Equation du troisième degré :

Nous allons résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation du troisième degré suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

La constante est égale à zéro mais nous allons tout de même la mettre :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

En posant$a \neq 0$, on arrive à :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

En exécutant le changement de variable suivant :

$$X = \frac{x^2}{a}$$

On arrive à :

$$a\sqrt{a}X\sqrt{X} + bX + c\sqrt{a}\sqrt{X} + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{aX}(aX + c) + bX + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{aX} + \frac{bX}{aX + c} + \frac{d}{a^2X + ac} = 0$$

En se rappelant à présent qu'on a posé $X = \frac{x^2}{a}$:

$$x + \frac{\frac{bx^2}{a}}{x^2 + c} + \frac{d}{ax^2 + ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{bx^2}{ax^2 + ac} + \frac{d}{ax^2 + ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{bx^2}{a(x^2 + c)} + \frac{d}{a(x^2 + x)} = 0$$

En faisant de nouveau un changement de variable :

$$X = x^2$$

$$\sqrt{X} + \frac{bX}{a(X + c)} + \frac{d}{a\left(X + \sqrt{X}\right)} = 0$$

En se rappelant que $d = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{X}(X + c)\left(X + \sqrt{X}\right) + bX\left(X + \sqrt{X}\right)}{a(X + c)\left(X + \sqrt{X}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{X}(X+c)+bX}{a(X+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{X}(X+c)+bX=0$$

$$\Leftrightarrow bX=-a\sqrt{X}(X+c)$$

$$\Leftrightarrow b^2X^2=a^2X(X^2+2Xc+c^2)$$

$$\Leftrightarrow X(b^2X-a(X^2+2Xc+c^2)=0$$

$$\Leftrightarrow X(b^2X-aX^2-2acX-ac^2)=0$$

$$\Leftrightarrow X(-aX^2+X(b^2-2ac)-ac^2)=0$$

Cette équation se résout facilement :

$$X=0$$

Et :

$$-aX^2+X(b^2-2ac)-ac^2=0$$

On calcule le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta=(b^2-2ac)^2-4(-a)(-ac^2)$$

$$\Delta=b^4-4b^2ac+4a^2c^2-4a^2c^2$$

$$\Delta=b^4-4b^2ac$$

On suppose alors :

$$\Delta<0$$

L'équation initiale n'a que la solution triviale dans $\mathbb{R}$: $x=0$

Si

$$\Delta=0$$

Alors l'équation admet une solution réelle :

$$X_0=\frac{(b^2-2ac)^2}{2a}$$

En supposant $X_0\geq 0$

On a alors deux solutions :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b^2-2ac}{\sqrt{2a}} \\ x_2=-\dfrac{b^2-2ac}{\sqrt{2a}} \end{cases}$$

Avec la solution triviale : $x = 0$

Si $\Delta > 0$

Alors l'équation

$$-aX^2 + X(b^2 - 2ac) - ac^2 = 0$$

Admet deux solutions :

$$X_{1,2} = \frac{-(b^2 - 2ac) \pm \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-2a}$$

Avec l'hypothèse que $X_{1,2} \geq 0$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{-(b^2 - 2ac) + \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-2a}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-(b^2 - 2ac) + \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-2a}} \\ x_3 = \sqrt{\dfrac{-(b^2 - 2ac) - \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-2a}} \\ x_4 = -\sqrt{\dfrac{-(b^2 - 2ac) - \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-2a}} \end{cases}$$

Sont les 4 solutions de l'équation initiale avec la solution triviale : $x = 0$ dans $\mathbb{R}$.