ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

*** **88** On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

et C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1 **a.** Établir le tableau de variation de g (on ne fera pas de calcul de limites).
Calculer $g(1)$. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que cette fonction a même signe que la fonction g.

c. Étudier la fonction f.

2 **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe C_f. Donner une équation de cette asymptote.

b. Établir le tableau de signes de $f(x) - \frac{x}{2}$. En déduire la position relative de la courbe C_f et de son asymptote oblique.

c. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe C_f pour lequel la tangente à C_f est parallèle à l'asymptote oblique.

3 Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une solution. Soit x_0 cette solution. Montrer que $0{,}7 < x_0 < 0{,}8$.

4 Construire la courbe C_f en tenant compte de tous les résultats trouvés.

*** **89** **Première partie**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x}\ln x$$

1 **a.** Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \frac{x-1}{x}$

b. En déduire les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2 **a.** Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = x - 1 + \ln x$$

b. Étudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln x$ et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de tracer la courbe, ni de déterminer les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.)

c. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

d. À l'aide des renseignements précédents, étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Deuxième partie

On définit, pour tout réel x strictement positif, la fonction h par :

$$h(x) = \ln x - f(x)$$

1 **a.** Vérifier que, pour tout réel x strictement positif :

$$h(x) = \frac{1}{x}\ln x$$

b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Étudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
En déduire la position relative de la courbe (Γ) représentant la fonction f et de la courbe (γ) d'équation $y = \ln x$.

2 Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer les courbes (Γ) et (γ).
On prendra pour unité de longueur 2 cm sur chacun des axes de coordonnées.

*** **90** **Première partie**

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x + x + 1$$

a. Donner l'expression de la dérivée $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de g. (On ne demande ni courbe, ni limites.)

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

a. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition.

b. Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut s'exprimer simplement à l'aide de $g(x)$.

c. À l'aide de la première partie, donner les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

d. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative C au point d'abscisse 1.

e. Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. Construire soigneusement T et C.