Fonction de Lambert

K. MASSIN

11 juin 2017

Table des matières

Première partie

Introduction

Cet article traite de la résolution de certains types d'équations transcendantes, équations résolubles par l'utilisation de la fonction de Lambert.

Dans un premier chapitre, sera définie la fonction de Lambert. Nous y aborderons ensuite les équations élémentaires pour lesquelles cette fonction existe.
Il s'agit des équations de la forme :

$$xa^x + b = 0. \tag{1}$$

Un deuxième chapitre traitera des solutions des équations de la forme suivante :

$$a^x + bx = 0. \tag{2}$$

Puis un troisième chapitre détaillera la résolution des équations ci-dessous :

$$a^x + bx + c = 0. \tag{3}$$

Enfin, le quatrième et dernier chapitre détaillera la résolution de plusieurs types d'équations, qui au premier abord semblent différentes des cas étudiés précédemment et nécessitent plus d'étapes dans leur résolution.

Tout au long de l'article, la fonction de Lambert sera notée $W(x)$. Toutes les lettres utilisées, sauf mention contraire, représenteront des nombres complexes, dont la partie imaginaire peut être tant nulle que non-nulle.

Deuxième partie

Les équations et leurs résolutions

Chapitre 1

Équations de type 1 et fonction de Lambert

Il existe plusieurs types d'équations transcendantes résolubles par l'utilisation de la fonction de Lambert.
Nous étudierons par étapes chaque type d'équation, de la plus simple à la plus complexe.

1.1 Définition

Tout d'abord, la fonction de Lambert, notée $W(x)$, est définie par :

$$\begin{aligned} W :&\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \\ &xe^x \mapsto x \end{aligned}$$

Autrement dit, $W(x)$ est la réciproque de la fonction $f(x) = xe^x$.
Cette fonction s'exprime par la série suivante :

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} \cdot x^n.$$

Cette série permet l'obtention du graphe de la fonction ci-contre :

Ce premier chapitre détaille comment trouver la solution des équations de la forme :

$$xa^x + b = 0. \tag{1.1}$$

1.2 Exemples

Prenons quelques exemples d'équations aisément résolubles avec la fonction de Lambert :

$$xe^x = 10. \tag{1.2}$$

Dans (1.2), on applique la fonction de Lambert des deux côtés.

$$x = W(10) \approx 1.7455.$$

Deuxième exemple :

$$x \cdot e^{2x} = 10. \tag{1.3}$$

Ici, on remarque que le 2 en exposant vient compliquer les choses, puisque nous n'avons plus d'expression de la forme $ze^z = k$. La solution est cependant triviale. On multiplie de chaque côté par 2, de sorte que l'exposant et le facteur soient équivalents (ils valent $2x$). Il suffit ensuite d'appliquer la fonction de Lambert et d'isoler x. (1.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 2x \cdot e^{2x} = 20 \Leftrightarrow 2x &= W(20), \\ \Leftrightarrow x &= \frac{W(20)}{2} \approx 1.1025. \end{aligned}$$

Troisième exemple :

$$x \cdot 3^x = 10. \tag{1.4}$$

De par l'absence de l'exponentielle, (1.4) paraît plus complexe à résoudre. Il suffit de se souvenir que $3 = e^{\ln 3}$ et $3^x = e^{x \ln 3}$. (1.4) s'écrit :

$$x \cdot e^{x \ln 3} = 10. \tag{1.5}$$

On multiplie des deux côtés par $\ln 3$ puis on isole x comme vu précédemment :

$$\begin{aligned} (1.5) \Leftrightarrow x \ln 3 \cdot e^{x \ln 3} &= 10 \ln 3, \\ \Leftrightarrow x \ln 3 &= W(10 \ln 3), \\ \Leftrightarrow x &= \frac{W(10 \ln 3)}{\ln 3} \approx 1.6436. \end{aligned}$$

On peut maintenant dire que pour l'équation (1.1), la solution s'écrit :

$$x = \frac{W(-b \ln a)}{\ln a}. \tag{1.6}$$

Chapitre 2

Équations de type 2

Nous allons maintenant nous intéresser aux équations de la forme :

$$a^x + bx = 0. \tag{2.1}$$

2.1 Résolution

On cherche à mettre (2.1) sous la forme $ze^z = t$. On a $a^x = e^{x \ln a}$, donc :

$$\begin{aligned}(2.1) &\Leftrightarrow e^{x \ln a} = -bx, \\ &\Leftrightarrow 1 = -bx \cdot e^{-x \ln a}.\end{aligned}$$

On peut ensuite multiplier des deux côtés par $\frac{\ln a}{b}$, pour obtenir la forme $ze^z = t$ recherchée. On isole ensuite x via la fonction de Lambert.

$$\begin{aligned}(2.1) &\Leftrightarrow \frac{\ln a}{b} = -x \ln a \cdot e^{-x \ln a}, \\ &\Leftrightarrow -x \ln a = W(\frac{\ln a}{b}).\end{aligned}$$

On arrive alors à trouver x :

$$x = -\frac{W(\frac{\ln a}{b})}{\ln a}. \tag{2.2}$$

2.2 Exemples

Prenons par exemple l'expression suivante :

$$8^x + \sqrt{7}x = 0. \tag{2.3}$$

On connaît la formule et on trouve :

$$x = -\frac{W(\frac{\ln 8}{\sqrt{7}})}{\ln 8} \approx -0.2329.$$

Prenons un deuxième exemple, plus complexe :

$$2^{\pi(x-\sqrt{3})} + \sqrt{3}x - 3 = 0. \tag{2.4}$$

La présence du -3 vous dérange ? Elle ne devrait pas. Ici, il faut remarquer le terme en $(x - \sqrt{3})$ qui devrait mettre la puce à l'oreille. On peut en effet factoriser l'expression $\sqrt{3}x - 3$ par $(x - \sqrt{3})$. Nous obtenons alors :

$$2^{\pi(x-\sqrt{3})} + \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) = 0.$$

On peut ensuite poser $y = x - \sqrt{3}$, pour obtenir une équation dont on connaît la solution.

$$2^{\pi y} + \sqrt{3}y = 0.$$

Attention, la forme donnée dans la leçon est $a^x + bx = 0$ et non $a^x - bx = 0$. Il ne faut pas se tromper de signe dans la résolution.

$$y = -\frac{W(\frac{\pi \ln 2}{\sqrt{3}})}{\pi \ln 2}.$$

On remplace ensuite y par $x - \sqrt{3}$ et on isole x :

$$x = -\frac{W(\frac{\pi \ln 2}{\sqrt{3}})}{\pi \ln 2} + \sqrt{3} \approx 1.4318.$$

L'équation que nous venons de résoudre est un cas particulier du type d'équation étudié dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Équations de type 3

Dans le chapitre précédent, nous avons eu affaire avec une équation qui semblait à second membre : $2^{\pi(x-\sqrt{3})} + \sqrt{3}x - 3 = 0$. Un simple changement de variable a permit la résolution du probème. Mais qu'en est-il de $2^{\pi(x-\sqrt{3})} + \sqrt{3}x - 2 = 0$? Ici, la constante a été remplacée par 2, et cela change complètement la donne.
La résolution de ce problème, bien que plus compliquée, se base aussi sur un changement de variable.
L'équation étudiée ici est donc la suivante :

$$a^x + bx + c = 0. \tag{3.1}$$

On remarque que dans le chapitre précédent, la constante c était inexistante ou égale à 0.

3.1 Résolution

Pour résoudre cette équation, un moyen commode serait de supprimer cette constante c, et de se ramener à un cas plus facile étudié dans le chaptire précédent.
On peut pour cela faire un changement de variable : On souhaite que l'expression $bx + c$ soit égale à by. On pose alors :

$$bx + c = by \longrightarrow x = y - \frac{c}{b}.$$

On intègre ce changement dans l'équation :

$$\begin{aligned} a^x + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a^{y-\frac{c}{b}} + b(y - \frac{c}{b}) + c = 0, \\ &\Leftrightarrow a^{-\frac{c}{b}} \cdot a^y + by = 0. \end{aligned}$$

On a maintenant réduis le niveau de l'équation en y.

$$a^y + a^{\frac{c}{b}} by = 0.$$

Puis on résout pour y, et enfin pour x :

$$y = -\frac{W(\frac{\ln a}{b} \cdot a^{-\frac{c}{b}})}{\ln a},$$

$$x = -\frac{W(\frac{\ln a}{b} \cdot a^{-\frac{c}{b}})}{\ln a} - \frac{c}{b}. \tag{3.2}$$

3.2 Exemples

Prenons un premier exemple :

$$e^x + 2x - 8 = 0. \tag{3.3}$$

On identifie directement a, b, et c : $a = e$; $b = 2$; $c = -8$
On sait que $x = y - \frac{c}{b}$, donc $x = y - \frac{-8}{2} = y + 4$
On intègre donc y dans l'équation :

$$e^4 e^y + 2y = 0 \longrightarrow e^y + 2e^{-4} y = 0.$$

On peut alors trouver y puis x :

$$\begin{aligned} y = -\frac{W(\frac{\ln e}{2} \cdot e^{-\frac{-8}{2}})}{\ln e} &\Leftrightarrow y = -W(\frac{e^4}{2}), \\ &\Leftrightarrow x = -W(\frac{e^4}{2}) + 4, \\ &\Leftrightarrow x \approx 1.5778. \end{aligned}$$

Comme second exemple, voilà quelque chose de plus compliqué :

$$4 \ln(3x^2 - 2) - 8x^2 + 3 = 0. \tag{3.4}$$

Il s'agit assurément d'une équation résoluble grâce à la fonction de Lambert. Tout d'abord, on peut tout simplement poser $y = x^2$ pour faire disparaître le terme au carré.

$$4 \ln(3y - 2) - 8y + 3 = 0.$$

On peut ensuite faire un autre changement de variable en posant $u = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{u+2}{3}$

$$4 \ln u - \frac{8}{3} u + 3 - \frac{16}{3} = 0.$$

Après réarrangement des termes, on obtient :

$$\ln u - \frac{2}{3}u - \frac{7}{12} = 0.$$

Ici, le logarithme ne correspond pas à une forme inversable via la fonction de Lambert. Aussi peut-on noter $v = \ln u$, pour obtenir, après réarrangement des termes, la forme étudiée dans ce chapitre :

$$e^v - \frac{3}{2}v + \frac{7}{8} = 0.$$

On applique ensuite la formule :

$$v = -W(-\frac{2}{3}e^{\frac{7}{12}}) + \frac{7}{12}.$$

Il suffit maintenant de réintègrer $v = \ln(3x^2 - 2)$ dans l'équation :
On a $x = \pm\sqrt{\frac{e^v+2}{3}}$, et l'équation devient :

$$x = \pm\frac{\sqrt{e^{\frac{1}{12}(7-12W(-\frac{2}{3}e^{\frac{7}{12}}))} + 2}}{\sqrt{3}}.$$

Chapitre 4

Équations de type 4 et plus

Dans ce chapitre, nous aborderons la plupart des cas d'équation de degré supérieur.

4.1 Type 4

Le premier cas étudié est :

$$a^x + b(x+\mu)^n = 0.$$

Ici, l'exposant n gêne la suite des calculs, aussi allons-nous le faire disparaître grâce aux logarithmes :

$$a^x = -b(x+\mu)^n,$$
$$x\ln(a) = \ln(-b) + n\ln(x+\mu).$$

On effectue maintenant un changement de variable pour revenir à la forme étudiée dans le chapitre précédent.
On pose $y = \ln(x+\mu)$, ce qui implique $x = e^y - \mu$

$$\ln(a)(e^y - \mu) - ny - \ln(-b) = 0,$$
$$e^y - \frac{n}{ln(a)}y - \log_a(-b) - \mu = 0.$$

Pour plus de lisibilité, on note $p = -\frac{n}{ln(a)}$ et $q = -\log_a(-b) - \mu$:

$$e^y + py + q = 0.$$

Il suffit ensuite d'appliquer la formule du chapitre précédent pour trouver y :

$$y = -W(\frac{e^{-\frac{q}{p}}}{p}) - \frac{q}{p}.$$

On peut ensuite réintroduire x :

$$\ln(x+\mu) = -W(\frac{e^{-\frac{q}{p}}}{p}) - \frac{q}{p}.$$

Réintroduire a, b, μ et n complique énormément les simplifications de calcul, mais au final, nous obtenons x :

$$x = -\frac{n}{\ln(a)}\left(W\left(-\frac{(-\frac{a^{-\mu}}{b})^{\frac{1}{n}} \cdot \ln(a)}{n}\right)\right) - \mu.$$