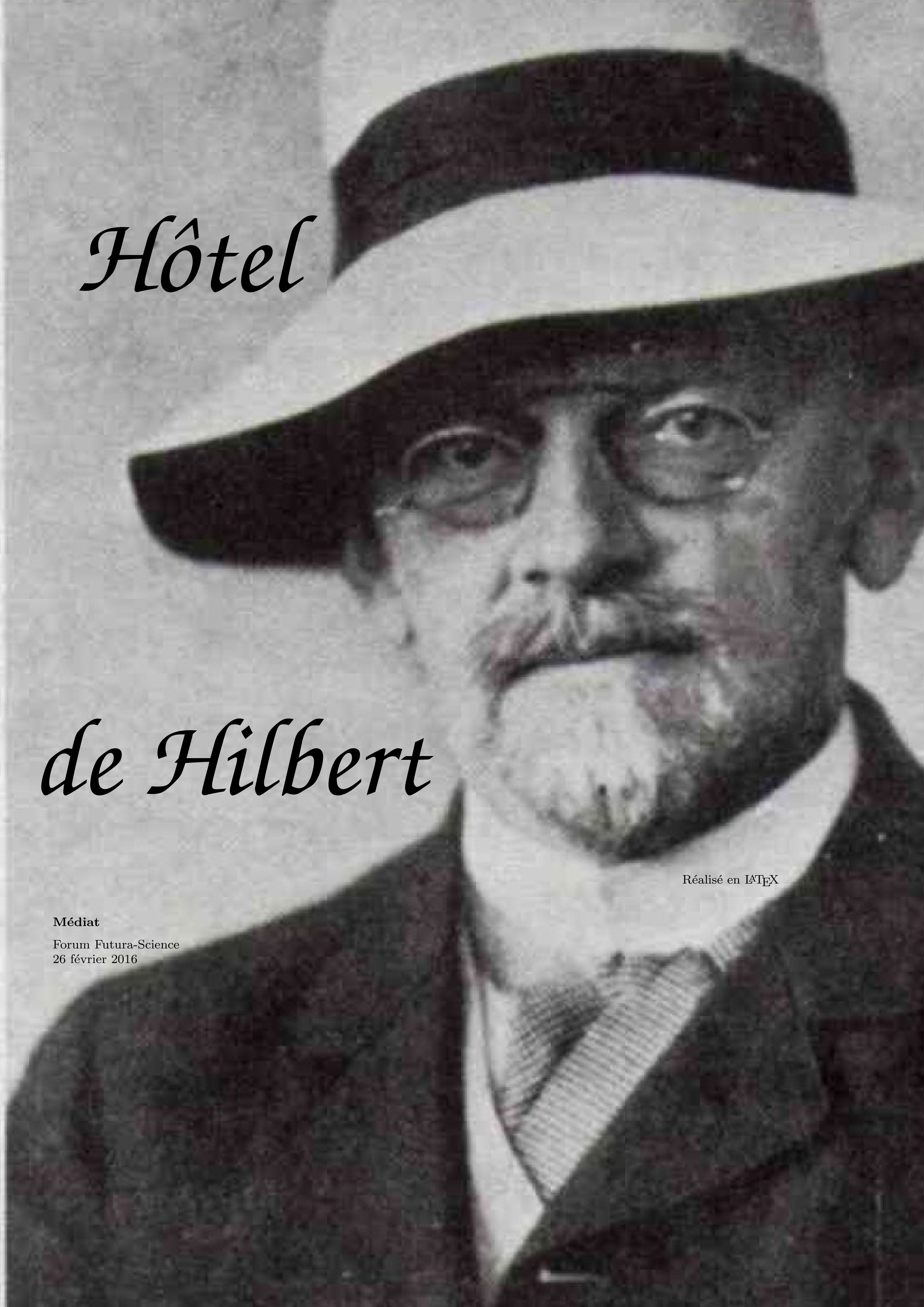

Hôtel

de Hilbert

Réalisé en LaTeX

Médiat

Forum Futura-Science
26 février 2016

I Introduction

L'hôtel de Hilbert est un hôtel un peu particulier : il possède un infinité (dénombrable) de chambres, que par simplicité nous numéroterons par des entiers strictement positifs (1, 2, ...).

Les clients seront représentés (leur nom) par des entiers.

Si on suppose que l'hôtel est complet, et qu'un certain nombre de nouveau(x) client(s) se présente(nt) peut-on, malgré tout lui(leur) donner une chambre ? Comment ? Nous allons traiter plus précisément 4 questions :

1. Un nouveau client se présente.
2. Un nouveau client se présente, mais on ne veut pas déplacer les clients en place.
3. Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent.
4. Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent, mais on ne veut pas déplacer les clients en place.

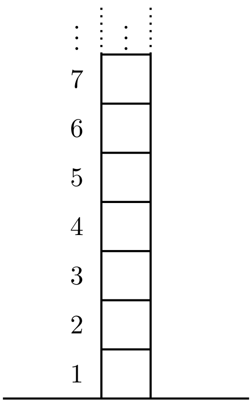

Figure 1 – Hôtel de Hilbert vide

Dans la figure ci-dessus, le N° à gauche de l'hôtel est le N° de la chambre.

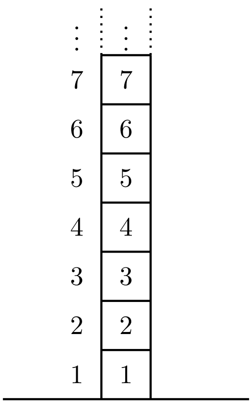

Figure 2 – Hôtel de Hilbert plein

Dans la figure ci-dessus, le N° à l'intérieur de l'hôtel est le nom du client.

II Solutions

II.1 Un nouveau client se présente

Afin de loger le nouveau client, que nous appelerons ≪ 0 ≫, on peut déplacer chaque client en place dans la chambre juste au-dessus (le client n passe dans la chambre $n+1$), la chambre 1 est ainsi libérée et on peut y loger le client 0 :

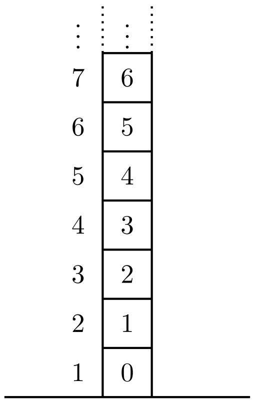

Figure 3 – Accueillir un nouveau client

II.2 Un nouveau client se présente, sans déplacer les clients en place.

Si on ne peut déplacer les clients déjà en place, il est impossible de donner une des chambres de l'hôtel au nouveau client, en effet, quelle que soit la chambre de N° n, le client de nom n est déjà dedans et ne peut être déplacé.

La solution consiste à construire une nouvelle chambre dans une annexe, à côté du bâtiment principal de l'hôtel (par convention, Après = à droite).

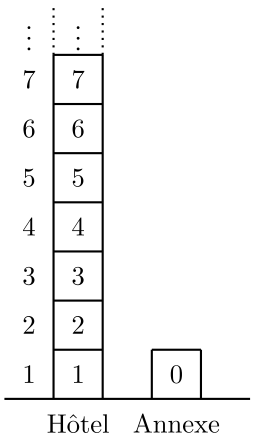

Figure 4 – Accueillir un nouveau client, sans déplacer les clients en place

II.3 Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent.

Afin de distinguer les nouveaux clients des anciens, nous appellerons ces nouveaux client A-1, A-2, ...

Une solution consiste à placer les anciens clients dans une chambre dont le N° est le double de son nom, après cette opération, les anciens clients sont dans une chambre dont le N° est pair, les chambres de N° impair sont libres, on peut donc y placer les nouveaux clients : le client A-n étant placé dans la chambre N° $2n-1$.

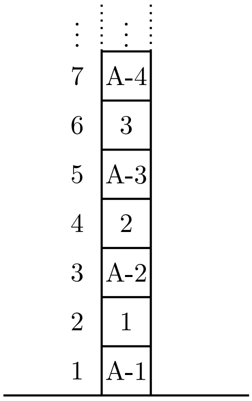

FIGURE 5 – Accueillir une infinité dénombrable de nouveaux clients

II.4 Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent, sans déplacer les clients en place.

Là encore il est impossible de loger les nouveaux clients dans le même bâtiment, pour la même raison que si un seul nouveau client se présentait, la solution consiste donc encore à construire une annexe, mais cette fois, elle doit, elle aussi, être infinie.

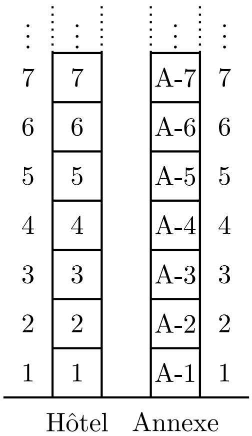

FIGURE 6 – Accueillir une infinité dénombrable de nouveaux clients, sans déplacer les clients en place

L'annexe a été placée à droite de l'hôtel (donc après selon nos conventions précédentes), elle aurait pu être placée à gauche (avant).

III Justifications formelles

D'un point de vue formel, ce problème possède deux aspects assez différents : les notions d'Ordinal et de Cardinal, la différence, qui nous intéresse ici, entre ces deux notions tient dans la nature des isomorphismes entre deux objets :

- Deux ensembles ont le même Cardinal s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.
- Deux ensembles ont le même Ordinal s'il existe une bijection **croissante** entre ces deux ensembles (ce qui sous-entend qu'il existe une relation de bon ordre sur ces ensembles).

L'ordinal qui correspond à l'ensemble des entiers naturels se note $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ (oméga), et le cardinal se note $\aleph_0$ (aleph zéro).

Si on note $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ l'ensemble des anciens clients ordonnés par leur nom, le N° de chambre dans laquelle ils se trouvent met en évidence une bijection croissante entre les deux ensembles.

L'hôtel vide illustre donc la bijection :

$$\lambda : \mathcal{A} \to \omega \text{ définie par : } \lambda(n) = n - 1$$

III.1 Un nouveau client se présente

La solution proposée dans la partie Solutions consiste à placer le nouveau client **Avant** les clients en place.
Nous noterons $\mathcal{N} = \{0\}$ l'ensemble des nouveaux clients (donc disjoint de $\mathcal{A}$), cet ensemble est exactement l'ordinal 1 (la relation d'ordre sur 1 est triviale).

On veut munir l'ensemble $\mathcal{N} \cup \mathcal{A}$ d'un ordre tel que tous les éléments de $\mathcal{N}$ (resp. de $\mathcal{A}$) restent dans leur ordre naturel, et tous les éléments de $\mathcal{N}$ doivent être plus petits que chacun des éléments de $\mathcal{A}$, ce qui est la définition de l'ordinal $1 + \omega$.

$$\varphi : \mathcal{N} \cup \mathcal{A} \to \omega \text{ définie par : } \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(0) & = & 0 \\ n > 0\ (\varphi(n) & = & n) \end{array} \right.$$

Cette bijection démontre donc que $1 + \omega = \omega$, et a fortiori que $1 + \aleph_0 = \aleph_0$

III.2 Un nouveau client se présente, sans déplacer les clients en place.

La solution proposée dans la partie Solutions consiste à placer le nouveau client **Après** les clients en place.

On veut munir l'ensemble $\mathcal{N} \cup \mathcal{A}$ d'un ordre tel que tous les éléments de $\mathcal{N}$ (resp. de $\mathcal{A}$) restent dans leur ordre naturel, et tous les éléments de $\mathcal{N}$ doivent être plus grands que chacun des éléments de $\mathcal{A}$, ce qui est la définition de l'ordinal $\omega + 1$.

Par contre il n'est pas possible de trouver une bijection $\psi : \mathcal{N} \cup \mathcal{A} \to \omega$ respectant l'ordre imposé, c'est à dire telle que $\forall n \in \mathcal{A}\, (\psi(n) < \psi(0))$ puisque les éléments de ω plus petits que $\psi(0)$ sont en nombre finis alors que $\mathcal{A}$ est infini.

Cette absence de bijection entre $\omega + 1$ et ω, démontre que $\omega + 1 \neq \omega$, mais la bijection précédente (φ, ne respecte pas l'ordre demandé) démontre que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (puisque l'ordre des éléments n'intervient pas).

Par contre, en notant ω^+ l'ordinal successeur de ω qui est égal à, par définition $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$, et en rappelant que $\omega + 1$ est égal (en tant qu'ensemble) à l'union disjointe de ω et de 1 : $\omega + 1 = \{0\} \times \omega \cup \{(1, 0)\}$ on peut définir la bijection :

$$\tau : \omega + 1 \to \omega^+ \text{ définie par : } \left\{ \begin{array}{rcl} \tau((0, n)) & = & n \\ \tau((1, 0)) & = & \omega \end{array} \right.$$

τ étant croisssnate, ceci démontre que $\omega + 1 = \omega^+$.

III.3 Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent.

La solution proposée dans la partie Solutions consiste à placer les nouveaux clients en les mélangeant avec les clients en place.

Cette fois, afin de faire des unions disjointes nous noterons $\mathcal{A} = \{(0,1),(0,2),(0,3)\cdots\} = \{0\}\times\{1,2,3,\cdots\}$ et $\mathcal{N} = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots\} = \{1\}\times\{1,2,3,\cdots\}$

$$\theta : \mathcal{N}\cup\mathcal{A} \to \omega \text{ définie par : } \begin{cases} \theta((0,n)) &= 2n-2 \\ \theta((1,n)) &= 2n-1 \end{cases}$$

La bijection θ, montre que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; par contre cette bijection ne repecte pas toutes les conditions de l'ordre (tous les éléments de $\mathcal{A}$ ne sont pas plus petits que chacun des éléments de $\mathcal{N}$), donc ne dit rien sur $\omega+\omega$.

III.4 Une infinité dénombrable de nouveaux clients se présentent, sans déplacer les clients en place.

La solution proposée dans la partie Solutions consiste à placer les nouveaux clients **Après** les clients en place (les placer Avant aurait donné le même résultat).

Cette solution illustre l'existence d'une bijection croissante entre $\mathcal{N}\cup\mathcal{A}$ et $\omega+\omega$.

$$\rho : \mathcal{N}\cup\mathcal{A} \to \omega+\omega \text{ définie par : } \begin{cases} \rho((0,n)) &= n-1 \\ \rho((1,n)) &= \omega+n-1 \end{cases}$$

Le même argument que celui trouvé dans le cas pour l'application ψ s'applique à l'application ρ ce qui montre que $\omega+\omega \neq \omega$.

IV Autres questions

On peut facilement ajouter quelques questions concernant l'hôtel de Hilbert, par exemple :

① Que se passe-t-il si l'hôtel est fini ?

② Si l'on a déjà ajouté une infinité dénombrable d'annexes, peut-on ajouter un nouveau client ?

③ Si l'on a déjà ajouté une infinité dénombrable d'annexes, peut-on ajouter un nouveau client sans perturber [1] les clients en place ?

④ Si l'on a déjà ajouté une infinité dénombrable d'annexes, peut-on ajouter une infinité non dénombrable de nouveaux clients ?

⑤ Si l'on a déjà ajouté une infinité dénombrable d'annexes, peut-on ajouter une infinité non dénombrable de nouveaux clients sans perturber les clients en place ?

⑥ Que se passe-t-il si une infinité non dénombrable de nouveaux clients se présentent ?

⑦ Pour chacun des cas envisagés, existe-t-il plusieurs façon de faire ?

⑧ etc.

1. (C'est à dire en conservant l'ordre des clients, les bâtiments les plus à gauche étant les premiers, et à l'intérieur d'un bâtiment, les clients les plus bas sont les premiers