Exercice 2 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{f}(0) = 0$ et $f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$.

1. Appliquer la méthode d'Euler pour construire à la main une représentation graphique de f sur $[0\,;1]$ en prenant un pas égal à 0,2. (On donnera la définition de la suite récurrente utilisée).

2. Calculer les valeurs obtenues de $f(1)$ en prenant un pas de 0,1 puis 0,05. Comparer les résultats obtenus avec π. (On donnera la définition des suites récurrentes utilisées).

3. Etudier le sens de variation, puis le signe des fonctions f et $k(x) = -f(x)$. En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow 0 \leq f(x) \leq x$.

4. Montrer que la fonction $g(x) = f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer cette dérivée.

5. a. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = f(x) + \ f(\frac{1}{x})$ est dérivable et calculer sa dérivée
   b. En déduire qu'il existe une constante c telle que pour tout $x > 0, f(x) = c - f(\frac{1}{x})$
   c. A l'aide de la relation précédente, prouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$

6. On considère la fonction u définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan(x)$
   a. Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f \circ u(x) - x$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
   b. Calculer $\phi(0)$. En déduire que $\forall\, x \in I$, on a $f(\tan(x)) = x$
   c. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$; $f\left(\sqrt{3}\right)$; $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ainsi que celle de c.

7. Tracer la courbe C_f (préciser asymptotes et tangentes à la courbe)