

Transfert de chaleur unidimensionnel en milieu hétérogène

Par Yoghourt.

Le but de cet article est de partir de l'équation générale de la chaleur afin de retrouver:

- les formules de calcul pour le transfert de chaleur en mode stationnaire
- les formules de l'amortissement et du déphasage pour 1 matériau
- le calcul de l'amortissement et déphasage d'une paroi hétérogène

Pour cela, le calcul est mené pour 2 matériaux, et ensuite généralisé.



On montre ensuite rapidement comment les solutions stationnaires et périodiques de l'équation de la chaleur peuvent être associées. Enfin, la discussion est ouverte sur la pertinence du modèle ainsi obtenu dans l'optique d'une étude simplifiée de la thermique d'un mur, été comme hiver.

Equations de la chaleur

Les formules ci-dessous sont classiques. On pourra néanmoins se reporter à [kunzel95] et sa bibliographie pour s'en convaincre.

L'équation de la chaleur à 1 dimension, pour un matériau sec, est donnée par:

$$\frac{dH}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

où H est l'enthalpie du matériau (l'énergie renfermée par le matériau, en J/m³)

T est la température (en K)

t est le temps (en s)

Lambda est la conductivité thermique du matériau (en W.m⁻¹.K⁻¹)

L'enthalpie du matériau sec est donnée par:

$$H = \rho \cdot c \cdot T \quad (2)$$

où rho est la masse volumique (en kg/m³)

c est la chaleur spécifique ou capacité thermique spécifique (en J.kg⁻¹.K⁻¹)

On en déduit l'équation de la chaleur qui suit:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1bis)$$

Pour le calcul statique, on se servira aussi du flux de chaleur pour le calcul statique. Il est donné par:

$$\phi = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3)$$

avec phi en W/m²

Calcul en mode stationnaire

Dans ce cas, la température ne varie pas au cours du temps. On déduit de (1bis):

$$\frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} + \lambda \cdot \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (s1)$$

On va distinguer ce qui se passe dans le matériau 1 et ce qui se passe à l'interface entre les matériaux 1 et 2.

Dans le matériau 1, on est en milieu homogène, λ est constant, donc (s1) se réduit à:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (s1bis)$$

Autrement dit, la température dans le matériau 1 est de la forme:

$$T(x) = A_1 \cdot (x - x_0) + T_0 \quad (s2)$$

On applique cela à l'équation (3) pour trouver le flux de chaleur, en déduire une expression du coefficient A, et reformuler avec le flux de chaleur ϕ plutôt que le coefficient A.

$$\phi_1 = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda_1 \cdot A_1$$

$$A_1 = \frac{-\phi_1}{\lambda_1}$$

$$T(x) = -\frac{\phi_1}{\lambda_1} \cdot (x - x_0) + T_0 \quad (s2bis) \text{ pour } x_0 < x < x_1$$

La température est une grandeur continue. En prolongeant par continuité, on en déduit l'expression de la température T_1 :

$$T_1 = -\frac{\phi_1}{\lambda_1} \cdot (x_1 - x_0) + T_0 = T_0 - \phi_1 \cdot R_1 \quad (s3)$$

où R_1 est la résistance thermique de l'épaisseur $(x_1 - x_0)$ du matériau 1.

On se retrouve pour le matériau 2 dans les mêmes conditions de calcul que pour le matériau 1. Ainsi:

$$T_2 = T_1 - \phi_2 \cdot R_2 = T_0 - \sum_{i=1}^2 \phi_i \cdot R_i \quad (s4)$$

Physiquement, on considère que la conservation de l'énergie à l'interface se traduit par $\phi_1 = \phi_2 = \text{constante} = \phi$. Autrement dit, pas de stockage d'énergie à l'interface ou de transformation d'énergie thermique type effet Peltier.

$$T_2 = T_0 - \phi \cdot \sum_{i=1}^2 R_i = T_0 - \phi \cdot R_{\text{paroi}} \quad (s5)$$

où R_{paroi} est la résistance thermique totale de la paroi. Le flux de chaleur peut alors être exprimé en fonction des températures aux frontières du système:

$$\phi = \frac{-(T_2 - T_0)}{R_{\text{paroi}}} \quad (s6)$$

Les températures aux frontières du système étant connues, on peut alors calculer ϕ à l'aide de (s6) et calculer la température en n'importe quel point via (s2bis) à l'aide des températures aux interfaces obtenues par (s4). Youp'la...

Calcul en mode périodique

Cette fois-ci, on considère que la température en $x=x_0$ est une sinusoïde d'amplitude A_0 et de fréquence f . Par exemple, en été, $2 \cdot A_0 = 10^\circ\text{C}$ et $f = 1/24\text{h}$.

$$T_0 = A_0 \cdot e^{j2\pi f \cdot (t-t_0)}$$

En milieu homogène, l'équation de la chaleur (1bis) se simplifie en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = d \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{p1})$$

avec d la diffusivité:

$$d = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (\text{p2})$$

Voyons quelles solutions périodiques l'équation (p1) admet... Voici notre candidat:

$$T(x, t) = A \cdot e^{(j\omega t - k \cdot x)} \quad (\text{p3})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \cdot T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot T$$

L'équation (p1) appliquée à cette fonction donne:

$$j \cdot \omega \cdot T = d \cdot k^2 \cdot T \quad (\text{p4})$$

On en déduit le coefficient k complexe:

$$k = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{d}} \quad (\text{p4bis})$$

Réinjectons dans la définition initiale de notre fonction-candidat (p3) en séparant parties réelles et imaginaires dans l'exponentielle :

$$T(x, t) = A \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2d}} \cdot x} \cdot e^{j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2d}} \cdot x)}$$

$$T(x, t) = A \cdot e^{\frac{-\omega \cdot x}{\sqrt{2d\omega}}} \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{x}{\sqrt{2d\omega}})} \quad (\text{p3bis})$$

Pour simplifier la notation, on définit la célérité v :

$$v = \sqrt{4\pi f d} \quad (\text{p5})$$

$$T(x, t) = A \cdot e^{\frac{-\omega \cdot x}{v}} \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{x}{v})} \quad (\text{p2ter})$$

On va raffiner un peu l'écriture de $T(x, t)$ grâce à la définition de T_0 .

$$T(x_0, t) = A \cdot e^{\frac{-2\pi f \cdot x_0}{v_1}} \cdot e^{j2\pi f \cdot (t - \frac{x_0}{v_1})} = A_0 \cdot e^{j\omega(t-t_0)}$$

$$A \cdot e^{\frac{-\omega \cdot x_0}{v_1} - j\omega \cdot \frac{x_0}{v_1}} = A_0 \cdot e^{-j\omega t_0}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-j\omega t_0 + \frac{\omega \cdot x_0}{v_1} + j\omega \cdot \frac{x_0}{v_1}}$$

$$T(x, t) = A_0 \cdot e^{-j\omega t_0 + \frac{\omega \cdot x_0}{v_1} + j\omega \cdot \frac{x_0}{v_1}} \cdot e^{\frac{-\omega \cdot x}{v_1} + j\omega \cdot (t - \frac{x}{v_1})}$$

$$T(x, t) = A_0 \cdot e^{\frac{-\omega \cdot (x-x_0)}{v_1} + j\omega \cdot (t - \frac{(x-x_0)}{v_1} - t_0)} \quad (\text{p2quad})$$

A l'interface, on obtient:

$$T_1(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\omega}{v_1} \cdot (x_1 - x_0)} \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{(x_1 - x_0)}{v_1} - t_0)} = A_1 \cdot e^{j\omega \cdot (t - t_1)}$$

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\frac{\omega}{v_1} \cdot (x_1 - x_0)}, \quad t_1 = \frac{(x_1 - x_0)}{v_1} + t_0 \quad (p6)$$

A_1/A_0 est l'**amortissement**, $(t_1 - t_0)$ est le **déphasage**.

Pour le matériau 2, on se retrouve maintenant exactement dans la même situation de calcul qu'on avait pour le matériau 1. Et en $x=x_2$:

$$T_2(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{\omega}{v_2} \cdot (x_2 - x_1)} \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{(x_2 - x_1)}{v_2} - t_1)} = A_2 \cdot e^{j\omega \cdot (t - t_2)}$$

$$Att_2 = \frac{A_2}{A_1} = e^{-\frac{\omega}{v_2} \cdot (x_2 - x_1)}, \quad \delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{(x_2 - x_1)}{v_2} + t_1$$

On en déduit l'amortissement et le déphasage globaux de la paroi:

$$Att_{(dB)} = 10 \cdot \log\left(\frac{A_2}{A_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\prod_{i=1}^2 Att_i\right) = \sum_{i=1}^2 Att_i (dB), \quad \delta t = t_2 - t_0 = \sum_{i=1}^2 \delta t_i \quad (p7)$$

Les amortissements s'additionnent en dB, les déphasages s'additionnent tout court!

Il est à noter que la température en $x=x_2$ ne dépend que de la température T_0 et des caractéristiques de la paroi. Cela veut dire que T_2 est libre de bouger, et n'est pas fixée par des conditions limite du système en $x=x_2$. On observe alors que la valeur moyenne de T_2 est la même que T_0 . Or, à moins de se loupier grandement dans la gestion de l'habitat, ce n'est pas le comportement qu'on observe, ni en été, ni en hiver.

Généralisation du calcul en mode périodique

Si A et B sont deux classes de solution à l'équation de la chaleur, alors la superposition $A+B$ est aussi une solution.

En l'occurrence, on peut superposer la solution stationnaire (s2bis) avec la solution périodique (p2quad).

Les paramètres de la partie stationnaire s'obtiennent en calculant en moyenne sur 24h.

Le flux de chaleur moyen:

$$\bar{\phi} = \frac{-(\bar{T}_2 - \bar{T}_0)}{R_{paroi}}$$

La température moyenne aux interfaces, calculée de façon itérative ou directe:

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{n-1} - \bar{\phi} \cdot R_n = \bar{T}_0 - \bar{\phi} \cdot \sum_{i=1}^n R_i$$

La température dans le matériau n:

$$T(x, t) = -\frac{\bar{\phi}}{\lambda_1} \cdot (x - x_{n-1}) + \bar{T}_{n-1} + A_{n-1} \cdot e^{-\frac{\omega}{v_n} \cdot (x - x_{n-1})} \cdot e^{j\omega \cdot (t - \frac{(x - x_{n-1})}{v_n} - t_{n-1})}$$

Les amplitudes A_n et les « retards de phase » t_n s'obtiennent de façon itérative comme en (p6) ou de façon directe comme en (p7).

Considérations physiques

Il est légitime de se demander quelle est la portée physique des formules du paragraphe précédent. Est-ce une solution mathématique purement théorique sans application réelle? Ou bien est-ce un modèle certes approximatif mais utilisable pour l'étude et la prédiction du comportement thermique d'un mur?

- En dynamique d'hiver, le calcul en mode stationnaire permet de calculer les déperditions avec une marge d'erreur de 5 à 10% vis à vis des logiciels de calcul dynamique servant de référence en la

matière. Cf [wihan07], chapitres 5 et 6.

- En dynamique d'été, à moins d'une climatisation totale, le calcul en mode stationnaire ne permet pas de modéliser la température intérieure de façon adéquate. La température intérieure résulte des conditions extérieures (soleil, pluie, vent), des caractéristiques de l'habitat (parois, mais aussi présence de matériaux lourds à l'intérieur du volume isolé, les ouvertures), et de la façon dont on l'utilise (occultation des ouvertures, ventilation diurne et surventilation nocturne, ...). La pertinence du modèle du paragraphe précédent reste à discuter, par exemple à l'aide d'une recherche dans la littérature ou au travers de la comparaison avec un logiciel de calcul dynamique.

[kunzel95] Künzle H. : Simultaneous heat and moisture transport in building components

[wihan07] Wihan J. : Humidity in straw bale walls and its effect on the decomposition of straw