_i dans un rapport $a > 1$ donné par rapport à τ :

$$\tau_i = a\tau \quad (\text{B.3})$$

La FTBO s'écrit alors :

$$H_{\text{bo}}(s) = \frac{K_p}{a\tau L s^2} \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s} \quad (\text{B.4})$$

Son gain complexe à la pulsation ω s'écrit :

$$H_{\text{bo}}(j\omega) = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + ja\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + a\tau^2\omega^2 + j\tau\omega(a - 1)}{1 + a\tau^2\omega^2} \quad (\text{B.5})$$

et son argument est :

$$\arg(H_{\text{bo}}(j\omega)) = -\pi + \arctan\left(\frac{\tau\omega(a - 1)}{1 + a\tau^2\omega^2}\right) \quad (\text{B.6})$$

Sa phase présente un maximum en $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$ et on a :

$$H_{\text{bo}}(j\omega^*) = -\frac{K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 + j/\sqrt{a}} = \frac{j\sqrt{a}K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 - j\sqrt{a}} \quad (\text{B.7})$$

Le gain est :

$$|H_{\text{bo}}(j\omega^*)| = \frac{\sqrt{a}K_p\tau}{L} \quad (\text{B.8})$$

et la phase est :

$$\arg(H_{\text{bo}}(j\omega^*)) = -\frac{3\pi}{2} + 2\arctan(\sqrt{a}) \quad (\text{B.9})$$

- On règle alors le gain de manière à ce que la marge de phase corresponde au maximum de la phase, c'est-à-dire que l'on doit avoir $|H_{\text{bo}}(j\omega^*)| = 1$, d'où :

$$K_p = \frac{L}{\sqrt{a\tau}} \quad (\text{B.10})$$

La constante a peut être choisie de manière à assurer une marge de phase $\Delta\phi = \arg(H_{\text{bo}}(j\omega^*)) + \pi$ avec :

$$a = \tan\left(\frac{\Delta\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{B.11})$$

Bibliographie

- [1] J.P. Caron and J.P. Hautier, *Modélisation et Commande de la Machine Asynchrone*, Technip, Paris, 1995.
- [2] W. Leonard, *Control of Electrical Drives*, Springer-Verlag, 1996.
- [3] P. Vas, *Vector Control of AC Machines*, Oxford university press, 1990.
- [4] J.-P. Louis, *Modélisation des machines électriques en vue de leur commande*, Lavoisier, 2004.
- [5] G. Grellet and G. Clerc, *Actionneurs électriques : principes, modèles, commandes*, 1997.
- [6] G. Lacroux, *Les Actionneurs électriques pour la robotique et les asservissements*, 1994.
- [7] V. Léger and A. Jameau, *Conversion d'énergie, électrotechnique, électronique de puissance : Résumé de cours, problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [8] J.L. Dalmaso, *Cours d'électrotechnique*, vol. 1, Belin, Paris, 1985.
- [9] A. Fouillé, *Electrotechnique à l'usage des ingénieurs*, vol. 2, Dunod, Paris, 1973.
- [10] J. Pichoir, *Cours d'Electrotechnique - machines électriques*, vol. 3, Masson, Paris, 1965.
- [11] G. Séguier and F. Notelet, *Electrotechnique Industrielle*, Technique et Documentation - Lavoisier, Paris, 1994.
- [12] D. Grenier, F. Labrique, H. Buyse, and E. Matagne, *Electromécanique, convertisseurs d'énergie et actionneurs*, Dunod, Paris, 2001.
- [13] A. Dumas, *Electronique de puissance et électrotechnique : problèmes corrigés de BTS, IUT, maîtrise EEA, électronique de puissance : Résumé de cours, problèmes corrigés*, Ellipses, 1989.
- [14] *Convertisseurs et machines électriques*, Techniques de l'Ingénieur (Traité TI-301).
- [15] F. Bernot, *Électronique de puissance*, chapter TI-350, 2000(2003).