Soit P la fonction définie sur IR* par $P(x)=n$ où n est l'entier naturel tel que $n<|x|\leq n+1$
Soit f la fonction définie sur IR par

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ x+1 \text{ si } P(x) \text{ est pair et } x>0 \\ -x+1 \text{ si } P(x) \text{ est impair et } x>0 \\ x-1 \text{ si } P(x) \text{ est pair et } x<0 \\ -x-1 \text{ si } P(x) \text{ est impair et } x<0 \end{cases}$$

<u>Montrons que pour tout $x\in IR$, $fof(x)=-x$:</u>
$IR=]-\infty\ ;0[\cup\{0\}\cup]0;+\infty[$ donc f est définie sur IR

Si $x=0$, $f(0)=0$ donc $fof(0)=f(0)=0$

Si $P(x)$ est pair et $x>0$, alors $f(x)=x+1$
Or $P(x)=n$ où n est l'entier naturel tel que $n<|x|\leq n+1$
$\Leftrightarrow$ $n<x\leq n+1$ comme $x>0$
$\Leftrightarrow$ $n+1<x+1\leq n+2$
$\Leftrightarrow$ $n+1<|x+1|\leq n+2$ comme $x+1>0$ puisque $x>0$
Or comme $P(x)$ est pair, alors n est pair donc $n+1$ est impair
Par conséquent $P(x+1)$ est impair.
Or comme $x+1>0$, alors $f(x+1)=-(x+1)+1=-x-1+1=-x$
D'où $fof(x)=-x$

Si $P(x)$ est impair et $x>0$, alors $f(x)=-x+1$
Or $P(x)=n$ où n est l'entier naturel tel que $n<|x|\leq n+1$
$\Leftrightarrow$ $n<x\leq n+1$ comme $x>0$
Donc $1<x$ comme $n\geq 1$ puisque n est impair
Par conséquent $-x+1<0$ donc $|-x+1|=x-1$
D'où $n-1<|-x+1|\leq n$
Or comme $P(x)$ est impair, alors n est impair donc $n-1$ est pair
Par conséquent $P(-x+1)$ est pair.
Or comme $-x+1<0$, alors $f(-x+1)=-x+1-1=-x$
D'où $fof(x)=-x$

Si $P(x)$ est pair et $x<0$, alors $f(x)=x-1$
Or $P(x)=n$ où n est l'entier naturel tel que $n<|x|\leq n+1$
$\Leftrightarrow$ $n<-x\leq n+1$ comme $x<0$
$x<0$ donc $x<1$ $\Leftrightarrow x-1<0$
D'où $|x-1|=-x+1$
Par conséquent $n+1<|x-1|\leq n+2$
Or comme $P(x)$ est pair, alors n est pair donc $n+1$ est impair
Par conséquent $P(x-1)$ est impair.
Or comme $x-1<0$, alors $f(x-1)=-(x-1)-1=-x+1-1=-x$
D'où $fof(x)=-x$

Si $P(x)$ est impair et $x<0$, alors $f(x)=-x-1$
Or $P(x)=n$ où n est l'entier naturel tel que $n<|x|\leq n+1$
$\Leftrightarrow$ $n<-x\leq n+1$ comme $x<0$
Donc $1<-x$ comme $n\geq 1$ puisque n est impair
D'où $-x-1>0$
Il en résulte que $|-x-1|=-x-1$
$n-1<|-x-1|\leq n$
Or comme $P(x)$ est impair, alors n est impair donc $n-1$ est pair
Par conséquent $P(-x-1)$ est pair.
Or comme $-x-1>0$, alors $f(-x-1)=-x-1+1=-x$
D'où $fof(x)=-x$

Il en résulte que pour tout $x \in IR$, $fof(x)=-x$