TD Électrocinétique n° 3

Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Exercice 1 Représentation dans le plan complexe

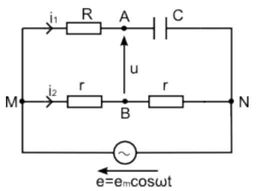
On considère un circuit série constitué d'une source de tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω de deux résistors de résistance R et r et d'un condensateur de capacité C. On note $v(t)$ la tension aux bornes du résistor de résistance r et du condensateur. Le régime permanent est établi. On choisit l'origine des temps de façon à écrire : $i(t) = I\cos(\omega t)$, $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi)$ et $v(t) = V\cos(\omega t + \psi)$.

1. Comment s'écrivent les amplitudes complexes $\underline{I}$, $\underline{V}$ et $\underline{E}$ associées aux grandeurs physiques introduites ? Calculer $\underline{I}$ et $\underline{V}$ en fonction de $\underline{E}$ et donner l'expression de V.
2. Exprimer les angles φ et ψ. Que peut-on affirmer à leur sujet ? Faire un diagramme dans le plan complexe en précisant les différents angles et les amplitudes. Calculer numériquement V,φ et ψ sachant que $R = 40\ k\Omega$, $r = 30\ k\Omega$, $C = 0,1\ \mu F$, $\omega = 100\pi\ rad.s^{-1}$ et $E = 220\ V$

Réponses : 1) $\underline{I} = \frac{jC\omega\underline{E}}{1+jC\omega(R+r)}$, $\underline{V} = \frac{1+jrC\omega}{1+jC\omega(R+r)}\underline{E}$ *; 2)* $V = 125\ V$, $\varphi = -24,5^\circ$ *et* $\psi = -46,7^\circ$

Exercice 2 Circuit déphaseur

Soit le circuit de la figure suivante, en régime sinusoïdal forcé. On pose $V_A - V_B = u = U_m\cos(\omega t + \phi)$.

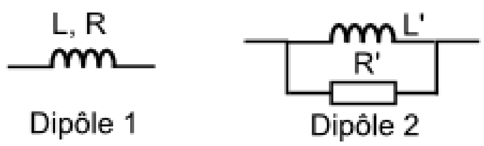


1. Déterminer U_m et ϕ.
2. Quel est l'intérêt de ce montage ?

Réponses : 1) $U_m = \frac{e_m}{2}$, $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$

Exercice 3 équivalence de deux circuits RL

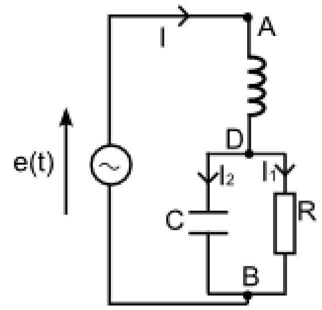
Donner les expression de L' et R' en fonction de L, R et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.



Réponses : $L' = \frac{L^2\omega^2+R^2}{L\omega^2}$, $R' = R + \frac{L^2\omega^2}{R}$

Exercice 4 Association RLC

Le dipôle AB représenté sur le schéma suivant est alimenté par une source de tension parfaite de force électromotrice instantanée $e(t) = E_0\sin\omega t$.



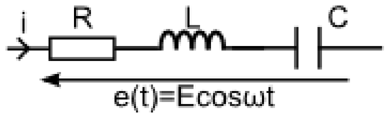
1. Exprimer L en fonction de R, C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq}.Application numérique pour $R = 100\ \omega$, $C = \frac{100}{3}\ \mu F$ et $\omega = 400\ rad.s^{-1}$.
2. On se place dans le cas précédent. Sachant que l'amplitude de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180\ V$, calculer l'amplitude de l'intensité du courant I dans la bobine.
3. Calculer les amplitudes des différences de potentiel U_{AD} et U_{DB}.
4. Calculer les amplitudes des intensités des courants I_1 et I_2 circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.

Réponses : 1) $L = \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2} = 120\ mH$ *; 2)* $I = \frac{RC}{L}E = 5\ A$ *; 3)* $U_{AD} = L\omega I = 240\ V$, $U_{DB} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}I = 300\ V$ *4)* $I_2 = C\omega U_{DB} = 4\ A$, $I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = 3\ A$

Exercice 5 Résonance série ou parallèle

A RLC série

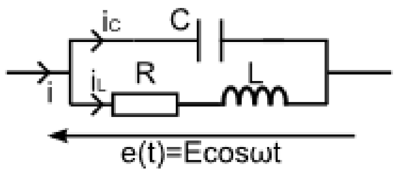
Un dîpôle constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C, est alimenté par une tension sinusoïdale $e = E\cos\omega t$, de pulsation réglable. Un courant $i = I\cos(\omega t - \varphi)$ circule dans le groupement série R, L, C.



1. Exprimer l'impédance $\underline{Z_s}$ de ce dipôle.
2. On note $Z_s = |\underline{Z_s}|$. Quelles sont les expressions de Z_s et du retard de phase φ (du courant par rapport à la tension e) en fonction de la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et du facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ de ce circuit.
3. Tracer l'allure du graphe du rapport $\frac{Z_s}{R}$ en fonction du rapport $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Quelle est la valeur maximale I_{max} de l'amplitude I du courant ? Pour quelle valeur de pulsation est-elle atteinte ? Quelle est alors la valeur de φ ? Quel est le phénomène mis en jeu ?

B Condensateur en parallèle

On considère maintenant le dipôle où la bobine L, R est montée en dérivation avec le condensateur. Ce dipôle est alimenté par la tension sinusoïdale $e = E\cos\omega t$ de pulsation réglable.

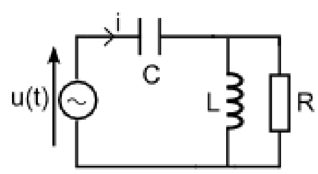


1. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_p}$ de ce dipôle en fonction de R, L, C et ω.
2. En déduire l'expression de $\underline{Z_p}$ en fonction de R, C, ω, ω_0, Q et $\underline{Z_s}$.
3. Montrer que, lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($Q\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$), $\underline{Z_p}$ peut se mettre sous la forme approchée $\underline{Z_p} \approx \frac{Q^2R^2}{\underline{Z_s}}$. On utilisera ce résultat dans la suite.
4. Quelle est la valeur de $\underline{Z_p}$ pour la pulsation ω_0 ? Quel est alors le comportement du circuit ?
5. On suppose $\omega = \omega_0$. Déterminer les valeurs approximatives des intensités réelles i_L et i_C, qui traversent respectivement la bobine et le condensateur, en fonction de R, Q, ω, du temps t et de l'amplitude E de la tension d'alimentation du dipôle.

Réponses : A1) $\underline{Z_s} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$; *A2)* $Z_s = R\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}$, $\varphi = \arctan(Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))$; *B1)* $\underline{Z_p} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$; *B2)* $\underline{Z_p} = \frac{R}{jC\omega\underline{Z_s}}(1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0})$; *B3)* $\underline{Z_p} = \frac{Q^2R^2}{\underline{Z_s}}$; *B4)* $\underline{Z_p} = Q^2 * R$; *B5)* $i_C(t) = -\frac{E}{RQ}\sin\omega_0 t$, $i_L(t) = \frac{E}{RQ}\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}\cos(\omega_0 t - \arctan Q)$

Exercice 6 Circuit RL parallèle en série avec C

On considère le circuit de la figure suivante. On pose $u(t) = U_m\cos\omega t$ et $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$



1. Quelles conditions doivent vérifier L, C et ω pour que I_m soit indépendant de R ?
2. Cette condition étant remplie, exprimer I_m et φ en fonction de U_m, C, ω et R.
3. À quelle condition supplémentaire liant R, C et ω, φ est-il nul ?

Réponses : 1) $LC\omega^2 = 2$; *2)* $I_m = C\omega U_m$, $\varphi = \arctan(\frac{4 - R^2C^2\omega^2}{4RC\omega})$; *3)* $RC\omega = 2$