Equation du troisième degré :

Nous allons résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation du troisième degré suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

La constante est égale à zéro mais nous allons tout de même la mettre :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

En posant$a \neq 0$, on arrive à :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

En exécutant le changement de variable suivant :

$$X = \frac{x^2}{a}$$

On arrive à :

$$a\sqrt{a}X\sqrt{X} + bX + c\sqrt{a}\sqrt{X} + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{aX}(aX + c) + bX + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{aX} + \frac{bX}{aX + c} + \frac{d}{a^2X + ac} = 0$$

En se rappelant à présent qu'on a posé $X = \frac{x^2}{a}$:

$$x^2 + \frac{\frac{bx^2}{a}}{x^2 + c} + \frac{d}{ax^2 + ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{bx^2}{ax^2 + ac} + \frac{d}{ax^2 + ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{bx^2}{a(x^2 + c)} + \frac{d}{a(x^2 + x)} = 0$$

En faisant de nouveau un changement de variable :

$$X = x^2$$

$$X + \frac{bX}{a(X + c)} + \frac{d}{a\left(X + \sqrt{X}\right)} = 0$$

En se rappelant que $d = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{aX(X + c)\left(X + \sqrt{X}\right) + bX\left(X + \sqrt{X}\right)}{a(X + c)\left(X + \sqrt{X}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{aX(X+c)+bX}{a(X+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X(a(X+c)+b)}{a(X+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow X(aX+ac+b) = 0$$

Cette équation admet alors 2 solutions dans $\mathbb{R}$:

$$X = 0$$

$$X = -\left(c + \frac{b}{a}\right)$$

En posant alors la condition que :

$$-\left(c + \frac{b}{a}\right) \geq 0$$

On arrive à :

$$x^2 = -\left(c + \frac{b}{a}\right)$$

$$x = -\sqrt{-\left(c + \frac{b}{a}\right)}$$

$$x = \sqrt{-\left(c + \frac{b}{a}\right)}$$

Les 3 solutions réelles à l'équation initiale sont donc :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{-\left(c + \frac{b}{a}\right)} \\ x = -\sqrt{-\left(c + \frac{b}{a}\right)} \end{cases}$$