Comment monter les marches

On veut monter un escalier en faisant des pas d'une marche ou bien de deux marches. On doit obligatoirement passer par la dernière marche. On veut établir une formule qui donne, en fonction du nombre de marches, le nombre de façons que l'on a de monter l'escalier en question.

Si l'on met à l'écrit la manière dont on est monté, on obtient une séquence ordonnée de 1 et de 2. Par exemple, si on monte deux fois une seule marche, puis trois fois deux marches, la séquence est : $\{1;1;2;2;2\}$. Mais pour un même nombre de marches total, le nombre de chiffres de la séquence varie si l'on fait varier le nombre de fois que l'on monte une seule marche et le nombre de fois que l'on en monte deux à la fois. Pour se simplifier la vie, on choisit de calculer séparément le nombre de manières de monter en fonction du nombre de fois qu'on a choisi de monter une seule marche à la fois. En d'autres termes, on compte le nombre de façons que l'on a de placer les chiffres 1 et 2 en ayant choisi combien de fois on allait placer le chiffre 1, ce qui a une influence exclusive sur le nombre de chiffres que comportera la séquence. Appelons $N(n)$ le nombre de manières de monter n marches, et $N_i(n)$ le nombre de manières de monter n marches en un nombre i de pas (donc des pas de 1 ou 2 marche(s)), c'est-à-dire le nombre de séquences à i chiffres. Il est clair que $N(n)$ est une somme des $N_i(n)$ où i varie du plus petit nombre de pas possible au plus grand.

Par exemple, si $n = 4$. On doit choisir une séquence de 1 et de 2 telle que la somme de tous ses chiffres soit égale à 4. Si on monte toutes les marches une par une, on a une séquence de quatre 1. Si on les monte toutes deux par deux, on a une séquence de deux 2. Le nombre de chiffres d'une séquence représentant notre manière de monter est compris entre 2 et 4.

Si n est pair, alors

$$N(n) = \sum_{i=n/2}^{n} N_i(n)$$

où $N_i(n)$ désigne le nombre de séquences à i chiffres de 1 et de 2 que l'on peut trouver dont la somme des chiffres fait n. Ce nombre n'est pas très difficile à calculer, il vaut le nombre de manières de répartir les 1 (ou les 2, mais les 1 sont plus faciles à traiter) dans la séquence. Et pour cela, il faut calculer le nombre de 1. Si la séquence a i chiffres, alors il y a i_1 fois le nombre 1 et i_2 fois le nombre 2 où $i_1 + 2i_2 = n$. Et comme $i_2 = i - i_1$, on a $i_1 = 2i - n$. Le nombre de manières de placer ces 1 dans les i places de la séquence vaut donc $\binom{i}{i_1} = \binom{i}{2i-n} = \frac{i!}{(n-i)!(2i-n)!}$. On a donc que lorsque n est pair,

$$N(n) = \sum_{i=n/2}^{n} \frac{i!}{(n-i)!\,(2i-n)!}$$

Si n est impair, alors le nombre minimal de pas à faire est $\frac{n-1}{2} + 1$. On a donc

$$N(n) = \sum_{i=\frac{n-1}{2}+1}^{n} N_i(n)$$

Et

$$N(n) = \sum_{i=\frac{n-1}{2}+1}^{n} \frac{i!}{(n-i)!\,(2i-n)!}$$

On peut généraliser l'expression et dire que pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{N(n) = \sum_{i=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1}^{n} \frac{i!}{(n-i)!\,(2i-n)!}}$$