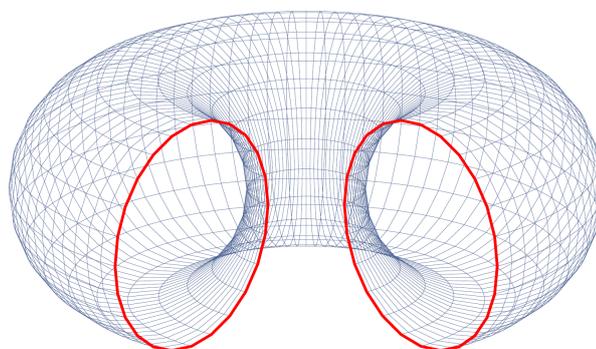


JONATHAN MULLER

Géométrie Différentielle

Notes de cours



D'après le cours donné en 2007/2008
par I. Itenberg.



Table des Matières

Avant-propos	v
I Notions de base	1
I.1 Difféomorphismes	2
I.2 Coordonnées	2
I.3 Submersions et immersions	3
I.4 Théorème du rang constant	5
I.5 Théorème des fonctions implicites	6
I.6 Sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^n	6
II Courbes planes	9
II.1 Courbes régulières	10
II.2 Courbes implicites	11
II.3 Points doubles d'une courbe immergée dans le plan	12
II.4 Contacts de deux courbes régulières en un point	12
II.5 Points d'inflexion	14
II.6 Longueur d'arc	14
II.7 Courbure d'une courbe	15
II.8 Repère de Frenet pour les courbes planes	16
III Courbes dans \mathbb{R}^n	19
III.1 Courbes dans \mathbb{R}^3	20
III.2 Sous-espaces osculateurs	23
III.3 Formules de Frenet pour les courbes dans \mathbb{R}^n	23

IV Surfaces dans \mathbb{R}^3	27
IV.1 Surfaces paramétrées régulières	28
IV.2 Première forme quadratique	29
IV.3 1-formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	31
IV.4 Formes quadratiques différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	32
IV.5 Métrique riemannienne sur un ouvert de \mathbb{R}^n	33
IV.6 Surfaces dans \mathbb{R}^3 définies implicitement	34
IV.7 Surfaces isométriques	35
IV.8 La deuxième forme quadratique d'une surface	37
IV.9 Endomorphisme de Weingarten	42
IV.10 Theorema egregium	44
V Étude des sous-variétés de \mathbb{R}^n	47
V.1 Sous-variétés immergées	48
V.2 Espaces tangents	48
V.3 Extrema liés, méthode des multiplicateurs de Lagrange	49
V.4 Applications définies sur une sous-variété	50
V.5 Fibré tangent	51
V.6 Fibrés vectoriels	52
V.7 Fibré tangent de la sphère S^k	54
Références	55

Avant-propos

Ce document est basé sur le cours de géométrie différentielle donné en Master 1 de Mathématiques Fondamentales et Appliquées durant l'année 2007/2008 par M. Ilia Itenberg. Il contient a priori tout le cours qui a été dispensé, mis à part certaines remarques orales, les exercices et pas mal de figures (fastidieuses à réaliser). Ce document peut servir à disposer d'un support de travail propre, condensé et d'un seul tenant, mais ne doit surtout pas laisser le lecteur penser qu'il peut se dispenser d'assister au cours ou de prendre des notes : ça serait une très grave erreur.

La géométrie différentielle est la branche de la géométrie qui vise à étudier des objets géométriques à l'aide d'outils du calcul différentiel. La notion essentielle de cette théorie est celle de variété différentiable.

Ce document a été réalisé sur mon temps libre et son utilisation est libre (je fournis d'ailleurs la source \LaTeX à qui la demande, il suffit de m'envoyer un mail). Je tiens en outre à remercier M. Itenberg de m'avoir autorisé à rendre publiques ces notes, et d'avoir bien voulu les relire et les corriger. J'espère qu'elles aideront certains étudiants, mais aussi et surtout que personne n'en fera une mauvaise utilisation, au risque d'échouer en géométrie différentielle.

Pour contacter l'auteur de ces notes : TheYggdrazil@gmail.com

Version : 2.0

Tapé en \LaTeX

I

Notions de base

Sommaire

I.1	Difféomorphismes	2
I.2	Coordonnées	2
I.3	Submersions et immersions	3
I.4	Théorème du rang constant	5
I.5	Théorème des fonctions implicites	6
I.6	Sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^n	6

I.1 Difféomorphismes

Dans ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels normés définis sur \mathbb{R} et de dimensions finies. Pour préciser la dimension, on va utiliser les notations E_n, F_m , etc...

DEFINITION I.1.1 : *Soit Ω_1 un ouvert de E_n et Ω_2 un ouvert de F_n . Une application $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est un C^k -difféomorphisme (ici $k \in \mathbb{N}^*$ ou $k = +\infty$) de Ω_1 et Ω_2 si f est bijective, de classe C^k et si f^{-1} est aussi de classe C^k .*

DEFINITION I.1.2 : *Soit Ω un ouvert de E_n et x_0 un point de Ω . Une application $f: \Omega \rightarrow F_n$ est un C^k -difféomorphisme local au point x_0 s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $f(x_0)$ tels que $f|_U$ soit un C^k -difféomorphisme de U et V .*

THEOREME I.1.3 (d'inversion locale) : *Soit Ω un ouvert de E_n , x_0 un point de Ω et $f: \Omega \rightarrow F_n$ une application de classe C^k . Alors f est un C^k -difféomorphisme local en x_0 si et seulement si l'application $f'(x_0)$ est inversible.*

REMARQUE : En particulier, si f est de classe C^k et un C^1 -difféomorphisme local en x_0 , alors f est un C^k -difféomorphisme local en x_0 .

Pour vérifier que $f'(x_0)$ est inversible, c'est-à-dire que $f'(x_0) \in \text{ISO}(E_n, F_n)$, on peut identifier E_n et F_n avec \mathbb{R}^n (en choisissant des bases) et calculer la matrice jacobienne de f en x_0 .

I.2 Coordonnées

Considérons un espace vectoriel normé E_n et fixons une base de E_n . Ceci nous permet d'attribuer à chaque point x de E_n ses coordonnées cartésiennes (x_1, \dots, x_n) par rapport à la base choisie. Si on choisit une autre base, on obtient un autre système de coordonnées (notons les y_1, \dots, y_n) sur E_n .

On a pour tous $1 \leq i, j \leq n$:

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n),$$

$$y_j = y_j(x_1, \dots, x_n),$$

et

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j.$$

On obtient une matrice $A = (a_{i,j})$ inversible ($\det(A) \neq 0$). C'est la **matrice de passage** de la première base à la deuxième.

Remarquons que $a_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$.

Considérons maintenant un ouvert Ω_1 de \mathbb{R}^n et une application $f: \Omega_1 \rightarrow E_n$ de classe C^1 . Supposons que l'image de f contienne un ouvert Ω_2 de E_n . Cette application f permet d'introduire des nouvelles coordonnées dans Ω_2 .

Si $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega_1$ est tel que $f(z_1, \dots, z_n) \in \Omega_2$, on dit que (z_1, \dots, z_n) sont les nouvelles coordonnées de $f(z_1, \dots, z_n)$. On a $x_i = x_i(z_1, \dots, z_n)$ pour $1 \leq i \leq n$.

EXEMPLE : Soit $E_n = \mathbb{R}^2$ et $\Omega_1 = \{(r, \theta) \mid r > 0\}$. On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \Omega_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array} \quad (\text{I.1})$$

On obtient les coordonnées polaires sur $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

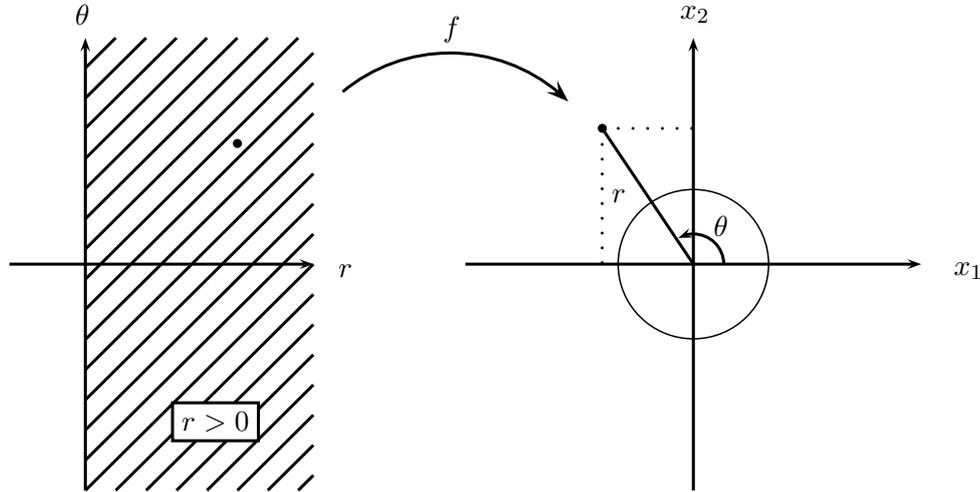


FIGURE I.1 – Coordonnées polaires

REMARQUE : Dans cet exemple, f n'est pas injective.

DEFINITION I.2.1 : Un point $(z_1^\circ, \dots, z_n^\circ)$ de Ω_1 (et l'image de ce point par f) est dit non singulier pour les coordonnées définies par f si la matrice

$$A = \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_j} (z_1^\circ, \dots, z_n^\circ) \right)$$

est inversible. La matrice A est la matrice jacobienne du changement de coordonnées donné par f .

REMARQUE : La matrice A est la matrice jacobienne de f si on identifie E_n avec \mathbb{R}^n en utilisant la base choisie.

PRINCIPE GENERAL : Un C^1 -difféomorphisme local peut être vu comme un changement de coordonnées dans un voisinage d'un point.

I.3 Submersions et immersions

DEFINITION I.3.1 : Soit Ω un ouvert de E_n . Une application $f: \Omega \rightarrow F_m$ est appelée submersion de classe C^k (k peut être $+\infty$) si f est de classe C^k et, pour tout point $x_0 \in \Omega$, l'application $f'(x_0)$ est surjective.

REMARQUE : S'il existe une submersion $f: \Omega \rightarrow F_m$, alors $n \geq m$.

EXEMPLE : Si f est linéaire et surjective, alors f est une submersion.

THEOREME I.3.2 : *Soit Ω un ouvert de E_n , x_0 un point de Ω et $f: \Omega \rightarrow F_m$ une submersion de classe C^k . Alors il existe :*

- un voisinage ouvert U de $x_0 \in \Omega$,
 - un voisinage ouvert V de $0 \in E_n$,
 - un C^k -difféomorphisme de U et V appelé φ ,
 - et une application linéaire surjective ℓ
- tels que $(f \circ \varphi^{-1})(x) = f(x_0) + \ell(x)$ pour tout point $x \in V$.

REMARQUE : Si $n = m$, cet énoncé “devient” le théorème d’inversion locale.

DÉMONSTRATION : Nous n’allons démontrer ce théorème que dans le cas particulier où $n = 2$ et $m = 1$ (le cas général est laissé en exercice). On peut alors supposer que $E_n = \mathbb{R}^2$ et $F_m = \mathbb{R}$, et que $x_0 = (0, 0)$ et $f(x_0) = 0$.

L’une des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ est non nulle. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq 0$.

On pose alors $\varphi(x, y) = (f(x, y), y)$. Le théorème d’inversion locale nous dit que, dans un voisinage de $(0, 0)$, l’application φ est un C^k -difféomorphisme sur son image. De plus, on a par construction que $f = \ell \circ \varphi$, où ℓ est l’application linéaire

$$\begin{aligned} \ell: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

On a alors $f \circ \varphi^{-1} = \ell$. □

DEFINITION I.3.3 : *Soit Ω un ouvert de E_n . Une application $f: E_n \rightarrow F_m$ est appelée immersion de classe C^k (k peut être $+\infty$) si f est de classe C^k et, pour tout point $x_0 \in \Omega$, l’application $f'(x_0)$ est injective.*

REMARQUE : S’il existe une immersion $f: \Omega \rightarrow F_m$, alors $n \leq m$.

EXEMPLE : Si f est linéaire et injective, alors f est une immersion.

THEOREME I.3.4 : *Soit Ω un ouvert de E_n , x_0 un point de Ω et $f: \Omega \rightarrow F_m$ une immersion de classe C^k . Alors il existe :*

- un voisinage ouvert U de $f(x_0) \in F_m$,
 - un voisinage ouvert V de $0 \in F_m$,
 - un C^k -difféomorphisme λ de U et V ,
 - et une application linéaire injective $\ell: E_n \rightarrow F_m$
- tels que $(\lambda \circ f)(x) = \ell(x - x_0)$ pour tout $x \in f^{-1}(U)$.

REMARQUE : $f^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de x_0 (U voisinage ouvert et f continue).

DÉMONSTRATION : On considère le cas $n = 1$ et $m = 2$ (le cas général est laissé en exercice). On peut alors supposer que $E = \mathbb{R}$ et on peut choisir une base de F_2 de telle façon que $f'(x_0)(1)$ (c’est un vecteur non nul car f est une immersion) soit le premier vecteur de la base. On a dans ce cas $f = (f_1, f_2)$, avec $f: \Omega \rightarrow F_2$.

Pour $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}$, posons :

$$\phi(x, y) = (f_1(x), f_2(x) + y)$$

L’application $\phi: F_2 \supset \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 = F_2$ est un C^k -difféomorphisme local en $(x_0, 0)$ et on a

$$\phi^{-1}(f_1(x), f_2(x)) = (x, 0)$$

On pose alors $\lambda = \phi^{-1} - (x_0, 0)$, et on obtient :

$$(\lambda \circ f)(x) = \phi^{-1}(f_1(x), f_2(x)) - (x_0, 0) = (x, 0) - (x_0, 0) = (x - x_0, 0)$$

On pose finalement

$$\begin{aligned} \ell: \mathbb{R} = E_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 = F_2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Donc $(\lambda \circ f)(x) = \ell(x - x_0)$. □

I.4 Théorème du rang constant

DEFINITION I.4.1 : Soit Ω un ouvert de E_n . Une application de classe C^k $f: \Omega \rightarrow F_m$ est dite de rang constant si le rang de sa dérivée en tout point de Ω est constant (ne dépend pas du point choisi).

EXEMPLE : Une application linéaire est une application de rang constant.

DEFINITION I.4.2 : Pour un point $x \in \Omega$, le rang de f en x (noté $\text{rg}(f, x)$) est le rang de $f'(x)$.

THEOREME I.4.3 : L'application

$$\begin{aligned} r: \Omega &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \text{rg}(f, x) \end{aligned}$$

est une application semi-continue inférieurement, ce qui signifie que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Omega_p = \{x \in \Omega \mid r(x) > p\}$ est un ouvert.

COROLLAIRE I.4.4 : Si $\text{rg}(f, x_0) = p$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $\text{rg}(f, x) \geq p$ pour tout $x \in U$ (il suffit de remarquer que $\text{rg}(f, x_0) > p - 1$).

THEOREME I.4.5 (Théorème du rang constant) : Soit Ω un ouvert de E_n , x_0 un point de Ω et $f: \Omega \rightarrow F_m$ une application de classe C^k et de rang constant. Alors il existe :

- un voisinage ouvert U_1 de $x_0 \in E_n$,
 - un voisinage ouvert V_1 de $0 \in E_n$,
 - un voisinage ouvert U_2 de $f(x_0) \in F_m$,
 - un voisinage ouvert V_2 de $0 \in F_m$,
 - un C^k -difféomorphisme $\varphi: U_1 \rightarrow V_1$ de U_1 et V_1 ,
 - un C^k -difféomorphisme $\lambda: U_2 \rightarrow V_2$ de U_2 et V_2 ,
 - et une application linéaire $\ell: E_n \rightarrow F_m$
- tels que $f(U_1) \subset U_2$ et $(\lambda \circ f \circ \varphi^{-1})(a) = \ell(a)$ pour tout $a \in V_1$.

DÉMONSTRATION : On considère le cas $n = m = 2$ et $\text{rg}(f) = 1$ (le cas général est laissé en exercice). On peut supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. On identifie alors E_2 avec \mathbb{R}^2 .

On choisit un système de coordonnées linéaires au but de sorte que la première coordonnée de f soit de rang 1 au voisinage de x_0 . On fait alors un changement de coordonnées (pas forcément linéaire) à la source et on obtient $f(x, y) = (x, \theta(x, y))$. Puisque f est de rang 1, on a $\frac{\partial \theta}{\partial y} \equiv 0$. On fait encore un changement de coordonnées (pas forcément linéaire) au but $\lambda: (x, y) \mapsto (x, y - \theta(x, y))$.

On obtient alors $(\lambda \circ f \circ \varphi^{-1})(x, y) = \lambda(x, \theta(x, y)) = (x, 0)$. L'application linéaire ℓ définie par

$$\begin{aligned} \ell: E_2 = \mathbb{R}^2 &\longrightarrow F_2 = \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

convient. □

I.5 Théorème des fonctions implicites

THEOREME I.5.1 : Soit E, F et G des espaces vectoriels normés. Soit $x_0 \in E, y_0 \in F$ et $z_0 \in G$. Soit Ω un ouvert contenant (x_0, y_0) , $\Omega \subset E \times F$, et $f: \Omega \rightarrow G$ une application de classe C^k . On suppose que :

- (a) $f(x_0, y_0) = z_0$,
- (b) $f'_F(x_0, y_0)$ est un isomorphisme de F et G .

Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans E , un voisinage ouvert V de y_0 dans F et une application $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^k tels que :

- (i) $f(x, \varphi(x)) = z_0$ pour tout $x \in U$,
- (ii) Si $(x, y) \in U \times V$ et $f(x, y) = z_0$, alors $y = \varphi(x)$.

On dit que l'expression $f(x, y) = z_0$ définit une application $y(x)$ **implicitement**.

En général, dans les exercices on ne nous donne pas explicitement E, F et G mais plutôt $E \times F$. Alors il faut choisir E et F judicieusement de sorte que la dérivée partielle soit un isomorphisme.

I.6 Sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^n

DEFINITION I.6.1 : Un sous-ensemble M de \mathbb{R}^n est une sous-variété de classe C^k et de codimension p (i.e. de dimension $n - p$), si pour tout point x de M , il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{R}^n et un C^k -difféomorphisme φ de U sur un ouvert V de \mathbb{R}^n tels que

$$\varphi(U \cap M) = V \cap E,$$

où E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$.

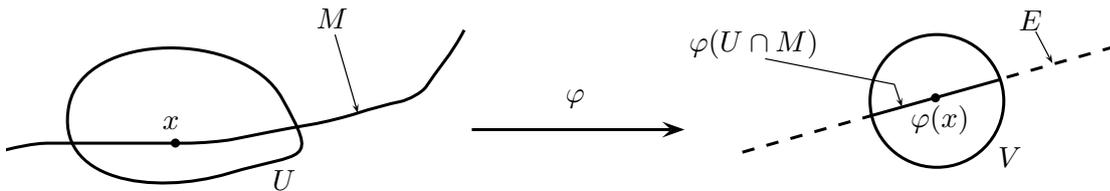


FIGURE I.2 – Sous-variété de \mathbb{R}^2 de codimension 1

THEOREME I.6.2 : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est une sous-variété de classe C^k et de codimension p .
2. Pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U_1 de x_0 dans \mathbb{R}^n et p fonctions $g_1, \dots, g_p: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k telles que :
 - (i) $M \cap U_1 = \{x \in U_1 \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$,
 - (ii) Les formes linéaires $g'_1(x_0), \dots, g'_p(x_0)$ sont linéairement indépendantes.
 (Si on pose $G(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$, cette dernière condition est équivalente au fait que $G'(x_0)$ est surjective, autrement dit que G est une submersion au voisinage de x_0 .)

3. Pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U_2 de x_0 dans \mathbb{R}^n , un ouvert V_2 de \mathbb{R}^{n-p} et $f: V_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k telle que :

(i) f est une immersion en tout point de V_2 ,

(ii) f est un homéomorphisme de V_2 et $M \cap U_2$.

Dans cette situation, on dit que f est une paramétrisation locale de M au voisinage de x_0 .

DÉMONSTRATION : On ne va montrer que (i) \Leftrightarrow (ii) (le reste est sur la feuille d'exercices).

(i) \Rightarrow (ii) On suppose que M est une sous-variété de classe C^k et de codimension p . Soit alors x_0 un point de M . On considère U, V, φ et E comme dans la définition 1.6.1.

Puisque E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$, il est annulé par p formes linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de \mathbb{R}^n qui sont linéairement indépendantes. On considère alors les applications $g_i = \alpha_i \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$.

On a alors, pour tout $x \in U$ et tout $i = 1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} x \in M \cap U &\Leftrightarrow \varphi(x) \in E, \\ &\Leftrightarrow (\alpha_i \circ \varphi)(x) = 0, i = 1, \dots, p, \\ &\Leftrightarrow g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Les formes linéaires $g'_1(x_0), \dots, g'_p(x_0)$ sont linéairement indépendantes car φ est un C^k -difféomorphisme et les formes linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont linéairement indépendantes ($g'_i(x_0) = \alpha_i \circ \varphi'(x_0)$ pour tout $i = 1, \dots, p$).

(ii) \Rightarrow (i) Soit x_0 un point de M . On a un voisinage ouvert U_1 de x_0 dans \mathbb{R}^n et une application $G = (g_1, \dots, g_p)$ comme dans l'énoncé. En particulier, G est une application de classe C^k et une submersion au voisinage de x_0 .

D'après le théorème sur les submersions (théorème 1.3.2), il existe un voisinage ouvert $U \subset U_1$ de x_0 dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^n et un C^k -difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow V$ tels que $G \circ \varphi^{-1}$ soit une application affine surjective que l'on note π . On pose alors $E = \pi^{-1}(0)$.

L'application π est surjective, $\dim(E) = n - p$ et de plus, $\varphi(M \cap U) = V \cap \pi^{-1}(0) = V \cap E$.

Par conséquent, M est une sous-variété de classe C^k et de codimension p . □

II

Courbes planes

Sommaire

II.1	Courbes régulières	10
II.2	Courbes implicites	11
II.3	Points doubles d'une courbe immergée dans le plan	12
II.4	Contacts de deux courbes régulières en un point	12
II.5	Points d'inflexion	14
II.6	Longueur d'arc	14
II.7	Courbure d'une courbe	15
II.8	Repère de Frénet pour les courbes planes	16

II.1 Courbes régulières

DEFINITION II.1.1 : Une courbe paramétrée de classe C^k dans \mathbb{R}^2 est une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

DEFINITION II.1.2 : Une courbe paramétrée $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite régulière si f est une immersion.

EXEMPLE :

1. La courbe paramétrée

$$f_1: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t, t^2) \end{array}$$

est de classe C^∞ et régulière.

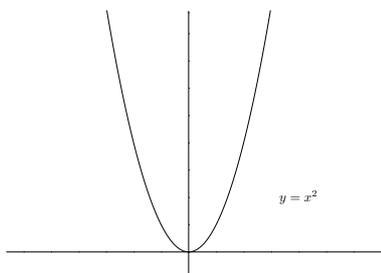


FIGURE II.1 – L'image de la courbe paramétrée f_1

En effet, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a $J_{f_1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t_0 \end{pmatrix}$, et donc $f_1'(t_0)$ est injective pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$.

2. La courbe paramétrée

$$f_2: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t^2, t^3) \end{array}$$

est de classe C^∞ mais n'est pas régulière.

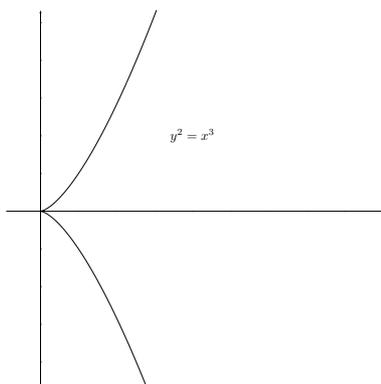


FIGURE II.2 – L'image de la courbe paramétrée f_2

En effet, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a $J_{f_2}(t_0) = \begin{pmatrix} 2t_0 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix}$, et donc $f_2'(0)$ est l'application nulle.

En revanche, la courbe paramétrée

$$f_2|_{\mathbb{R}_+^*} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array}$$

est régulière.

DEFINITION II.1.3 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. Alors le vecteur $f'(t_0)(1)$ de \mathbb{R}^2 (on va écrire simplement $f'(t_0)$ car on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ avec F pour tout espace vectoriel F) s'appelle le vecteur vitesse de f au point (ou au moment) t_0 .

REMARQUE : Une courbe paramétrée $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est régulière si et seulement si, pour tout $t_0 \in I$, le vecteur vitesse $f'(t_0)$ est non nul.

DEFINITION II.1.4 : Deux courbes paramétrées $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f_2: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k sont dites équivalentes (ou positivement équivalentes), s'il existe un C^k -difféomorphisme (croissant) $\theta: I \rightarrow J$ tel que $f_1 = f_2 \circ \theta$.

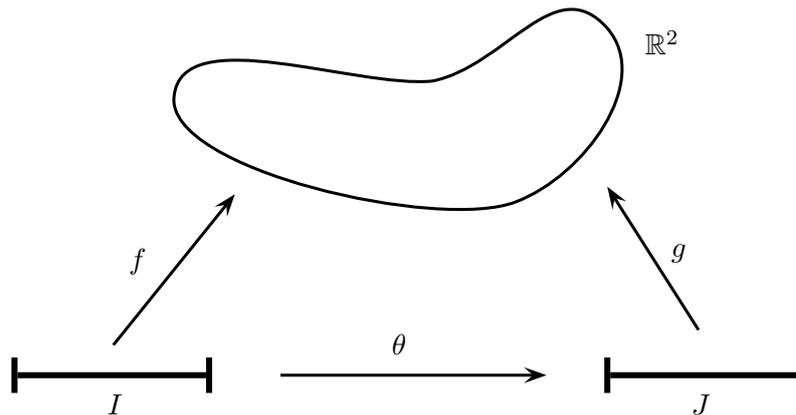


FIGURE II.3 – Courbes paramétrées équivalentes

DEFINITION II.1.5 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $t_0 \in I$. On pose alors $x_0 = f(t_0)$. La droite affine dirigée par le vecteur vitesse $f'(t_0)$ et passant par x_0 s'appelle la droite tangente à la courbe f au point x_0 (ou en t_0).

REMARQUE : On pourra remarquer que la droite tangente en x_0 ne dépend que de la classe d'équivalence de f .

II.2 Courbes implicites

DEFINITION II.2.1 : Soit $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k , où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une valeur régulière de g est un nombre réel λ tel que, pour tout point $x \in g^{-1}(\lambda)$, l'application linéaire $g'(x)$ est surjective.

REMARQUE : Le théorème sur les sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^n (Théorème 1.6.2) implique que si λ est une valeur régulière de g et si $g^{-1}(\lambda) \neq \emptyset$, alors $g^{-1}(\lambda)$ est une sous-variété (de classe C^k si g est de classe C^k) de dimension 1 de \mathbb{R}^2 .

DEFINITION II.2.2 : Une courbe lisse (de classe C^k) dans \mathbb{R}^2 est une sous-variété (de classe C^k) de dimension 1 de \mathbb{R}^2 .

REMARQUE : Soit C une courbe lisse de classe C^k dans \mathbb{R}^2 et (x_0, y_0) un point de C . Alors d'après le théorème sur les sous-variétés différentiables (Théorème 1.6.2), il existe une paramétrisation locale de classe C^k de C au voisinage de (x_0, y_0) , autrement dit, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans \mathbb{R}^2 et une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k telle que :

- (a) f est une immersion en tout point de I ,
- (b) f est un homéomorphisme de I et $C \cap U$.

En particulier, on peut parler de la droite tangente à C en (x_0, y_0) .

PROPOSITION II.2.3 : Soit C une courbe lisse dans \mathbb{R}^2 définie par l'équation $g(x, y) = 0$, où $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k (0 est valeur régulière de g et $g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$), et $(x_0, y_0) \in C$. Alors la droite tangente à C en (x_0, y_0) est dirigée par $\text{Ker}(g'(x_0, y_0))$.

DÉMONSTRATION : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation locale de C au voisinage du point (x_0, y_0) . On pose $t_0 = f^{-1}(x_0, y_0)$. On a $g \circ f \equiv 0$ et $g'(x_0, y_0)(f'(t_0)) = 0$. Par conséquent, le vecteur vitesse $f'(t_0)$ de f en t_0 appartient à $\text{Ker}(g'(x_0, y_0))$.

D'autre part, $\dim(\text{Ker}(g'(x_0, y_0))) = 1$ et $f'(t_0) \neq 0$, ce qui permet de conclure. □

II.3 Points doubles d'une courbe immergée dans le plan

DEFINITION II.3.1 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et p un point de $f(I)$. On dit que p est un point double ordinaire de f si :

- (i) $f^{-1}(p)$ se réduit à deux points $t_1, t_2 \in I$,
- (ii) Il existe un voisinage ouvert U de p dans \mathbb{R}^2 et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\cap]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[= \emptyset$, et $f(t) \in U \Leftrightarrow t \in]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\cup]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$,
- (iii) $f'(t_1)$ et $f'(t_2)$ sont linéairement indépendants.

PROPOSITION II.3.2 : Soit p un point double ordinaire d'une courbe régulière $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Alors il existe un voisinage ouvert U de p dans \mathbb{R}^2 , un voisinage ouvert V de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et un difféomorphisme (de classe C^k si f est de classe C^k) $\varphi: U \rightarrow V$ tel que $\varphi(f(I) \cap U)$ soit la réunion des deux segments $] - \varepsilon, +\varepsilon[\times \{0\}$ et $\{0\} \times] - \varepsilon, +\varepsilon[$.

DÉMONSTRATION : La preuve est laissée en exercice. Une indication tout de même :

Considérer l'application $\psi: (x, y) \mapsto f(t_1 + x) + f(t_2 + y) - p$ définie au voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 . □

II.4 Contacts de deux courbes régulières en un point

Dans ce paragraphe, on suppose que les applications différentiables considérées sont de classe C^∞ .

RAPPEL (Formule de Taylor) : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

Au voisinage de t_0 , on a :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}f^{(k)}(t_0) + o\left((t - t_0)^k\right). \quad (\text{II.1})$$

DEFINITION II.4.1 : Soit I et J deux intervalles ouverts tels que $I \cap J \neq \emptyset$, t_0 un point de $I \cap J$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que deux courbes paramétrées régulières $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f_2: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ ont un contact d'ordre k en t_0 (ou qu'elles sont tangentes à l'ordre k en t_0) si on a la relation $\|f_1(t) - f_2(t)\| = o\left((t - t_0)^k\right)$.

REMARQUE : Si f_1 et f_2 ont un contact d'ordre k en t_0 , alors $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ et on dit que f_1 et f_2 ont un contact d'ordre k en $f_1(t_0) = f_2(t_0)$.

REMARQUE : La formule de Taylor donne immédiatement une courbe paramétrée régulière de degré k (c'est-à-dire une application polynomiale de degré k) qui est tangente à l'ordre k à une courbe paramétrée donnée en un point donné. En effet, le formule de Taylor peut se lire de la façon suivante :

$$\|f_1(t) - f_k(t)\| = o\left((t - t_0)^k\right),$$

$$\text{où } f_k(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}f^{(k)}(t_0).$$

En particulier, en tout point $t_0 \in I$, une courbe paramétrée régulière $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tangente à l'ordre 1 à sa droite tangente (affine) $f_1(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)$. L'application f_1 paramétrise la droite tangente à f en t_0 .

DEFINITION II.4.2 : Soit C_1 et C_2 deux courbes lisses (de classe C^∞) dans \mathbb{R}^2 et $p \in C_1 \cap C_2$ (que l'on suppose non vide). On dit que C_1 et C_2 ont un contact d'ordre k en p si, au voisinage de p , il existe des paramétrisations locales $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f_2: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, de C_1 et C_2 respectivement, telles que, pour un certain point t_0 de I , on ait $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ et f_1 et f_2 ont un contact d'ordre k en $f_1(t_0) = f_2(t_0)$.

PROPOSITION II.4.3 : Soit C_1 et C_2 deux courbes lisses (de classe C^∞) dans \mathbb{R}^2 ayant un contact d'ordre k en $p \in C_1 \cap C_2$ (que l'on suppose non vide). Alors, pour toute paramétrisation locale $f_1: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C_1 au voisinage de p , il existe une paramétrisation locale $f_2: J_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C_2 au voisinage de p telle que $f_1^{-1}(p) = f_2^{-1}(p)$ et f_1 et f_2 ont un contact d'ordre k en $u_0 = f_1^{-1}(p)$.

DÉMONSTRATION : On a au voisinage de p deux paramétrisations locales $\tilde{f}_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\tilde{f}_2: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C_1 et C_2 respectivement telles que $\|\tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_2(t)\| = o\left((t - t_0)^k\right)$, où $t_0 = \tilde{f}_1^{-1}(p)$.

Puisque $f_1: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation locale de C_1 au voisinage de p , il existe un C^∞ -difféomorphisme θ d'un voisinage ouvert U de $u_0 \in J_1$ sur un voisinage ouvert de t_0 tel que $f_1 = \tilde{f}_1 \circ \theta$ sur U .

En effet, posons $\theta = \tilde{f}_1^{-1} \circ f_1$. Cette application est définie sur un certain voisinage ouvert U de u_0 .

Il faut prendre garde au fait que \tilde{f}_1^{-1} n'est pas différentiable car pas définie sur un ouvert. On introduit alors un voisinage ouvert V' de p dans \mathbb{R}^2 , un voisinage ouvert V de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , et un C^∞ -difféomorphisme $\varphi: V' \rightarrow V$ tels que $\varphi(V' \cup C_1) = V \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$. Quitte à restreindre les ouverts, on décompose $\theta = \tilde{f}_1^{-1} \circ f_1 = \tilde{f}_1^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f_1$ en deux C^∞ -difféomorphismes :

1. $\varphi \circ f_1: U \rightarrow V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ ($\varphi \circ f_1$ est une application de classe C^∞ et $(\varphi \circ f_1)'(u_0)$ est un isomorphisme entre \mathbb{R} et $\mathbb{R} \times \{0\}$).
2. $\tilde{f}_1^{-1} \circ \varphi^{-1}: V \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \rightarrow W$ (où W est un voisinage ouvert de t_0).

Donc θ est un C^∞ -difféomorphisme.

On pose alors $f_2 = \tilde{f}_2 \circ \theta$. Cette application est définie au voisinage de u_0 .

On a également, d'après le théorème des accroissements finis, $|\theta(u) - t_0| < a|u - u_0|$ pour une certaine constante a . Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}_1(\theta(u)) - \tilde{f}_2(\theta(u)) \right\| &= \|f_1(u) - f_2(u)\| \\ &< \varepsilon |\theta(u) - u_0|^k \\ &< \varepsilon a^k |u - u_0|^k \end{aligned}$$

pour u suffisamment proche de u_0 . □

II.5 Points d'inflexion

Soit C une courbe lisse (de classe C^∞) dans \mathbb{R}^2 et p un point de C .

DEFINITION II.5.1 : *On dit que p est un point d'inflexion de C si la droite tangente à C en p est tangente à C à l'ordre 2.*

PROPOSITION II.5.2 : *Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation locale de C au voisinage de p et notons $t_0 = f^{-1}(p)$. Alors p est un point d'inflexion de C si et seulement si les vecteurs $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION : D'après la formule de Taylor, au voisinage de t_0 on a :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}f''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ sont colinéaires, alors on peut paramétrer la droite tangente \mathcal{D} à C en p de la manière suivante :

$$d(t) = f(t_0) + \left[(t - t_0) + \lambda \frac{(t - t_0)^2}{2} \right] f'(t_0)$$

où λ provient de l'hypothèse $f''(t_0) = \lambda f'(t_0)$, et dans ce cas, $\|f(t) - d(t)\| = o((t - t_0)^2)$.

Réciproquement, on suppose que p est un point d'inflexion de C . Soit \tilde{d} une paramétrisation appropriée de \mathcal{D} , autrement dit $\|f(t) - \tilde{d}\| = o((t - t_0)^2)$ (ici \tilde{d} est définie au voisinage de t_0).

On a $\tilde{d}(t) = \tilde{d}(t_0) + (t - t_0)\tilde{d}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\tilde{d}''(t_0) + o((t - t_0)^2)$.

Donc la différence $f(t) - \tilde{d}(t)$ vaut :

$$\left(f(t_0) - \tilde{d}(t_0) \right) + (t - t_0) \left(f'(t_0) - \tilde{d}'(t_0) \right) + \frac{(t - t_0)^2}{2} \left(f''(t_0) - \tilde{d}''(t_0) \right) + o((t - t_0)^2).$$

Mais $\|f(t) - \tilde{d}\| = o((t - t_0)^2)$, par conséquent :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \tilde{d}(t_0), \\ f'(t_0) &= \tilde{d}'(t_0), \\ f''(t_0) &= \tilde{d}''(t_0). \end{aligned}$$

Les vecteurs $\tilde{d}'(t_0)$ et $\tilde{d}''(t_0)$ sont colinéaires car appartiennent à la direction de \mathcal{D} , donc $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ sont colinéaires également. □

II.6 Longueur d'arc

DEFINITION II.6.1 : *Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $[a, b] \subset I$ un intervalle fermé contenu dans I . La valeur de l'intégrale $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ s'appelle longueur de l'arc de a à b de la courbe f .*

EXERCICE II.1 : On reprend les notations de la définition II.6.1.

Soit $\tilde{f}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière positivement équivalente à f , θ le difféomorphisme croissant qui certifie l'équivalence positive de f et \tilde{f} . On pose $\tilde{a} = \theta(a)$ et $\tilde{b} = \theta(b)$. Montrer que $\int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\tilde{f}'(t)\| dt$ (formule de changement de variable).

DEFINITION II.6.2 : On reprend les notations de la définition II.6.1.

Pour $t \in I$, on pose $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$. On obtient une application s définie sur I . Puisque la courbe est régulière, on a $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$ et par conséquent s est un difféomorphisme croissant de I et I_0 (ouvert). On obtient alors une courbe paramétrée régulière $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est positivement équivalente à f ($\eta = f \circ s^{-1}$). On dit dans ce cas que η est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

PROPOSITION II.6.3 : Soit f une courbe paramétrée régulière. Alors, dans la classe d'équivalence positive de f , il existe une et une seule courbe paramétrée $\tilde{f}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\|\tilde{f}'(t)\| = 1$ pour tout $t \in J$ (unicité à translation de la source près). Cette unique courbe est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

DÉMONSTRATION : Une courbe $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$, où $a \in I$, convient. En effet, pour tout $s \in I_0$, on a $\|\eta'(s)\| = 1$. D'autre part, soit $\tilde{f}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée positivement équivalente à f et telle que $\|\tilde{f}'(t)\| = 1$ pour tout $t \in J$. Il existe alors un difféomorphisme croissant $\theta: I_0 \rightarrow J$ tel que $\eta = \tilde{f} \circ \theta$.

Pour tout $s \in I_0$, on a $\eta(s) = (\tilde{f} \circ \theta)(s)$ et donc $\|\eta'(s)\| = \|\tilde{f}'(\theta(s))\theta'(s)\|$ d'où $|\theta'(s)| = 1$.

Or θ est croissante, donc $\theta'(s) = 1$ pour tout $s \in I_0$. Par conséquent, θ est une translation. \square

PROPOSITION II.6.4 : Soit $\lambda: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière telle que $\|\lambda(s)\| = 1$ pour tout $s \in I_0$. Alors pour tout $s \in I_0$, les vecteurs $\lambda(s)$ et $\lambda'(s)$ sont orthogonaux.

RAPPEL : Si $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, alors B est différentiable sur $E \times E$ et, pour tout $(x_0, y_0) \in E \times E$ et tout $(h, k) \in E \times E$, on a :

$$B'(x_0, y_0).(h, k) = B(x_0, k) + B(h, y_0).$$

DÉMONSTRATION (de la proposition) : On a pour tout $s \in I_0$, $\|\lambda(s)\|^2 = 1 = \lambda(s) \cdot \lambda(s)$ (produit scalaire). On pose alors $B(u, v) = u \cdot v$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$. On obtient que l'application $s \mapsto B(\lambda(s), \lambda(s))$ est constante (sur I_0).

Par conséquent, $B'(\lambda(s), \lambda(s))(\lambda'(s), \lambda'(s)) = 0$ pour tout $s \in I_0$. Autrement dit :

$$2(\lambda(s) \cdot \lambda'(s)) = 0.$$

Donc $\lambda(s)$ et $\lambda'(s)$ sont orthogonaux pour tout $s \in I_0$. \square

COROLLAIRE II.6.5 : Soit $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière telle que $\|\eta'(s)\| = 1$ pour tout $s \in I_0$. Alors, pour tout $s \in I_0$ on a $\eta'(s) \cdot \eta''(s) = 0$.

II.7 Courbure d'une courbe

Soit $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. On pose $v(s) = \eta'(s)$ pour tout $s \in I_0$.

DEFINITION II.7.1 : La norme du vecteur $v'(s)$ s'appelle la courbure de η en s . On la note $k(s)$.

Pour une courbe paramétrée régulière $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, on appelle courbure de f au point $t \in I$ la courbure de toute courbe $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et positivement équivalente à f en $s = \theta(t)$ où θ est le difféomorphisme qui certifie l'équivalence positive de f et η .

PROPOSITION II.7.2 : Soit C une courbe lisse dans \mathbb{R}^2 et $p \in C$. Si p n'est pas un point d'inflexion de C , alors il existe un unique cercle tangent à l'ordre 2 en p .

DÉMONSTRATION : L'équation d'un cercle tangent à l'ordre 1 à C en p est de la forme :

$$\langle x - p - Rn, x - p - Rn \rangle = R^2,$$

où n est un vecteur unitaire orthogonal à la droite tangente à C en p , et $|R|$ est le rayon du cercle (strictement positif).

L'application $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \langle x - p - Rn, x - p - Rn \rangle - R^2$$

est de classe C^1 et a 0 comme valeur régulière (à vérifier!).

Donc, d'après l'exercice 2.6, ce cercle est tangent à C en p à l'ordre 2 si et seulement si $g(f(t)) = o((t - t_0)^2)$, où $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation locale de C au voisinage de p , et $t_0 = f^{-1}(p)$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f(t) - p - Rn, f(t) - p - Rn \rangle - R^2 &= o((t - t_0)^2) \\ &\Downarrow \\ \langle (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}f''(t_0) + o((t - t_0)^2) - Rn, \dots \rangle - R^2 &= o((t - t_0)^2) \\ &\Downarrow \\ \|(t - t_0)f'(t_0)\|^2 - 2R\frac{(t-t_0)^2}{2} \langle f''(t_0), n \rangle &= o((t - t_0)^2) \\ &\Downarrow \\ \|f'(t_0)\|^2 &= R \langle f''(t_0), n \rangle \end{aligned}$$

Puisque p n'est pas un point d'inflexion de C , $\langle f''(t_0), n \rangle \neq 0$. Donc il existe un unique R qui vérifie l'égalité $\|f'(t_0)\|^2 = R \langle f''(t_0), n \rangle$ (de plus, $R \neq 0$). \square

DEFINITION II.7.3 : Le cercle défini dans la proposition précédente est appelé cercle osculateur à C en p . Le rayon (resp. le centre) de ce cercle s'appelle le rayon de courbure (resp. le centre de courbure) de C en p .

REMARQUE :

1. Si $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$, alors l'égalité obtenue $\|f'(t_0)\|^2 = R \langle f''(t_0), n \rangle$ s'écrit :

$$\langle f''(t_0), n \rangle = \frac{1}{R},$$

d'où $k = \frac{1}{|R|}$.

2. Pour un point d'inflexion t_0 , on a $k = 0$ car dans ce cas, $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ sont colinéaires et orthogonaux, d'où $f''(t_0) = 0$. Par convention, dans ce cas on pose $R = +\infty$.
3. On a $R = \frac{\|f'(t_0)\|^2}{\langle f''(t_0), n \rangle}$. En particulier, on obtient une formule pour calculer la courbure.

II.8 Repère de Frénet pour les courbes planes

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière.

DEFINITION II.8.1 : On dit que f est bi-régulière si pour tout $t \in I$, les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ forment une famille libre).

On suppose maintenant que \mathbb{R}^2 est orienté de façon standard. Soit $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Pour tout $s \in I_0$, notons $n(s)$ le vecteur unitaire tel que $v(s)$ et $n(s)$ forment une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

THEOREME II.8.2 (Formules de Frénet) : *Pour une courbe $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et bi-régulière, on a :*

$$v'(s) = \frac{1}{R}n(s), \quad (\text{II.2})$$

$$n'(s) = -\frac{1}{R}v(s), \quad (\text{II.3})$$

pour tout $s \in I_0$ (ici, R est choisi à partir de $n(s)$).

REMARQUE : Si on pose $\tilde{n}(s) = \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|}$, alors on obtient les formules :

$$v'(s) = k\tilde{n}(s), \quad (\text{II.4})$$

$$\tilde{n}'(s) = -kv(s). \quad (\text{II.5})$$

DÉMONSTRATION : La première formule est un corollaire immédiat de l'égalité

$$\langle \eta''(s), n(s) \rangle = \frac{1}{R}.$$

Pour démontrer la deuxième formule, on pose $n'(s) = \alpha(s)v(s) + \beta(s)n(s)$ pour tout $s \in I_0$.

Puisque, pour tout $s \in I_0$, $v(s) \cdot n(s) = 0$, on a $v'(s) \cdot n(s) + v(s) \cdot n'(s) = 0$ pour tout $s \in I_0$.

Donc $\alpha(s) = n'(s) \cdot v(s) = -v'(s) \cdot n(s) = -\frac{1}{R}$.

D'autre part, $\beta(s) = n'(s) \cdot n(s) = 0$. □

DEFINITION II.8.3 : *Le repère $(v(s), n(s))$ s'appelle repère de Frénet. C'est un repère mobile.*

DEFINITION II.8.4 : *Un repère mobile (orthonormé direct) dans \mathbb{R}^2 défini sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est une application différentiable de I dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ telle que, en tout point de I , la valeur de cette application soit un repère (orthonormé direct).*

III

Courbes dans \mathbb{R}^n

Sommaire

III.1 Courbes dans \mathbb{R}^3	20
III.2 Sous-espaces osculateurs	23
III.3 Formules de Frénet pour les courbes dans \mathbb{R}^n	23

III.1 Courbes dans \mathbb{R}^3

Considérons les courbes paramétrées régulières de classe C^k dans \mathbb{R}^3 . Une telle courbe est une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k ($k = 1, 2, \dots, +\infty$), où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée régulière, et t_0 un point de I , alors la droite qui passe par $f(t_0)$ et est dirigée par $f'(t_0)$ s'appelle la **droite tangente à f en t_0** (ou en $f(t_0)$).

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. On dit que cette courbe est **paramétrée par la longueur d'arc** si $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.

Si $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc, alors on pose $v(s) = \eta'(s)$ pour tout $s \in I_0$. La norme $\|v'(s)\|$ du vecteur $v'(s)$ s'appelle la **courbure de η en s** et est notée $k = k(s)$.

On dit que η est **bi-régulière** si $k(s) \neq 0$ pour tout $s \in I_0$.

Si η est bi-régulière, alors pour tout $s \in I_0$, on pose $n(s) = \frac{v'(s)}{k(s)}$. Ce vecteur $n(s)$ s'appelle le **vecteur normal principal** de η en s .

On suppose maintenant que \mathbb{R}^3 est orienté et on complète, pour tout $s \in I_0$, $(v(s), n(s))$ en une base orthonormée directe $(v(s), n(s), b(s))$. Le vecteur $b(s)$ s'appelle **vecteur binormal**.

REMARQUE : On a pour tout $s \in I_0$:

$$v'(s) = kn(s),$$

$$b(s) = v(s) \wedge n(s),$$

donc $b'(s) = v'(s) \wedge n(s) + v(s) \wedge n'(s) = v(s) \wedge n'(s)$, et $b'(s) \cdot v(s) = 0$ pour tout $s \in I_0$.

D'autre part, $b'(s) \cdot b(s) = 0$ pour tout $s \in I_0$, donc les vecteurs $b'(s)$ et $n(s)$ sont colinéaires. On pose alors

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

Le nombre $\tau = \tau(s)$ s'appelle la **torsion** de η en s .

Le plan affine qui passe par $\eta(s)$ et est dirigé par $v(s)$ et $n(s)$ s'appelle le **plan osculateur** de η en s .

DEFINITION III.1.1 : *Pour une courbe bi-régulière $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par la longueur d'arc, le repère mobile $s \mapsto (v(s), n(s), b(s))$ s'appelle le repère de Frénet.*

THEOREME III.1.2 (Formules de Frénet) : *Si $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe bi-régulière et paramétrée par la longueur d'arc, on a pour tout $s \in I_0$:*

$$v'(s) = k(s)n(s),$$

$$n'(s) = -k(s)v(s) + \tau(s)b(s),$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

DÉMONSTRATION : En fait il ne reste qu'à démontrer l'égalité $n'(s) = -k(s)v(s) + \tau(s)b(s)$.

Pour tout $s \in I_0$, on a $n(s) \cdot v(s) = 0$ et $n(s) \cdot b(s) = 0$, donc pour tout $s \in I_0$, on a

$$n'(s) \cdot v(s) = -n(s) \cdot v'(s) = -k(s),$$

$$n'(s) \cdot b(s) = -n(s) \cdot b'(s) = \tau(s).$$

De plus, $n'(s) \cdot n(s) = 0$ pour tout $s \in I_0$, donc $n'(s) = -k(s)v(s) + \tau(s)b(s)$. \square

DEFINITION III.1.3 : *Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée bi-régulière, sa torsion en un point donné est la torsion d'une courbe paramétrée par la longueur d'arc positivement équivalente à f au point correspondant.*

PROPOSITION III.1.4 : *Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée bi-régulière. Alors la torsion de f est nulle en tout point $t \in I$ si et seulement si $f(I)$ est contenu dans un plan affine.*

DÉMONSTRATION : Soit $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe bi-régulière, paramétrée par la longueur d'arc et positivement équivalente à f .

\ominus On suppose que $f(I)$ est contenu dans un plan affine dirigé par un plan vectoriel D . Dans ce cas, $v(s) = \eta'(s)$ et $n(s) = \frac{\eta''(s)}{k(s)}$ appartiennent à D pour tout $s \in I_0$ (car les vecteurs de la forme $\eta(s + \Delta) - \eta(s)$ et $\eta'(s + \Delta) - \eta'(s)$ appartiennent à D). Donc pour tout $s \in I_0$, le vecteur $b(s)$ est orthogonal à D . Par conséquent, $s \mapsto b(s)$ est constante et la torsion est identiquement nulle.

\ominus Supposons que $\tau(s) = 0$ pour tout $s \in I_0$. Dans ce cas, $s \mapsto b(s)$ est constante. Posons $b_0 = b(s)$. Pour tout $s \in I_0$, la dérivée de $\eta \cdot b_0$ en s est égale à $\eta'(s) \cdot b_0$, c'est-à-dire, est égale à 0. Donc $s \mapsto \eta(s) \cdot b_0$ est constante. On pose $A = \eta(s) \cdot b_0$. Par conséquent, $\eta(I_0)$ est contenu dans le plan défini par l'équation $g(x) = A$, où $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto x \cdot b_0$. \square

Pour étudier une courbe paramétrée bi-régulière $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ au voisinage d'un point $t_0 \in I$, on suppose f injective et on place l'origine en $p = f(t_0)$. On considère une courbe paramétrée par la longueur d'arc $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que η soit positivement équivalente à f et $\eta^{-1}(p) = 0$. On écrit tout dans la base $(v(0), n(0), b(0))$.

Alors $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = v(0) = (1, 0, 0)$, $\eta''(0) = k(0)n(0) = (0, k(0), 0)$ et $\eta'''(0) = k'(0) \cdot n(0) + k(0) \cdot n'(0) = (-k^2(0), k'(0), k(0)\tau(0))$. Donc d'après la formule de Taylor, on a :

$$\eta(s) = \eta(0) + s\eta'(0) + \frac{s^2}{2}\eta''(0) + \frac{s^3}{6}\eta'''(0) + o(s^3)$$

d'où

$$\eta(s) = \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + o(s^3), \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3), \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3) \right)$$

La projection de $\eta(I_0)$ sur le **plan osculateur** $(0, v(0), n(0))$ est proche de la parabole $s \mapsto \left(s, \frac{k(0)}{2}s^2 \right)$ au voisinage de $(0, 0)$.

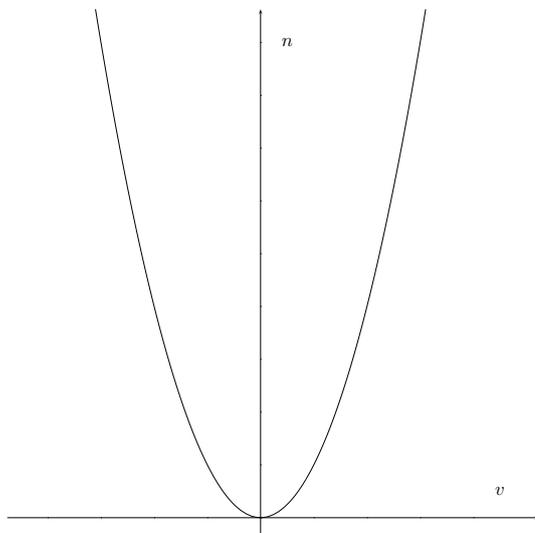


FIGURE III.1 – Image de $s \mapsto \left(s, \frac{k(0)}{2}s^2\right)$

La projection de $\eta(I_0)$ sur le **plan normal** $(0, n(0), b(0))$ est proche de la courbe $s \mapsto \left(\frac{k(0)}{2}s^2, \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3\right)$ au voisinage de $(0, 0)$.

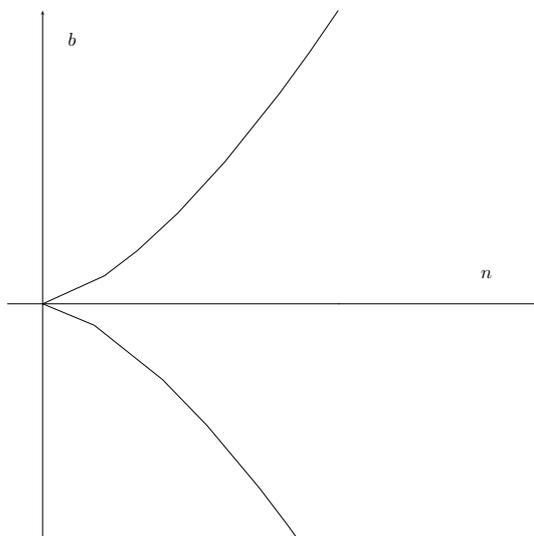


FIGURE III.2 – Image de $s \mapsto \left(\frac{k(0)}{2}s^2, \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3\right)$

La projection de $\eta(I_0)$ sur le **plan rectifiant** $(0, v(0), b(0))$ est proche de la courbe $s \mapsto \left(s, \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3\right)$ au voisinage de $(0, 0)$.

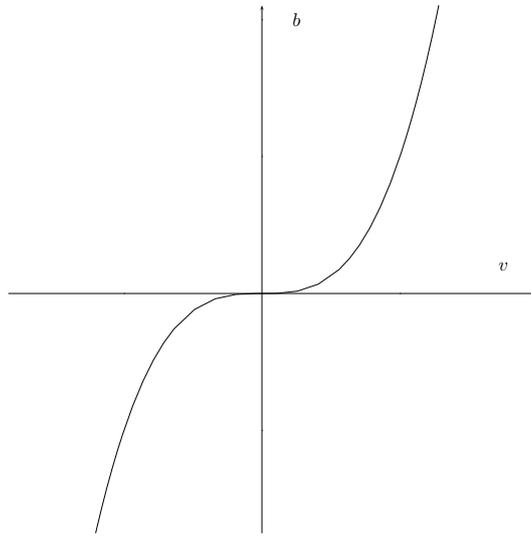


FIGURE III.3 – Image de $s \mapsto \left(s, \frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 \right)$

III.2 Sous-espaces osculateurs

DEFINITION III.2.1 : Une courbe paramétrée $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite k -régulière ($1 \leq k \leq n$) si, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f'(t), f''(t), \dots, f^{(k)}(t)$ sont linéairement indépendants.

DEFINITION III.2.2 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et t_0 un point de I . Un sous-espace affine de dimension k de \mathbb{R}^n est dit k -osculateur à f en t_0 si ce sous-espace contient $f(t_0)$ et sa direction contient $f'(t_0), f''(t_0), \dots, f^{(k)}(t_0)$.

REMARQUE : Une courbe paramétrée $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k -régulière si et seulement si, pour tout $t \in I_0$, il existe un unique sous-espace k -osculateur à f en t .

EXERCICE III.1 : Soit E un sous-espace de dimension k de \mathbb{R}^n , $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière, et t_0 un point de I . Montrer que E est un sous-espace k -osculateur à f en t_0 si et seulement si il existe une courbe paramétrée régulière $f_1: I \rightarrow E$ telle que $f_1(t_0) = f(t_0)$, et f et f_1 soient tangentes à l'ordre k en t_0 .

COROLLAIRE III.2.3 (de l'exercice III.1) : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{f}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées k -régulières équivalentes ($1 \leq k \leq n$), et $\theta: I \rightarrow \tilde{I}$ le difféomorphisme qui certifie l'équivalence ($f = \tilde{f} \circ \theta$). Alors pour tout $t_0 \in I$, le sous-espace k -osculateur à f en t_0 coïncide avec le sous-espace k -osculateur à \tilde{f} en $\theta(t_0)$.

III.3 Formules de Frénet pour les courbes dans \mathbb{R}^n

Soit $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (de classe C^∞). On suppose que η est $(n-1)$ -régulière. Alors, pour tout $s \in I_0$, les vecteurs $\eta'(s), \dots, \eta^{(n-1)}(s)$ sont linéairement

indépendants.

En appliquant à ces vecteurs le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une collection orthonormée de vecteurs $t_1(s), \dots, t_{n-1}(s)$, qu'on peut compléter de façon unique par un vecteur $t_n(s)$ pour obtenir une base orthonormée directe de \mathbb{R}^n (qu'on suppose orienté).

DEFINITION III.3.1 : *Le repère mobile $s \mapsto (t_1(s), \dots, t_n(s))$ s'appelle repère de Frénet de η .*

REMARQUE : Posons pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $s \in I_0$:

$$t'_i(s) = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} t_j(s).$$

Par construction, le vecteur $t_i(s)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\eta'(s), \dots, \eta^{(i)}(s)$. Donc, pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et tout $s \in I_0$, $t'_i(s)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\eta''(s), \dots, \eta^{(i+1)}(s)$.

Puisque chacun de ces vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire de $t_1(s), \dots, t_{i+1}(s)$, on obtient que pour tous $2 \leq i+1 < j \leq n$, on a $\alpha_{i,j} = 0$.

D'autre part, pour tous $i, j = 1, \dots, n$ et tout $s \in I_0$, on a $t_i(s) \cdot t_j(s) = \delta_{i,j}$ (produit scalaire).

Par conséquent, pour tout $s \in I_0$, on a $t'_i(s) \cdot t_j(s) + t_i(s) \cdot t'_j(s) = 0$, d'où $\alpha_{i,j} = -\alpha_{j,i}$. En particulier, $\alpha_{i,i} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et $\alpha_{i,j} = 0$ si $j < i-1$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors $k_i = \alpha_{i,i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

DEFINITION III.3.2 : *Les fonctions $k_i = k_i(s)$ définies ci-dessus s'appellent les courbures de η .*

Remarquons que nous avons au passage démontré le théorème :

THEOREME III.3.3 (Formules de Frénet) : *Pour une courbe paramétrée par la longueur d'arc et $(n-1)$ -régulière $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (de classe C^∞), on a pour tout $s \in I_0$:*

$$\begin{cases} t'_1(s) = k_1 t_2(s) \\ t'_2(s) = -k_1 t_1(s) + k_2 t_3(s) \\ \vdots \\ t'_{n-1}(s) = -k_{n-2} t_{n-2}(s) + k_{n-1} t_n(s) \\ t'_n(s) = -k_{n-1} t_{n-1}(s) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

REMARQUE : Dans les formules $t_i(s) = \beta_{i,1} \eta'(s) + \dots + \beta_{i,i} \eta^{(i)}(s)$ (*) obtenues via le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, le coefficient $\beta_{i,i}$ est strictement positif pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Donc, dans les formules inverses $\eta^{(i)}(s) = \gamma_{i,1} t_1(s) + \dots + \gamma_{i,i} t_i(s)$ (**), le coefficient $\gamma_{i,i} = \frac{1}{\beta_{i,i}}$ est également strictement positif.

En dérivant les formules (*), on obtient :

$$t'_i(s) = \beta'_{i,1}\eta'(s) + (\beta_{i,1} + \beta'_{i,2})\eta''(s) + \dots + (\beta_{i,i-1} + \beta'_{i,i})\eta^{(i)}(s) + \beta_{i,i}\eta^{(i+1)}(s)$$

On peut remplacer $\eta'(s), \dots, \eta^{(i+1)}(s)$ en utilisant (**) pour obtenir les formules de Frénet. Donc le coefficient de $t_{i+1}(s)$ est égal à $\beta_{i,i}\gamma_{i+1,i+1}$, autrement dit on a pour tout $i = 1, \dots, n-2$:

$$k_i = \frac{\beta_{i,i}}{\beta_{i+1,i+1}} > 0.$$

La courbure k_{n-1} (l'analogue de la torsion) peut quant à elle avoir un signe arbitraire.

DEFINITION III.3.4 : *Pour une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, les courbures sont définies comme courbures d'une courbe paramétrée par la longueur d'arc et positivement équivalente à f .*

REMARQUE : Cette courbe paramétrée par la longueur d'arc est $(n-1)$ -régulière.

THEOREME III.3.5 : *Soit I_0 un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0 et $k_i: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) des fonctions de classe C^∞ telles que, pour tout $i = 1, \dots, n-2$ et tout $s \in I_0$, $k_i(s) > 0$. Alors pour tout point $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ et toute base orthonormée directe i_1, \dots, i_n de \mathbb{R}^n (orienté), il existe une unique courbe paramétrée par la longueur d'arc et $(n-1)$ -régulière $\eta: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :*

- Les fonctions k_1, \dots, k_{n-1} soient les courbures de η ,
- $\eta(0) = \mathcal{O}$, et $t_k(0) = i_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Pour la démonstration, on va admettre et utiliser le résultat suivant :

THEOREME III.3.6 : *Soit $A_{i,j}: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, ($i, j = 1, \dots, m$) m^2 fonctions de classe C^∞ définies sur un intervalle ouvert I_0 de \mathbb{R} et $(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ un point de \mathbb{R}^m . On suppose que $0 \in I_0$. Alors il existe une unique collection de m fonctions de classe C^∞ $x_1, \dots, x_m: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $s \in I_0$:*

$$\begin{pmatrix} x'_1(s) \\ \vdots \\ x'_m(s) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_m(s) \end{pmatrix},$$

où $A = \begin{pmatrix} A_{i,j} \end{pmatrix}$, et $x_1(0) = x_1^\circ, \dots, x_m(0) = x_m^\circ$.

DÉMONSTRATION (du théorème III.3.5) :

① On commence par appliquer le théorème précédent aux formules de Frénet :

$$(*) \begin{cases} t'_1(s) & = k_1 t_2(s) \\ t'_2(s) & = -k_1 t_1(s) + k_2 t_3(s) \\ \vdots & \\ t'_{n-1}(s) & = -k_{n-2} t_{n-2}(s) + k_{n-1} t_n(s) \\ t'_n(s) & = -k_{n-1} t_{n-1}(s) \end{cases},$$

les variables étant $m = n^2$ coordonnées de t_1, \dots, t_n . On obtient que, sur l'intervalle I_0 , il existe une unique collection d'applications $t_1, \dots, t_n: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que les formules de Frénet (III.1) soient vraies pour tout $s \in I_0$ d'une part, et $t_1(0) = i_1, \dots, t_n(0) = i_n$ d'autre part.

- ② Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, considérons la fonction $t_i \cdot t_j : s \mapsto t_i(s) \cdot t_j(s)$ définie sur I_0 .
D'après (III.1), on a :

$$\begin{aligned} (t_i \cdot t_j)'(s) &= t_i'(s) \cdot t_j(s) + t_i(s) \cdot t_j'(s) \\ &= (-k_{i-1}t_{i-1}(s) + k_it_{i+1}(s)) \cdot t_j(s) + t_i(s) \cdot (-k_{j-1}t_{j-1}(s) + k_jt_{j+1}(s)) \end{aligned}$$

pour tout $s \in I_0$.

(On pose pour tout $s \in I_0$, $t_0(s) = t_{n+1}(s) = 0$.)

Donc, pour tous $i, j = 1, \dots, n$, on a :

$$(t_i \cdot t_j)' = -k_{i-1}(t_{i-1} \cdot t_j) + k_i(t_{i+1} \cdot t_j) - k_{j-1}(t_i \cdot t_{j-1}) + k_j(t_i \cdot t_{j+1}) \quad (**)$$

On obtient un système d'équations différentielles linéaires pour les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions inconnues $t_i \cdot t_j$.
D'après le théorème 3.3.5, il existe une unique collection de fonctions $(f_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de classe C^∞ qui vérifie (**), les conditions initiales $f_{k,j}(0) = \delta_{k,j} = i_k \cdot i_j$ ainsi que les relations

$$f'_{i,j} = -k_{i-1}f_{i-1,j} + k_if_{i+1,j} - k_{j-1}f_{i,j-1} + k_jf_{i,j+1}.$$

Or on peut facilement vérifier que les fonctions constantes $f_{i,j} = \delta_{i,j}$ vérifient les relations en question ainsi que les conditions initiales. Par conséquent, on obtient que pour tout $s \in I_0$,

$$t_i(s) \cdot t_j(s) = \delta_{i,j}.$$

Puisque la base $t_1(0), \dots, t_n(0)$ est directe, la base $t_1(s), \dots, t_n(s)$ est directe pour tout $s \in I_0$.

- ③ Pour tout $s \in I_0$, considérons les vecteurs $t_1(s), t_1'(s), \dots, t_1^{n-2}(s)$ et appliquons à cette collection le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

- $t_1(s)$ est un vecteur unitaire donc il convient comme vecteur de "départ",
- $t_1'(s)$ est déjà orthogonal à $t_1(s)$ et $t_1'(s) = k_1t_2(s)$ donc, en divisant $t_1'(s)$ par sa norme, on obtient exactement $t_2(s)$,
- On a $t_1''(s) = (k_1t_2)'(s) = k_1'(s)t_2(s) + k_1(s)t_2'(s)$, c'est-à-dire :

$$t_1''(s) = -k_1(s)^2t_1(s) + k_1'(s)t_2(s) + k_1(s)k_2(s)t_3(s)$$

On soustrait une combinaison linéaire de $t_1(s)$ et $t_2(s)$ pour obtenir un vecteur orthogonal à $t_1(s)$ et $t_2(s)$, et on divise le vecteur obtenu par sa norme, ce qui donne exactement le vecteur $t_3(s)$,

- ...

De façon similaire, on montre que la famille $t_1(s), t_1'(s), \dots, t_1^{(n-2)}(s)$ est libre et le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne précisément les vecteurs $t_1(s), \dots, t_n(s)$ pour tout $s \in I_0$.

- ④ Pour tout $s \in I_0$, on pose $\eta(s) = \int_0^s t_1(u)du + \theta$ de sorte que $\eta(0) = \mathcal{O}$ et $\eta'(s) = t_1(s)$. Cette courbe est paramétrée par la longueur d'arc et $(n-1)$ -régulière, car pour tout $s \in I_0$, les vecteurs $t_1(s) = \eta'(s), \dots, t_1^{(n-2)}(s) = \eta^{(n-1)}(s)$ sont linéairement indépendants. De plus, les $(n-1)$ premiers vecteurs du repère de Frénet de η coïncident avec t_1, \dots, t_{n-1} . Par conséquent, le dernier vecteur du repère de Frénet coïncide avec t_n . Pour les applications t_1, \dots, t_n , on a les équations (III.1) donc k_1, \dots, k_{n-1} sont exactement les courbures de η . L'existence est ainsi démontrée.

L'unicité est un corollaire immédiat du fait que le repère de Frénet est déterminé de façon unique par les formules de Frénet et les conditions initiales $t_1(0) = i_1, \dots, t_n(0) = i_n$, et l'application $\eta : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est déterminée de façon unique par la relation $\eta'(s) = t_1(s)$ (vraie pour tout $s \in I_0$) et la condition initiale $\eta(0) = \mathcal{O}$. \square

IV

Surfaces dans \mathbb{R}^3

Sommaire

IV.1 Surfaces paramétrées régulières	28
IV.2 Première forme quadratique	29
IV.3 1-formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	31
IV.4 Formes quadratiques différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	32
IV.5 Métrique riemannienne sur un ouvert de \mathbb{R}^n	33
IV.6 Surfaces dans \mathbb{R}^3 définies implicitement	34
IV.7 Surfaces isométriques	35
IV.8 La deuxième forme quadratique d'une surface	37
IV.9 Endomorphisme de Weingarten	42
IV.10 Theorema egregium	44

IV.1 Surfaces paramétrées régulières

On peut définir des sous-variétés paramétrées de dimension k dans \mathbb{R}^n ($0 < k < n$).

Dans ce chapitre, $n = 3$ et $k = 2$. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 .

DEFINITION IV.1.1 : Une application de classe C^p ($p = 1, 2, \dots, +\infty$) $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'appelle surface paramétrée de classe C^p . L'image $r(U)$ de U s'appelle support de la surface paramétrée r .

On va toujours supposer dans ce chapitre que $p = +\infty$.

DEFINITION IV.1.2 : Une surface paramétrée $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière si r est une immersion.

DEFINITION IV.1.3 : Soit $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées. On dit que r_1 et r_2 sont équivalentes s'il existe un C^∞ -difféomorphisme $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ tel que $r_2 \circ \varphi = r_1$.

REMARQUE : Si r_1 et r_2 sont équivalentes, alors leurs domaines de définition U_1 et U_2 sont homéomorphes. Deux surfaces paramétrées équivalentes ont toujours même support.

EXEMPLE : Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 et $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . Alors l'application

$$r: \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (u, v, h(u, v)) \end{array}$$

est une surface paramétrée régulière. En effet, la matrice jacobienne $J_r(u_0, v_0)$ de r en (u_0, v_0) est de rang 2 pour tout point (u_0, v_0) de U .

REMARQUE : Si $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée régulière, alors l'application r n'est pas forcément injective. Toutefois, au voisinage de tout point de U , l'application r est injective.

DEFINITION IV.1.4 : Soit $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière (on suppose que r est injective). Alors chaque point M du support $r(U)$ de r obtient les coordonnées u_0 et v_0 , où $(u_0, v_0) = r^{-1}(M)$, autrement dit $r(u_0, v_0) = M$.

Toute courbe paramétrée $f: I \rightarrow U$ définit une courbe paramétrée $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ où $\tilde{f} = r \circ f$. On dit que la courbe \tilde{f} est sur la surface r . Les équations $u = u(t)$ et $v = v(t)$ s'appellent les équations de la courbe \tilde{f} en coordonnées u et v sur la surface r (ici, $f(t) = (u(t), v(t))$).

En particulier, sur la surface, on a les courbes $u = \text{cte}$ et les courbes $v = \text{cte}$. Ces courbes s'appellent les courbes de coordonnées.

EXEMPLE :

1. La surface paramétrée

$$r: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (R \cos u, R \sin u, v) \end{array}$$

($R > 0$) s'appelle **surface cylindrique**. Le support de cette surface est le cylindre de rayon R .

2. La surface paramétrée

$$r: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v) \end{array}$$

($R > 0$) a pour image la sphère de centre O et de rayon R et les courbes de coordonnées sont les méridiens et les parallèles.

3. Soit I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $a: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications de classe C^∞ . Alors la surface paramétrée

$$\begin{aligned} r: I \times J &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \rho(u) + va(u) \end{aligned}$$

s'appelle **surface réglée**.

Si, pour tout $u \in I$ et tout $v \in J$, les vecteurs $\rho'(u) + va'(u)$ et $a(u)$ sont linéairement indépendants, alors la surface réglée $r: (u, v) \rightarrow \rho(u) + va(u)$ est régulière.

Une courbe de coordonnées $u = u_0 = \text{cte}$ (dans le cas $J = \mathbb{R}$) est la droite passant par le point $\rho(u_0)$ et dirigée par $a(u_0)$.

Cas particuliers :

(a) Si $\rho'(u) = 0$ pour tout $u \in I$, c'est-à-dire si $\rho = \text{cte}$, alors après un changement de l'origine, on obtient l'application $r(u, v) = va(u)$. Le support est le cône au-dessus de l'image de la courbe paramétrée a .

(b) Si $a'(u) = 0$ pour tout $u \in I$, c'est-à-dire si $a = \text{cte}$, alors le support de la surface est le cylindre au-dessus de la courbe paramétrée ρ .

Si $\rho'(u_0) \neq 0$ pour un certain point $u_0 \in I$, on peut diminuer I pour que $\rho'(u) \neq 0$ pour tout u appartenant à l'intervalle obtenu, et dans ce cas ρ devient régulière, et on peut remplacer (en restant dans la même classe d'équivalence de surfaces paramétrées) ρ par une paramétrisation par la longueur d'arc.

Si ρ est régulière et $a(u)$ coïncide avec le vecteur vitesse $\rho'(u)$ de ρ pour tout $u \in I$, la surface réglée $r(u, v) = \rho(u) + va(u) (= \rho(u) + v\rho'(u))$ s'appelle **surface des tangentes** de ρ (toujours en supposant $J = \mathbb{R}$). Le support de cette surface est la réunion des droites tangentes de ρ .

Si ρ est paramétrée par la longueur d'arc et bi-régulière, on définit de façon similaire la **surface des normales principales** de ρ ($a(u) = n(u)$) ainsi que la **surface des binormales** de ρ ($a(u) = b(u)$).

REMARQUE : Si l'image de ρ est contenue dans un plan, la surface des binormales de ρ a pour support un cylindre au-dessus de l'image de ρ (car dans ce cas, $a = \text{cte}$).

IV.2 Première forme quadratique

Dans ce paragraphe, U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 , $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et (u_0, v_0) un point de U .

DEFINITION IV.2.1 : *Le plan affine qui passe par $r(u_0, v_0)$ et dont la direction est engendrée par $r_u(u_0, v_0)$ et $r_v(u_0, v_0)$ (ce sont les notations pour $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$ respectivement) s'appelle plan tangent à r en (u_0, v_0) (ou en $r(u_0, v_0)$).*

DEFINITION IV.2.2 : *La normale à r en (u_0, v_0) (ou en $r(u_0, v_0)$) est la droite passant par $r(u_0, v_0)$ et orthogonale au plan tangent à r en (u_0, v_0) .*

Soit $f: I \rightarrow U$ une courbe paramétrée. On pose $\tilde{f} = r \circ f$. Pour tout $t_0 \in I$, on a :

$$\tilde{f}'(t_0) = r'(f(t_0))f'(t_0) = u'(t_0)r_u(u_0, v_0) + v'(t_0)r_v(u_0, v_0),$$

d'où

$$\|\tilde{f}'(t_0)\| = \sqrt{(u'(t_0))^2 r_u^2(u_0, v_0) + 2u'(t_0)v'(t_0)r_u(u_0, v_0)r_v(u_0, v_0) + (v'(t_0))^2 r_v^2(u_0, v_0)}.$$

On introduit alors les applications :

$$\begin{aligned} E: \quad U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto r_u^2(u, v) \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

$$\begin{aligned} F: \quad U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto r_u(u, v) \cdot r_v(u, v) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{aligned} G: \quad U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto r_v^2(u, v) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Avec ces notations, on a :

$$\|\tilde{f}'(t_0)\| = \sqrt{(u'(t_0))^2 E(u_0, v_0) + 2u'(t_0)v'(t_0)F(u_0, v_0) + (v'(t_0))^2 G(u_0, v_0)}.$$

En particulier, si $[a, b] \subset I$, alors la longueur de l'arc de a à b de la courbe \tilde{f} est :

$$\int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 E(f(t)) + 2u'(t)v'(t)F(f(t)) + (v'(t))^2 G(f(t))} dt.$$

On a construit une application qui à tout point (u_0, v_0) de U associe une forme quadratique sur la direction du plan tangent à r en (u_0, v_0) .

La forme quadratique en question associe à tout vecteur $\gamma = \alpha r_u(u_0, v_0) + \beta r_v(u_0, v_0)$ le nombre

$$\|\gamma\|^2 = E(u_0, v_0)\alpha^2 + 2F(u_0, v_0)\alpha\beta + G(u_0, v_0)\beta^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2.$$

Dans la base $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$, cette forme quadratique a la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

On a aussi construit une application qui à tout point (u_0, v_0) de U associe une forme quadratique sur \mathbb{R}^2 . Cette forme quadratique associe à tout vecteur (x, y) de \mathbb{R}^2 le nombre

$$E(u_0, v_0)x^2 + 2F(u_0, v_0)xy + G(u_0, v_0)y^2.$$

DEFINITION IV.2.3 : *Cette dernière application est une forme quadratique différentielle et s'appelle première forme quadratique (ou première forme fondamentale) de la surface r . On la note :*

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

REMARQUE (Calcul d'angles) : Soit $\tilde{f}_1: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\tilde{f}_2: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes paramétrées régulières. Soit $t_0 \in I$ tel que $\tilde{f}_1(t_0) = \tilde{f}_2(t_0)$. L'angle entre les courbes \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 en t_0 est l'angle entre $\tilde{f}_1'(t_0)$ et $\tilde{f}_2'(t_0)$.

Supposons que \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 soient sur une surface paramétrée régulière $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\tilde{f}_1 = r \circ f_1 \text{ et } \tilde{f}_2 = r \circ f_2,$$

où $f_1: I \rightarrow U$ et $f_2: I \rightarrow U$ sont deux courbes paramétrées. Si φ est la mesure de l'angle en question, on a :

$$\cos(\varphi) = \frac{\tilde{f}_1'(t_0) \cdot \tilde{f}_2'(t_0)}{\|\tilde{f}_1'(t_0)\| \|\tilde{f}_2'(t_0)\|}.$$

On pose maintenant $f_1 = (f_1^1, f_1^2)$, $f_2 = (f_2^1, f_2^2)$ et $(u_0, v_0) = f_1(t_0) = f_2(t_0)$. On a alors :

$$\cos(\varphi) = \frac{E(u_0, v_0)(f_1^1)'(t_0)(f_2^1)'(t_0) + F(u_0, v_0)[(f_1^1)'(t_0)(f_2^2)'(t_0) + (f_1^2)'(t_0)(f_2^1)'(t_0)] + G(u_0, v_0)(f_1^2)'(t_0)(f_2^2)'(t_0)}{\sqrt{\dots}}$$

En particulier, pour l'angle entre deux courbes de coordonnées $u = u_0$ et $v = v_0$, on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)}\sqrt{G(u_0, v_0)}}.$$

Par conséquent, les courbes de coordonnées $u = u_0$ et $v = v_0$ sont orthogonales en (u_0, v_0) si et seulement si $F(u_0, v_0) = 0$.

IV.3 1-formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n

DEFINITION IV.3.1 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une 1-forme différentielle sur Ω est une application $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ de classe C^∞ .

EXEMPLE :

- (a) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ , alors, en chaque point x de Ω , l'application $f'(x)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n . La dérivée ou la différentielle de f , notée df , est la 1-forme différentielle définie par $df(x) = f'(x)$.
- (b) Si x^1, \dots, x^n sont les fonctions coordonnées, alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, la 1-forme différentielle dx^i est l'application constante égale à e^{i*} .

PROPOSITION IV.3.2 : Soit ω une 1-forme différentielle sur Ω .

Posons $a_i(x) = \omega(x)(e_i)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $i = 1, \dots, n$. Alors :

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i.$$

DÉMONSTRATION : Immédiate, car il suffit d'écrire $\omega = \sum_{i=1}^n b_i dx^i$, où $b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction pour tout $i = 1, \dots, n$, et vérifier que $b_i = a_i$, $i = 1, \dots, n$. □

EXEMPLE (Important) : Si $\omega = df$ pour une certaine fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , alors $\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$. Ici, $a_i(x) = \omega(x)(e_i) = df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Image réciproque d'une 1-forme différentielle par une application

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^m , $f : U \rightarrow V$ une application de classe C^∞ , et $\omega : V \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ une 1-forme différentielle.

DEFINITION IV.3.3 : On appelle image réciproque de ω par f , et on note $f^*\omega$, la 1-forme différentielle sur U définie par

$$\langle f^*\omega(x), v \rangle = \langle \omega(f(x)), f'(x)v \rangle$$

pour tout $x \in U$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE IV.1 : Notons f^1, \dots, f^m les composantes de f . Soit $\omega = \sum_{j=1}^m b_j dy^j$ (où y^1, \dots, y^m

sont les fonctions coordonnées sur V). Alors $f^* \omega(x) = \sum_{j=1}^m b_j(f(x)) df^j(x)$ pour tout $x \in U$, d'où

$$f^* \omega = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (b_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial x_i} dx^i.$$

EXERCICE IV.2 : Montrer que :

1. $f^*(a\omega_1 + b\omega_2) = (a \circ f)f^*\omega_1 + (b \circ f)f^*\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des 1-formes différentielles sur V , et $a, b: V \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^∞ .
2. $f^*dF = d(F \circ f)$, où $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ .
3. Soit W un ouvert de \mathbb{R}^k , $g: V \rightarrow W$ une application de classe C^∞ et $\omega: W \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ une 1-forme différentielle. Alors $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$.

IV.4 Formes quadratiques différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n

DEFINITION IV.4.1 : On note $Q_2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n . C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Si $q \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, alors l'application $b: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique, appelée forme polaire de q , ou polarisée de q .

REMARQUE : En coordonnées :

$$q = \sum_i a_i (e^{i*})^2 + 2 \sum_{i < j} a_{i,j} e^{i*} e^{j*},$$

et en posant $a_{i,j} = a_{j,i}$,

$$b(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} e^{i*}(x) e^{j*}(y).$$

La polarisée (ou forme polaire) de $2e^{i*}e^{j*}$ est la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto e^{i*}(x)e^{j*}(y) + e^{i*}(y)e^{j*}(x).$$

DEFINITION IV.4.2 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle forme quadratique différentielle sur Ω une application $\omega: \Omega \rightarrow Q_2(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ .

EXEMPLE :

1. Si ω est une 1-forme différentielle sur Ω , alors pour tout point x de Ω , l'application $\omega^2(x)$ définie par $\omega^2(x)(v) = (\omega(x)(v))^2$, est une forme quadratique. Donc ω^2 est une forme quadratique différentielle sur Ω .
2. En particulier, si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ , alors $(df)^2$ est une forme quadratique différentielle sur Ω .
3. Si x^1, \dots, x^n sont les fonctions coordonnées, alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $(dx^i)^2$ est l'application constante égale à $(e^{i*})^2$, et $2dx^i dx^j$ est une forme quadratique différentielle qui est l'application constante égale à $2e^{i*}e^{j*}$.

PROPOSITION IV.4.3 : Soit ω une forme quadratique différentielle sur Ω , et $b: \Omega \rightarrow B_2(\mathbb{R}^n)$ l'application qui à tout point x de Ω associe la forme bilinéaire

polarisée de $\omega(x)$. On pose pour tout $x \in \Omega$, $a_{i,j}(x) = b(x)(e_i, e_j)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j} a_{i,j} dx^i dx^j \\ &= \sum_i a_{i,i} (dx^i)^2 + 2 \sum_{i<j} a_{i,j} dx^i dx^j.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : Laissez en exercice. \square

EXEMPLE : Dans le cas $n = 2$, une forme quadratique différentielle peut se mettre sous la forme $Adu^2 + Bdu dv + Cdv^2$, où A, B et C sont des fonctions.

Image réciproque d'une forme quadratique différentielle par une application

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^m , $f: U \rightarrow V$ une application de classe C^∞ , et ω une forme quadratique différentielle sur V .

DEFINITION IV.4.4 : On appelle image réciproque de ω par f , et on note $f^*\omega$, la forme quadratique différentielle sur U définie par

$$f^*\omega(x)(v) = \omega(f(x))(f'(x)v)$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE IV.3 : Notons f^1, \dots, f^m les composantes de f . Soit $\omega = \sum_{i,j} a_{i,j} dy^i dy^j$ une forme quadratique différentielle (où y^1, \dots, y^m sont les fonctions coordonnées sur V).

Alors on a $f^*\omega(x) = \sum_{i,j} a_{i,j}(f(x)) df^i(x) df^j(x)$, d'où :

$$f^*\omega = \sum_{i,j,k,l} (a_{i,j} \circ f) \frac{\partial f^i}{\partial x_k} \frac{\partial f^j}{\partial x_l} dx^k dx^l.$$

EXERCICE IV.4 : Montrer que :

1. $f^*(a\omega_1 + b\omega_2) = (a \circ f)f^*\omega_1 + (b \circ f)f^*\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des formes quadratiques différentielles sur V , et $a, b: V \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^∞ .
2. $f^*(dF)^2 = (d(F \circ f))^2$, où $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ .
3. Soit W un ouvert de \mathbb{R}^k , $g: V \rightarrow W$ une application de classe C^∞ et $\omega: W \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ une forme quadratique différentielle. Alors $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$.

IV.5 Métrique riemannienne sur un ouvert de \mathbb{R}^n

DEFINITION IV.5.1 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une métrique riemannienne sur Ω est une forme quadratique différentielle $\omega: \Omega \rightarrow Q_2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\omega(x)$ soit définie positive pour tout $x \in \Omega$. On la note $g = \sum_{i,j} g_{i,j} dx^i dx^j$.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^m , $\varphi: U \rightarrow V$ une immersion de classe C^∞ et g une métrique riemannienne sur V . Alors φ^*g est une métrique riemannienne sur U . On dit que φ^*g

est la **première forme quadratique** (ou la première forme fondamentale) de l'immersion φ .

EXERCICE IV.5 : Considérons la métrique riemannienne constante $g = dx^2 + dy^2$ sur \mathbb{R}^2 .

Soit $\varphi:]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ le C^∞ -difféomorphisme local défini par

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Montrer que $\varphi^*g = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

EXEMPLE : Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et notons $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ la métrique riemannienne standard euclidienne (constante) sur \mathbb{R}^3 . Alors on a $r^*g = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ (à vérifier!).

IV.6 Surfaces dans \mathbb{R}^3 définies implicitement

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^3 et (x_0, y_0, z_0) un point de V . Soit $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion de classe C^∞ , telle que $\pi(x_0, y_0, z_0) = 0$. On pose $S = \pi^{-1}(0)$. Quitte à réduire V , on peut supposer que S est le support d'une surface paramétrée régulière $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (avec r injective). On pose alors $(u_0, v_0) = r^{-1}(x_0, y_0, z_0)$. On a $\pi \circ r = 0$ sur U , donc $d(\pi \circ r) = 0$ sur U .

DEFINITION IV.6.1 : *Le vecteur* $\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \pi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \pi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$ *s'appelle le vecteur gradient de π en (x_0, y_0, z_0) et est noté* $\text{grad } \pi|_{(x_0, y_0, z_0)}$.

REMARQUE : C'est un vecteur non nul (car π est une submersion), et il est orthogonal au plan tangent $T_r(u_0, v_0)$ à r en (u_0, v_0) . En effet, $\text{grad } \pi|_{(x_0, y_0, z_0)} J_r(u_0, v_0) = 0$ car $d(\pi \circ r) = 0$, d'où l'on tire la relation

$$\pi'(r(u_0, v_0))r'(u_0, v_0) = 0,$$

ce qui s'écrit $\pi'(x_0, y_0, z_0)r'(u_0, v_0) = 0$.

Par conséquent,

$$\left(\text{grad } \pi|_{(x_0, y_0, z_0)} \right) \perp (r_u(u_0, v_0)) \text{ et } \left(\text{grad } \pi|_{(x_0, y_0, z_0)} \right) \perp (r_v(u_0, v_0)).$$

L'égalité $d(\pi \circ \lambda) = 0$ sur U peut être réécrite de la façon suivante : $r^*d\pi = 0$ sur U . Par conséquent, $d\pi(r(u, v))(a) = 0$ pour tout point $(u, v) \in U$ et tout vecteur a appartenant à la direction de $T_r(u, v)$. On dit que **$d\pi$ est nulle sur les plans tangents à r** . On a :

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \pi}{\partial z} dz.$$

Supposons que $\frac{\partial \pi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Dans ce cas, quitte à réduire V , on peut choisir une paramétrisation particulière $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S définie par $r_1(x, y) = (x, y, h(x, y))$, où $h: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^∞ . On obtient pour tout point (x_1, y_1, z_1) de S :

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)(x_1, y_1, z_1) \Big|_{\text{dir } T_{r_1}((x_1, y_1))} = (dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \pi}{\partial y} dy \right)^2) \Big|_{\text{dir } T_{r_1}(x_1, y_1)},$$

d'où

$$E(x_1, y_1) = 1 + \frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) \right)^2}{\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) \right)^2},$$

$$F(x_1, y_1) = \frac{\frac{\partial \pi}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) \cdot \frac{\partial \pi}{\partial y}(x_1, y_1, z_1)}{\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) \right)^2},$$

$$G(x_1, y_1) = 1 + \frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}(x_1, y_1, z_1)\right)^2}{\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)\right)^2}.$$

En terme de h , on obtient : $E = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$, $F = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$ et $G = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$.

IV.7 Surfaces isométriques

Considérons deux surfaces paramétrées régulières $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (qu'on suppose toutes deux injectives). Notons

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

la première forme quadratique de r et

$$I_1 = E_1du_1^2 + 2F_1du_1dv_1 + G_1dv_1^2$$

celle de r_1 .

DEFINITION IV.7.1 : *Les surfaces régulières r et r_1 sont dites diffeomorphes s'il existe un C^∞ -diffeomorphisme $\varphi: U_1 \rightarrow U$.*

REMARQUE :

- On ne suppose pas que les supports de r et r_1 coïncident.
- Deux surfaces équivalentes sont diffeomorphes.

DEFINITION IV.7.2 : *Un C^∞ -diffeomorphisme $\varphi: U_1 \rightarrow U$ est une isométrie des surfaces r et r_1 si $\varphi^*I = I_1$. On dit que r et r_1 sont isométriques s'il existe une isométrie $\varphi: U_1 \rightarrow U$ de r et r_1 .*

PROPOSITION IV.7.3 : *Deux surfaces paramétrées régulières et équivalentes sont isométriques.*

DÉMONSTRATION : Soit $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées régulières équivalentes et soit $\varphi: U_1 \rightarrow U$ le C^∞ -diffeomorphisme tel que $r \circ \varphi = r_1$. Montrons que φ est une isométrie. En effet,

$$\begin{aligned} I_1 &= r_1^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= (r \circ \varphi)^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \varphi^*(r^*(dx^2 + dy^2 + dz^2)) \\ &= \varphi^*I, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

REMARQUE : Si $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux surfaces paramétrées régulières qu'on suppose isométriques, et si $\varphi: U_1 \rightarrow U$ est une isométrie de ces surfaces, alors les premières formes quadratiques de $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\tilde{r} = r \circ \varphi: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ coïncident. En effet, la première forme quadratique de \tilde{r} est $\varphi^*I = I_1$ car :

$$\tilde{I} = \tilde{r}^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (r \circ \varphi)^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \varphi^*(r^*(dx^2 + dy^2 + dz^2)) = \varphi^*I = I_1.$$

PROPOSITION IV.7.4 : *Soit $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées régulières diffeomorphes et $\varphi: U_1 \rightarrow U$ un C^∞ -diffeomorphisme. Notons $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ et $I_1 = E_1du_1^2 + 2F_1du_1dv_1 + G_1dv_1^2$ les premières formes*

quadratiques de ces surfaces. Alors, $\varphi^* I = I_1$ si et seulement si pour toute courbe paramétrée $f_1: J \rightarrow U_1$, la longueur de la courbe $\tilde{f}_1 = r_1 \circ f_1: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ est égale à la longueur de la courbe $\tilde{f} = r \circ \varphi \circ f_1: J \rightarrow \mathbb{R}^3$.

DÉMONSTRATION :

⊖ On suppose que $\varphi^* I = I_1$, c'est-à-dire que φ est une isométrie. Soit $f_1: J \rightarrow U_1$ une courbe paramétrée. Considérons la surface $\tilde{r}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\tilde{r} = r \circ \varphi$ (les surfaces r et \tilde{r} sont équivalentes). La première forme quadratique de \tilde{r} coïncide avec $\varphi^* I = I_1$. Donc la longueur de la courbe $\tilde{f}_1 = r_1 \circ f_1$ coïncide avec la longueur de la courbe $\tilde{f} = r \circ \varphi \circ f_1$.

⊕ Soit $(u_1^{(0)}, v_1^{(0)})$ un point de U_1 . Considérons une courbe $f_1:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U_1$ définie par

$$f_1(t) = \underbrace{(u_1^{(0)} + at)}_{u_1(t)}, \underbrace{(v_1^{(0)} + bt)}_{v_1(t)}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Notons de la même façon $f = (u, v)$.

Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sqrt{E_1(f_1(\theta))(u_1'(\theta))^2 + 2F_1(f_1(\theta))u_1'(\theta)v_1'(\theta) + G_1(f_1(\theta))(v_1'(\theta))^2} d\theta \\ = & \int_0^t \sqrt{E(f(\theta))(u'(\theta))^2 + 2F(f(\theta))u'(\theta)v'(\theta) + G(f(\theta))(v'(\theta))^2} d\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

$$\begin{aligned} & E(f(t))(u'(t))^2 + 2F(f(t))u'(t)v'(t) + G(f(t))(v'(t))^2 \\ = & E_1(f_1(t))(u_1'(t))^2 + 2F_1(f_1(t))u_1'(t)v_1'(t) + G_1(f_1(t))(v_1'(t))^2. \end{aligned}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient :

$$I_1(f_1(0))(u_1'(0), v_1'(0)) = I_1(f_1(0))(a, b) = I_1(f_1(0))(f_1'(0)) = I(f(0))(u'(0), v'(0)).$$

De plus, $(u'(0), v'(0)) = f'(0) = (\varphi \circ f_1)'(0) = \varphi'(f_1(0))(f_1'(0))$. Par conséquent, $\varphi^* I = I_1$. □

EXEMPLE : Soit

$$\begin{aligned} r: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$

un plan. Le support de r est Oxy . On a $r_u(u, v) = (1, 0, 0)$ et $r_v(u, v) = (0, 1, 0)$. Donc $E = 1$, $F = 0$ et $G = 1$. Par conséquent,

$$I = du^2 + dv^2.$$

Soit

$$\begin{aligned} r_1: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto (R \cos u, R \sin u, v) \end{aligned}$$

où $R > 0$. Le support de r_1 est un cylindre. On a $(r_1)_u(u, v) = (-R \sin u, R \cos u, 0)$ et $(r_1)_v(u, v) = (0, 0, 1)$ d'où $E_1 = R^2$, $F_1 = 0$ et $G_1 = 1$. Par conséquent,

$$I_1 = R^2 du^2 + dv^2.$$

On peut introduire une nouvelle coordonnée $u_1 = Ru$. On obtient alors $I_1 = du_1^2 + dv^2$, donc r et r_1 sont isométriques (localement).

On verra plus tard qu'une sphère

$$(u, v) \mapsto (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v)$$

n'est pas localement isométrique à un plan.

DEFINITION IV.7.5 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , g une métrique riemannienne sur Ω , $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \Omega$ une courbe paramétrée. Soit $[a, b] \subset I$. La longueur de l'arc de a à b de f par rapport à g est

$$\int_a^b \sqrt{g(f(t))(f'(t))} dt.$$

Une surface paramétrée régulière $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ produit une métrique riemannienne sur U (c'est la première forme quadratique de r). Pour une courbe $f: J \rightarrow U$, la longueur par rapport à cette métrique riemannienne est égale à la longueur de la courbe $\tilde{f} = r \circ f$ (par rapport à la métrique riemannienne standard $dx^2 + dy^2 + dz^2$ de \mathbb{R}^3).

IV.8 La deuxième forme quadratique d'une surface

DEFINITION IV.8.1 : Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et (u_0, v_0) un point de U . On suppose que \mathbb{R}^3 est orienté. Notons $n(u_0, v_0)$ le vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $\|n(u_0, v_0)\| = 1$, $n(u_0, v_0)$ dirige la droite normale de r en (u_0, v_0) et les vecteurs $r_u(u_0, v_0)$, $r_v(u_0, v_0)$ et $n(u_0, v_0)$ forment une base directe de \mathbb{R}^3 . Le vecteur $n(u_0, v_0)$ s'appelle vecteur normal de r en (u_0, v_0) . La base r_u, r_v, n est un analogue du repère de Frénet.

REMARQUE : La base r_u, r_v, n n'est pas forcément orthonormée. On a :

$$n(u_0, v_0) = \frac{r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0)}{\|r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0)\|} \quad (\text{IV.4})$$

LEMME IV.8.2 : Soit a et b deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors :

$$\|a \wedge b\|^2 = \begin{vmatrix} a^2 & a \cdot b \\ b \cdot a & b^2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant s'appelle déterminant de Gram de a et b .

DÉMONSTRATION : Laisée en exercice. □

PROPOSITION IV.8.3 : On a $n(u_0, v_0) = \frac{r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2}}$.

DÉMONSTRATION : On a

$$\|r_u \wedge r_v\|^2 = \begin{vmatrix} r_u^2 & r_u \cdot r_v \\ r_v \cdot r_u & r_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2$$

d'où $n = \frac{r_u \wedge r_v}{\sqrt{EG - F^2}}$. □

Soit t_0 un vecteur tangent à r en (u_0, v_0) , c'est-à-dire un vecteur appartenant à la direction de $T_r(u_0, v_0)$. On suppose que $\|t_0\| = 1$. Considérons le plan affine P qui passe par $r(u_0, v_0)$ et dont la direction est engendrée par t_0 et $n(u_0, v_0)$.

Quitte à réduire U , on peut supposer que r est injective et que l'intersection du support de r avec le plan P est une sous-variété (de classe C^∞) de dimension 1 de \mathbb{R}^3 . Donc, on peut considérer cette intersection comme image d'une courbe paramétrée régulière.

DEFINITION IV.8.4 : *Une telle courbe paramétrée régulière s'appelle section normale de r en (u_0, v_0) . On dit que cette section normale est définie par t_0 .*

Le vecteur vitesse en $r(u_0, v_0)$ d'une section normale définie par t_0 appartient à la direction de $T_r(u_0, v_0)$ et à la direction de P . Donc ce vecteur vitesse est colinéaire à t_0 . On va toujours supposer qu'une section normale est paramétrée par la longueur d'arc de telle façon que t_0 soit le vecteur vitesse de la section normale en $r(u_0, v_0)$.

Soit $f: J \rightarrow U$ une courbe paramétrée telle que $\tilde{f} = r \circ f$ soit une section normale de r en (u_0, v_0) définie par t_0 (paramétrée par la longueur d'arc).

REMARQUE : La courbe f n'est pas forcément paramétrée par la longueur d'arc.

Supposons que $f^{-1}(u_0, v_0) = 0$ (on suppose que f est injective). Pour tout $s \in J$, considérons le vecteur vitesse $t(s)$ de la courbe \tilde{f} en s . On a pour tout $s \in J$:

$$\tilde{f}'(s) = t(s) = r_u(f(s))u'(s) + r_v(f(s))v'(s)$$

où $f(s) = (u(s), v(s))$. Donc, pour tout $s \in J$, on a :

$$\begin{aligned} t'(s) &= [(r_{uu}(f(s))u'(s) + r_{uv}(f(s))v'(s))u'(s) \\ &\quad + r_u(f(s))u''(s) \\ &\quad + (r_{vu}(f(s))u'(s) + r_{vv}(f(s))v'(s))v'(s) \\ &\quad + r_v(f(s))v''(s)] \\ &= r_{uu}(f(s))(u'(s))^2 + 2r_{uv}(f(s))u'(s)v'(s) + r_{vv}(f(s))(v'(s))^2 \\ &\quad + r_u(f(s))u''(s) + r_v(f(s))v''(s). \end{aligned}$$

En posant $s = 0$ et en considérant le produit scalaire avec $n(u_0, v_0) = n_0$, on obtient :

$$t'(0) \cdot n_0 = (r_{uu}(u_0, v_0) \cdot n_0)(u'(0))^2 + 2(r_{uv}(u_0, v_0)) \cdot n_0 u'(0)v'(0) + (r_{vv}(u_0, v_0) \cdot n_0)(v'(0))^2.$$

C'est la courbure de \tilde{f} en (u_0, v_0) munie d'une signe. On note cette courbure $k(t_0)$. Posons alors :

$$L(u_0, v_0) = r_{uu}(u_0, v_0) \cdot n_0, \tag{IV.5}$$

$$M(u_0, v_0) = r_{uv}(u_0, v_0) \cdot n_0, \tag{IV.6}$$

$$N(u_0, v_0) = r_{vv}(u_0, v_0) \cdot n_0. \tag{IV.7}$$

On a :

$$k(t_0) = L(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2M(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + N(u_0, v_0)(v'(0))^2,$$

où $t_0 = r_u(u_0, v_0)u'(0) + r_v(u_0, v_0)v'(0)$.

DEFINITION IV.8.5 : *La forme quadratique différentielle*

$$\text{II} = Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2, \tag{IV.8}$$

définie sur U s'appelle deuxième forme quadratique (ou deuxième forme fondamentale) de la surface r .

REMARQUE : Assez souvent la forme quadratique correspondante définie sur les directions des plans tangents à r (on utilise l'identification de la direction de $T_r(u_0, v_0)$ avec \mathbb{R}^2 donnée par la base $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$ et réalisée par $r'(u_0, v_0)$) s'appelle aussi la deuxième forme quadratique de r .

REMARQUE : Pour tout vecteur $t_0 = \alpha r_u(u_0, v_0) + \beta r_v(u_0, v_0)$ tel que $\|t_0\| = 1$, on a :

$$k(t_0) = L(u_0, v_0)\alpha^2 + 2M(u_0, v_0)\alpha\beta + N(u_0, v_0)\beta^2 = \Pi(u_0, v_0)(\alpha, \beta).$$

Donc, pour tout vecteur $t = \lambda r_u(u_0, v_0) + \mu r_v(u_0, v_0)$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ (ou de façon équivalente, pour tout vecteur non nul $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$k(t) := k\left(\frac{t}{\|t\|}\right) = \frac{L(u_0, v_0)\lambda^2 + 2M(u_0, v_0)\lambda\mu + N(u_0, v_0)\mu^2}{E(u_0, v_0)\lambda^2 + 2F(u_0, v_0)\lambda\mu + G(u_0, v_0)\mu^2} = \frac{\Pi(u_0, v_0)(\lambda, \mu)}{I(u_0, v_0)(\lambda, \mu)}. \quad (\text{IV.9})$$

On écrit $k = \frac{\Pi}{I}$.

Indicatrice de Dupin

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière (on suppose que r est injective) et (u_0, v_0) un point de U . On considère une courbe dans $T_r(u_0, v_0)$: Pour tout vecteur t_0 appartenant à la direction de $T_r(u_0, v_0)$ tel que $\|t_0\| = 1$ et $k(t_0) \neq 0$, on considère le point $\mathcal{O} + \frac{1}{\sqrt{|k(t_0)|}}t_0$, où $\mathcal{O} = r(u_0, v_0)$. Ce point appartient à $T_r(u_0, v_0)$.

Si (x, y) sont les coordonnées de ce point dans le repère affine $(\mathcal{O}, r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$ (autrement dit, si $\frac{1}{\sqrt{|k(t_0)|}}t_0 = xr_u(u_0, v_0) + yr_v(u_0, v_0)$), alors

$$\|xr_u(u_0, v_0) + yr_v(u_0, v_0)\|^2 = I(u_0, v_0)(x, y),$$

$$\text{et } k(t_0) = \frac{\Pi(u_0, v_0)(x, y)}{I(u_0, v_0)(x, y)}.$$

Par conséquent, $\sqrt{|I(u_0, v_0)(x, y)|} = \sqrt{\frac{I(u_0, v_0)(x, y)}{|\Pi(u_0, v_0)(x, y)|}}$, d'où

$$|\Pi(u_0, v_0)(x, y)| = 1 \text{ c'est-à-dire } |L(u_0, v_0)x^2 + 2M(u_0, v_0)xy + N(u_0, v_0)y^2| = 1.$$

DEFINITION IV.8.6 : *La courbe que nous avons introduite ci-dessus s'appelle indicatrice de Dupin de r en (u_0, v_0) . Cette courbe est contenue dans $T_r(u_0, v_0)$ et est définie par l'équation*

$$|\Pi(u_0, v_0)(x, y)| = 1 \quad (\text{IV.10})$$

dans le repère affine $(\mathcal{O}, r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$.

① Si $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - (M(u_0, v_0))^2 > 0$, l'indicatrice de Dupin est une ellipse d'équation

$$L(u_0, v_0)x^2 + 2M(u_0, v_0)xy + N(u_0, v_0)y^2 = \varepsilon,$$

où $\varepsilon = 1$ si $L(u_0, v_0) > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $L(u_0, v_0) < 0$. Un tel point (u_0, v_0) est dit **elliptique**. Dans un point elliptique, toutes les courbures $k(t_0)$ ont le même signe (qui coïncide avec le signe de $L(u_0, v_0)$). Parmi ces courbures, il y a la courbure maximale k_1 et la courbure minimale k_2 ($k_1 \neq k_2$ si l'indicatrice de Dupin n'est pas un cercle).

- ② Si $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - (M(u_0, v_0))^2 < 0$, alors l'indicatrice de Dupin est la réunion de deux hyperboles :

$$L(u_0, v_0)x^2 + 2M(u_0, v_0)xy + N(u_0, v_0)y^2 = \pm 1.$$

Ces deux hyperboles ont des asymptotes communes. Un tel point (u_0, v_0) est dit **hyperbolique**. La fonction $t_0 \mapsto k(t_0)$ a la valeur maximale $k_1 > 0$ (qui correspond à un axe des hyperboles, cette valeur est réalisée deux fois). Cette fonction a aussi la valeur minimale $k_2 < 0$ (qui correspond à l'autre axe et qui est réalisée deux fois).

- ③ Si $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - (M(u_0, v_0))^2 = 0$ et au moins l'un des nombres $L(u_0, v_0)$, $M(u_0, v_0)$ et $N(u_0, v_0)$ est non nul, alors l'indicatrice de Dupin est la réunion de deux droites parallèles définies par l'équation

$$\left(\sqrt{|L(u_0, v_0)|}x + \sqrt{|N(u_0, v_0)|}y \right)^2 = 1.$$

Un tel point est dit **parabolique**. Dans la direction de ces deux droites, la courbure est égale à 0. La courbure a toujours le même signe. Dans la direction orthogonale à la direction des droites, la courbure est maximale (si toutes les courbures sont positives ou nulles) ou minimale (si toutes les courbures sont négatives ou nulles).

- ④ Si $L(u_0, v_0) = N(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) = 0$, alors, au point (u_0, v_0) , l'application $t_0 \mapsto k(t_0)$ est nulle, et l'indicatrice de Dupin au point (u_0, v_0) est vide.

REMARQUE : Dans les points elliptiques et paraboliques, l'indicatrice de Dupin peut être considérée comme une courbe de degré 2. Dans les points hyperboliques, l'indicatrice de Dupin est une courbe de degré 4.

Dans les trois cas, la fonction $t_0 \mapsto k(t_0)$ (si elle n'est pas constante) a la valeur maximale k_1 (qui est réalisée deux fois) et la valeur minimale k_2 (qui est réalisée deux fois).

DEFINITION IV.8.7 : Les nombres k_1 et k_2 s'appellent courbures principales de la surface r en (u_0, v_0) .

Leur produit k_1k_2 s'appelle courbure de Gauss de r en (u_0, v_0) et est noté K .

Leur moyenne arithmétique $\frac{k_1+k_2}{2}$ s'appelle courbure moyenne de r en (u_0, v_0) et est notée H .

REMARQUE :

- Dans le cas elliptique, $K = k_1k_2 > 0$.
- Dans le cas hyperbolique, $K = k_1k_2 < 0$.
- Dans le cas parabolique, $K = k_1k_2 = 0$.

Supposons maintenant que la fonction $t_0 \mapsto k(t_0)$ n'est pas constante. D'après la définition, k_2 est la valeur minimale de la fonction

$$(x, y) \mapsto \frac{L(u_0, v_0)x^2 + 2M(u_0, v_0)xy + N(u_0, v_0)y^2}{E(u_0, v_0)x^2 + 2F(u_0, v_0)xy + G(u_0, v_0)y^2}.$$

(Ici, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

Donc, $\frac{\text{II}(u_0, v_0)(x, y)}{\text{I}(u_0, v_0)(x, y)} \geq k_2$ (*) pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et il existe un vecteur $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ tel que

$$\frac{\text{II}(u_0, v_0)(x_1, y_1)}{\text{I}(u_0, v_0)(x_1, y_1)} = k_2.$$

L'inégalité (*) est équivalente à l'inégalité

$$\Pi(u_0, v_0)(x, y) - k_2 I(u_0, v_0)(x, y) \geq 0.$$

Donc, la forme quadratique $\Pi(u_0, v_0)(x, y) - k_2 I(u_0, v_0)(x, y)$ est positive, mais pas définie positive. La matrice de cette forme quadratique (dans la base canonique) est :

$$\begin{pmatrix} L(u_0, v_0) - k_2 E(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) - k_2 F(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) - k_2 F(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) - k_2 G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

De façon similaire, la forme quadratique de la matrice

$$\begin{pmatrix} L(u_0, v_0) - k_1 E(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) - k_1 F(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) - k_1 F(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) - k_1 G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

est négative, mais pas définie négative.

REMARQUE : Puisque la fonction $t_0 \mapsto k(t_0)$ n'est pas constante, les matrices IV.11 et IV.12 ne sont pas nulles.

Par conséquent, les courbures principales k_1 et k_2 sont des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} L(u_0, v_0) - kE(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) - kF(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) - kF(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) - kG(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{IV.13})$$

autrement dit, de l'équation

$$\begin{aligned} 0 = & (E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - (F(u_0, v_0))^2) k^2 \\ & - (L(u_0, v_0)G(u_0, v_0) + N(u_0, v_0)E(u_0, v_0) - 2M(u_0, v_0)F(u_0, v_0)) k \\ & + L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - (M(u_0, v_0))^2, \end{aligned}$$

qui est de la forme $ak^2 + bk + c = 0$. Par conséquent,

$$K = \frac{c}{a} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (\text{IV.14})$$

et

$$H = \frac{1}{2} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{LG + NE - 2MF}{EG - F^2}. \quad (\text{IV.15})$$

DEFINITION IV.8.8 : *Les racines de l'équation IV.13 sont appelées les valeurs propres de la paire de formes quadratiques $I(u_0, v_0)$ et $\Pi(u_0, v_0)$. Les vecteurs non nuls $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\begin{pmatrix} L(u_0, v_0) - k_i E(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) - k_i F(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) - k_i F(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) - k_i G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

pour $i = 1, 2$ s'appellent vecteurs propres de la paire de formes quadratiques $I(u_0, v_0)$ et $\Pi(u_0, v_0)$.

Les directions définies par les vecteurs propres (dans \mathbb{R}^2 et dans la direction de $T_r(u_0, v_0)$) s'appellent directions principales.

Supposons que les coordonnées dans \mathbb{R}^3 soient choisies de telle façon que la surface considérée soit (localement) le graphe d'une fonction

$$r: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, h(u, v)) \end{array}$$

où $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ . Supposons que $(0, 0) \in U$, $h(0, 0) = 0$ et le vecteur normal à r en $(0, 0)$ coïncide avec $(0, 0, 1)$. (La dernière hypothèse est équivalente à $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 0$). Alors :

$$h(u, v) = L(0, 0)u^2 + 2M(0, 0)uv + N(0, 0)v^2 + o(\|(u, v)\|^2),$$

car :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}(u, v)\right) \\ r_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial v}(u, v)\right) \\ n(u, v) = \left(-\frac{\partial h}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial h}{\partial v}(u, v), 1\right) \\ r_{uu}(u, v) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v)\right) \\ r_{uv}(u, v) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u, v)\right) \\ r_{vv}(u, v) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(u, v)\right) \end{array} \right.$$

Donc au voisinage d'un point elliptique (u_0, v_0) , une surface est "bien approximée" par un parabolôïde elliptique et au voisinage d'un point hyperbolique (u_1, v_1) , une surface est "bien approximée" par un parabolôïde hyperbolique. Au voisinage d'un point parabolique, la surface peut être assez compliquée.

IV.9 Endomorphisme de Weingarten

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière (on suppose que r est injective) et (u_0, v_0) un point de U .

DEFINITION IV.9.1 : *L'application $n: U \rightarrow S^2$ (où S^2 est la sphère centrée en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon 1) qui, à tout (u, v) de U , associe le vecteur normal $n(u, v)$ s'appelle application de Gauss.*

REMARQUE : Souvent, on appelle application de Gauss l'application correspondante $\Sigma \rightarrow S^2$, où Σ est le support de r .

DEFINITION IV.9.2 : *L'image de \mathbb{R}^2 par $n'(u_0, v_0)$ est contenue dans la direction du plan tangent à S^2 en $n(u_0, v_0)$, autrement dit, dans la direction de $T_r(u_0, v_0)$. On obtient un endomorphisme*

$$(r'(u_0, v_0))^{-1} \circ n'(u_0, v_0) \tag{IV.16}$$

de \mathbb{R}^2 qui s'appelle endomorphisme de Weingarten (l'endomorphisme correspondant de la direction de $T_r(u_0, v_0)$ s'appelle aussi endomorphisme de Weingarten). On le note $W(u_0, v_0)$.

PROPOSITION IV.9.3 : *L'endomorphisme de Weingarten $W(u_0, v_0)$ est symétrique (ou autoadjoint) par rapport à la forme bilinéaire φ associée à la forme quadratique $I(u_0, v_0)$, c'est-à-dire, pour tous vecteurs w_1, w_2 de \mathbb{R}^2 , on a :*

$$\varphi(W(u_0, v_0)(w_1), w_2) = \varphi(w_1, W(u_0, v_0)(w_2)),$$

ce qui revient à dire que l'endomorphisme de Weingarten de la direction de $T_r(u_0, v_0)$ est symétrique par rapport à la structure euclidienne standard.

De plus, la forme quadratique $w \mapsto \varphi(W(u_0, v_0)(w), w)$ coïncide avec $-\Pi(u_0, v_0)$.

DÉMONSTRATION : Pour tout point (u, v) de U , on a :

$$n(u, v) \cdot r_v(u, v) = n(u, v) \cdot r_u(u, v) = 0.$$

Donc, (on dérive ces deux égalités par rapport à u et à v) :

$$\begin{cases} n_u(u, v) \cdot r_u(u, v) + n(u, v) \cdot r_{uu}(u, v) = 0 \\ n_v(u, v) \cdot r_u(u, v) + n(u, v) \cdot r_{uv}(u, v) = 0 \\ n_u(u, v) \cdot r_v(u, v) + n(u, v) \cdot r_{uv}(u, v) = 0 \\ n_v(u, v) \cdot r_v(u, v) + n(u, v) \cdot r_{vv}(u, v) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $n'(u_0, v_0)(1, 0) \cdot r'(u_0, v_0)(0, 1) = n'(u_0, v_0)(0, 1) \cdot r'(u_0, v_0)(1, 0)$.

Cette égalité peut être réécrite de la façon suivante :

$$\varphi(W(u_0, v_0)(1, 0), (0, 1)) = \varphi(W(u_0, v_0)(0, 1), (1, 0)).$$

Par conséquent, pour tous $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\varphi(W(u_0, v_0)(w_1), w_2) = \varphi(W(u_0, v_0)(w_2), w_1),$$

puis on conclut en se rappelant que φ est symétrique.

De plus, les égalités données plus haut montrent que

$$\varphi(W(u_0, v_0)(w^{(1)}, w^{(2)}), (w^{(1)}, w^{(2)})) = - \left(L(u_0, v_0)(w^{(1)})^2 + 2M(u_0, v_0)w^{(1)}w^{(2)} + N(u_0, v_0)(w^{(2)})^2 \right),$$

ce qui achève la démonstration. \square

REMARQUE : Pour la base (r_u, r_v, n) on peut écrire des formules similaires aux formules de Frénet, en exprimant $r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, n_u$ et n_v comme combinaisons linéaires de r_u, r_v et n .

Puisque $n^2 = 1$, on a $n \cdot n_u = 0$ et $n \cdot n_v = 0$. Donc $n_u = \alpha r_u + \beta r_v$ et $n_v = \alpha_1 r_u + \beta_1 r_v$. Par conséquent,

$$-L = r_u \cdot n_u = \alpha r_u^2 + \beta r_u r_v = \alpha E + \beta F,$$

$$-M = r_v \cdot n_u = \alpha r_u \cdot r_v + \beta r_v^2 = \alpha F + \beta G,$$

d'où $\alpha = \frac{FM-GL}{EG-F^2}$ et $\beta = \frac{FL-EM}{EG-F^2}$. De façon similaire, $\alpha_1 = \frac{FN-GM}{EG-F^2}$ et $\beta_1 = \frac{FM-EN}{EG-F^2}$.

De plus, on a $n \cdot r_{uu} = L$, $n \cdot r_{uv} = M$ et $n \cdot r_{vv} = N$. Puisque $n \cdot r_u = n \cdot r_v = 0$, les coefficients de n dans les combinaisons linéaires exprimant r_{uu}, r_{uv} et r_{vv} en fonction de r_u, r_v et n sont égaux, respectivement, à L, M et N . On obtient les formules :

$$\begin{cases} r_{uu} = \Gamma_{1,1}^1 r_u + \Gamma_{1,1}^2 r_v + Ln \\ r_{uv} = \Gamma_{1,2}^1 r_u + \Gamma_{1,2}^2 r_v + Mn \\ r_{vv} = \Gamma_{2,2}^1 r_u + \Gamma_{2,2}^2 r_v + Nn \\ n_u = \frac{FM-GL}{EG-F^2} r_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} r_v \\ n_v = \frac{FN-GM}{EG-F^2} r_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} r_v \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

pour certaines fonctions $\Gamma_{i,j}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINITION IV.9.4 : Les fonctions $\Gamma_{i,j}^k$ s'appellent *symboles de Christoffel*. Les égalités IV.17 s'appellent *équations de Weingarten*.

Remarquons que les deux dernières équations de Weingarten nous disent que la matrice de $W(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dans la base canonique (et la matrice de l'endomorphisme de Weingarten de la direction de $T_r(u_0, v_0)$ dans la base $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$ est :

$$\frac{-1}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - (F(u_0, v_0))^2} \begin{pmatrix} G(u_0, v_0) & -F(u_0, v_0) \\ -F(u_0, v_0) & E(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

autrement dit :

$$- \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

REMARQUE : Cette matrice n'est pas symétrique en général. Par contre, elle est symétrique si $F(u_0, v_0) = 0$ et $E(u_0, v_0) = G(u_0, v_0)$.

Par conséquent, k_0 est une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} L(u_0, v_0) - kE(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) - kF(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) - kF(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) - kG(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si $-k_0$ est une valeur propre de $W(u_0, v_0)$.

De plus, un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre, associé à une valeur propre k_0 , de la paire $I(u_0, v_0)$ et $II(u_0, v_0)$ si et seulement si (x, y) est un vecteur propre, correspondant à la valeur propre $-k_0$, de $W(u_0, v_0)$.

DEFINITION IV.9.5 : On dit qu'un point (u_0, v_0) de U est *ombilic pour une surface paramétrée régulière* $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ si les courbures de toutes les sections normales de r en (u_0, v_0) sont égales.

REMARQUE : En tout point non ombilic, l'endomorphisme de Weingarten a deux sous-espaces propres (orthogonaux) qui sont les directions principales de notre surface en ce point.

REMARQUE : Si $II(u_0, v_0)$ n'est pas définie positive ou négative, et si $II(u_0, v_0)$ n'est pas nulle, elle admet deux directions isotropes qui s'appellent **directions asymptotiques**.

IV.10 Theorema egregium

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière (on suppose que r est injective).

On a $r_u^2 = E$, donc $2r_{uu} \cdot r_u = E_u$ et $2r_{uv} \cdot r_u = E_v$.

Par conséquent, $r_{uu} \cdot r_u = \frac{1}{2}E_u$ et $r_{uv} \cdot r_u = \frac{1}{2}E_v$.

De façon similaire, $r_v^2 = G$ implique que $r_{uv} \cdot r_v = \frac{1}{2}G_u$ et $r_{vv} \cdot r_v = \frac{1}{2}G_v$.

De plus, $r_u \cdot r_v = F$, d'où $r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} = F_u$ et $r_{uv} \cdot r_v + r_u \cdot r_{vv} = F_v$.

Donc $r_{uu} \cdot r_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$ et $r_{vv} \cdot r_u = F_v - \frac{1}{2}G_u$.

A partir des trois premières équations de Weingarten (Equations IV.17), on obtient :

$$\begin{cases} E\Gamma_{1,1}^1 + F\Gamma_{1,1}^2 &= \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{1,1}^1 + G\Gamma_{1,1}^2 &= F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{1,2}^1 + F\Gamma_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}E_v \\ F\Gamma_{1,2}^1 + G\Gamma_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}G_u \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

$$\begin{cases} E\Gamma_{2,2}^1 + F\Gamma_{2,2}^2 &= F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F\Gamma_{2,2}^1 + G\Gamma_{2,2}^2 &= \frac{1}{2}G_v \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

EXERCICE IV.6 : Calculer $\Gamma_{i,j}^k$, $i, j, k = 1, 2$.

REMARQUE : Les symboles de Christoffel ne dépendent que des coefficients de la première forme quadratique (et de leurs dérivées partielles).

Pour obtenir des relations entre les coefficients des équations de Weingarten, on peut calculer (de deux façons) r_{uuv} , r_{uvv} et n_{uv} .

On va considérer le cas r_{uuv} . On a :

$$\begin{aligned} r_{uuv} &= (\Gamma_{1,1}^1 r_u + \Gamma_{1,1}^2 r_v + Ln)_v \\ &= \dots + \Gamma_{1,1}^1 r_{uv} + \dots + \Gamma_{1,1}^2 r_{vv} + L \left(\dots + \frac{FM - EN}{EG - F^2} r_v \right) \\ &= \dots + \Gamma_{1,1}^1 (\dots) + \Gamma_{1,1}^2 (\dots) + L \frac{FM - EN}{EG - F^2} r_v \\ &= \left(L \frac{FM - EN}{EG - F^2} + \dots \right) r_v + \dots \end{aligned}$$

(Les points de suspension remplacent des termes qui ne dépendent que des coefficients de la première forme quadratique et de leurs dérivées partielles, ou bien des vecteurs colinéaires soit à r_u , soit à n).

De façon similaire,

$$(r_{uv})_u = \left(M \frac{FL - EM}{EG - F^2} + \dots \right) r_v + \dots$$

Par conséquent, $L \frac{FM - EN}{EG - F^2} - M \frac{FL - EM}{EG - F^2}$ ne dépend que des coefficients de la première forme quadratique (et de leurs dérivées partielles).

REMARQUE :

$$L \frac{FM - EN}{EG - F^2} - M \frac{FL - EM}{EG - F^2} = -E \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -EK$$

où K est la courbure de Gauss.

On obtient alors l'énoncé suivant :

THEOREME IV.10.1 (Théorème de Gauss - Theorema Egregium) : *Deux surfaces isométriques ont la même courbure de Gauss aux points correspondants.*

REMARQUE : La réciproque est fausse.

DÉMONSTRATION : Deux observations :

1. Deux surfaces équivalentes ont la même courbure de Gauss aux points correspondants.
2. Si $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $r_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux surfaces isométriques (et $\varphi: U_1 \rightarrow U$ est une isométrie), alors :
 - r et $r \circ \varphi$ ont la même courbure de Gauss aux points correspondants ($\varphi(u, v)$ et (u, v)).
 - $r \circ \varphi$ et r_1 ont la même première forme quadratique, donc elles ont la même courbure de Gauss. \square

V

Étude des sous-variétés de \mathbb{R}^n

Sommaire

V.1	Sous-variétés immergées	48
V.2	Espaces tangents	48
V.3	Extrema liés, méthode des multiplicateurs de Lagrange	49
V.4	Applications définies sur une sous-variété	50
V.5	Fibré tangent	51
V.6	Fibrés vectoriels	52
V.7	Fibré tangent de la sphère S^k	54

V.1 Sous-variétés immergées

DEFINITION V.1.1 : Soit $U \subset \mathbb{R}^{n-p}$ un ouvert connexe. On appelle sous-variété immergée de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension $n - p$ une immersion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k = 1, 2, \dots, +\infty$).

Dans la suite, on va toujours supposer que $k = +\infty$.

Au voisinage d'un point arbitraire $u_0 \in U$, l'immersion f est injective : il existe un voisinage ouvert U_0 de $u_0 \in U$ tel que $f(U_0)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n (de dimension $n - p$), et f est une paramétrisation (locale) de $f(U_0)$.

PROPOSITION V.1.2 : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$ et x_0 un point de M . Soit $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations locales de M au voisinage de x_0 telles que $f_1(U_1) = f_2(U_2)$. Alors il existe un C^∞ -difféomorphisme $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ tel que $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

DÉMONSTRATION : Laissée en exercice. □

V.2 Espaces tangents

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une sous-variété immergée, où U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^{n-p} , et u_0 un point de U .

DEFINITION V.2.1 : L'espace tangent à f en u_0 est le sous-espace affine qui passe par $f(u_0)$ et qui est dirigé par $f'(u_0)(\mathbb{R}^{n-p})$.

REMARQUE : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n (de dimension $n - p$). Soit x_0 un point de M . On choisit une paramétrisation locale $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M au voisinage de x_0 . On pose $u_0 = f^{-1}(x_0)$.

L'espace tangent à f en u_0 ne dépend que de M et x_0 , et s'appelle **espace tangent à M en x_0** . Il ne dépend pas du choix d'une paramétrisation.

DEFINITION V.2.2 : Un vecteur v de \mathbb{R}^n est dit tangent à M en x_0 s'il existe une courbe $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ ($\varepsilon > 0$) telle que :

- $\gamma(] -\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$,
- $\gamma(0) = x_0$,
- $\gamma'(0) = v$.

PROPOSITION V.2.3 : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n (de dimension $n - p$) et x_0 un point de M . Alors la direction $DT_M(x_0)$ de l'espace tangent $T_M(x_0)$ à M en x_0 coïncide avec l'ensemble des vecteurs tangents à M en x_0 .

DÉMONSTRATION : Laissée en exercice. □

DEFINITION V.2.4 : La direction $DT_M(x_0)$ de $T_M(x_0)$ s'appelle **espace vectoriel tangent à M en x_0** .

PROPOSITION V.2.5 : Soit W un ouvert de \mathbb{R}^n , et $g: W \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application

de classe C^∞ . Supposons que $y \in \mathbb{R}^p$ est une valeur régulière de g et $g^{-1}(y) \neq \emptyset$. Alors $M = g^{-1}(y)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$, et, pour tout point $x_0 \in g^{-1}(y)$, l'espace vectoriel tangent à M en x_0 coïncide avec $\text{Ker}(g'(x_0))$.

DÉMONSTRATION : Laissez en exercice. □

DEFINITION V.2.6 : Soit M_1 et M_2 deux sous-variétés de \mathbb{R}^n (pas forcément de même dimension). On suppose que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Soit x_0 un point de $M_1 \cap M_2$. On dit que M_1 et M_2 sont transverses en x_0 si

$$DT_{M_1}(x_0) + DT_{M_2}(x_0) = \mathbb{R}^n.$$

REMARQUE : Deux courbes dans \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) qui se coupent en un point x_0 ne peuvent pas être transverses en x_0 .

DEFINITION V.2.7 : On dit que deux sous-variétés M_1 et M_2 de \mathbb{R}^n sont transverses si elles sont transverses en tout point de leur intersection.

PROPOSITION V.2.8 : Soit M_1 et M_2 deux sous-variétés transverses de \mathbb{R}^n . Supposons que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Alors, $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n . De plus, si $x_0 \in M_1 \cap M_2$, alors $DT_{M_1 \cap M_2}(x_0) = DT_{M_1}(x_0) \cap DT_{M_2}(x_0)$ et $\text{codim}(M_1 \cap M_2) = \text{codim}(M_1) + \text{codim}(M_2)$.

EXERCICE V.1 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $F_1 + F_2 = E$.
2. L'application linéaire $\ell: E \rightarrow E/F_1 \times E/F_2$ est surjective.
3. Dans E^* , on a $F_1^\perp \cap F_2^\perp = 0$.
4. $\text{codim}(F_1) + \text{codim}(F_2) = \text{codim}(F_1 \cap F_2)$.

Ici, F_i^\perp est le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires qui s'annulent sur F_i .

DÉMONSTRATION : Soit x_0 un point de $M_1 \cap M_2$. Au voisinage de x_0 , la sous-variété M_i , $i = 1, 2$, peut être présentée comme $g_i^{-1}(0)$, où $g_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^{\text{codim}(M_i)}$ est une submersion de classe C^∞ et W_i est un ouvert.

Alors, dans $W_1 \cap W_2$, l'ensemble $M_1 \cap M_2$ est $g^{-1}(0)$, où $g: W_1 \cap W_2 \rightarrow \mathbb{R}^{\text{codim}(M_1) + \text{codim}(M_2)}$, $g = (g_1, g_2)$, est une submersion au voisinage de x_0 .

Par conséquent, $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de codimension $(\text{codim}(M_1) + \text{codim}(M_2))$. Il reste à remarquer que l'égalité $DT_{M_1 \cap M_2}(x_0) = DT_{M_1}(x_0) \cap DT_{M_2}(x_0)$ est un corollaire immédiat du fait que $DT_{M_1 \cap M_2} = \text{Ker}(g'(x_0))$. □

V.3 Extrema liés, méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$, W un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $M \subset W$, et $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . On cherche les extrema locaux de la restriction $\Psi|_M$ de Ψ sur M .

PROPOSITION V.3.1 : Pour qu'un point $x_0 \in M$ soit un extremum local de $\Psi|_M$, il est nécessaire que la restriction de $\Psi'(x_0)$ sur $DT_M(x_0)$ soit identiquement nulle.

DÉMONSTRATION : Soit v un vecteur de $DT_M(x_0)$. Il existe une courbe paramétrée $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(] -\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.

Donc, si x_0 est un extremum local de Ψ , alors $\Psi \circ \gamma$ admet 0 comme extremum local, d'où $\Psi'(x_0)(v) = 0$. \square

COROLLAIRE V.3.2 : Soit $M = g^{-1}(y)$ une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n-p$, où $g: W \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une submersion de classe C^∞ définie sur un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ et où y est un point de $g(W)$. On écrit $g = (g_1, \dots, g_p)$. Si x_0 est un extremum local d'une fonction $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , alors il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\Psi'(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i g'_i(x_0).$$

DÉMONSTRATION : Le noyau de $\Psi'(x_0)$ contient l'intersection des noyaux des formes linéaires $g'_i(x_0)$, $i = 1, \dots, p$ (proposition précédente). Ces p formes linéaires $g'_i(x_0)$ sont linéairement indépendantes car g est une submersion. On a

$$\left(\text{Ker}(\Psi'(x_0)) \supset \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(g'_i(x_0)) \right) \right) \Rightarrow \left(\text{Ker}(\Psi'(x_0))^\perp \subset \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(g'_i(x_0)) \right)^\perp \right)$$

et $\left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(g'_i(x_0)) \right)^\perp = (\text{Ker}(g'_1(x_0))^\perp + \dots + \text{Ker}(g'_p(x_0))^\perp)$. De plus, pour toute forme linéaire $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a $(\text{Ker}(L))^\perp = \mathbb{R}L$. Par conséquent, $\Psi'(x_0)$ appartient au sous-espace engendré par $g'_1(x_0), \dots, g'_p(x_0)$. \square

DEFINITION V.3.3 : Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ s'appellent *multiplicateurs de Lagrange*.

V.4 Applications définies sur une sous-variété

DEFINITION V.4.1 : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n (de dimension $n-p$), F un espace vectoriel normé (de dimension finie), x_0 un point de M , W un voisinage ouvert de x_0 dans M , et $\varphi: W \rightarrow F$ une application. On dit que φ est différentiable (resp. de classe C^k) en x_0 si, pour une certaine paramétrisation locale $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M au voisinage de x_0 telle que $f(U) \subset W$, l'application $\varphi \circ f$ est différentiable (resp. de classe C^k) en $u_0 = f^{-1}(x_0)$.

REMARQUE : Si φ est différentiable (resp. de classe C^k) en x_0 , alors $\varphi \circ f$ est différentiable (resp. de classe C^k) pour toute paramétrisation locale $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M telle que $f(U) \subset W$ et $x_0 \in f(U)$.

DEFINITION V.4.2 : On dit que φ est différentiable (resp. de classe C^k) sur W , si φ est différentiable (resp. de classe C^k) en tout point de W .

DEFINITION V.4.3 : Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n , x_0 un point de M , W un voisinage ouvert de x_0 dans M , et $\varphi: W \rightarrow F$ une application différentiable en x_0 , alors la dérivée de φ en x_0 est l'application linéaire de $DT_M(x_0)$ vers F définie de la façon suivante. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation locale de M telle que $f(U) \subset W$ et $x_0 \in f(U)$. Pour tout vecteur v appartenant à $DT_M(x_0)$, on pose :

$$\varphi'(x_0)(v) = (\varphi \circ f)'(u_0)((f'(u_0))^{-1}(v)),$$

où $u_0 = f^{-1}(x_0)$.

REMARQUE : D'après la définition, $\varphi'(x_0)$ est une application linéaire, et on vérifie facilement qu'elle ne dépend pas du choix d'une paramétrisation locale f .

Il arrive qu'une application φ différentiable sur une sous-variété M de \mathbb{R}^n soit une restriction d'une application ϕ différentiable sur un ouvert $V \supset M$ de \mathbb{R}^n . Dans ce cas, la dérivée de φ en un point arbitraire x_0 de M est simplement la restriction de $\phi'(x_0)$ sur $DT_M(x_0)$.

V.5 Fibré tangent

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$. Considérons un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formé par les couples (x, v) tels que $x \in M$ et $v \in DT_M(x)$. Ce sous-ensemble est noté TM .

PROPOSITION V.5.1 : *TM est une sous-variété de \mathbb{R}^{2n} de dimension $2(n - p)$.*

DEFINITION V.5.2 : *La sous-variété TM s'appelle fibré tangent de M .*

EXEMPLE :

1. Si $M = \mathbb{R}^n$, alors $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2. Si $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, alors TM est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : Soit x_0 un point de M , $g: W \rightarrow \mathbb{R}^p$ une submersion de classe C^∞ (W est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x_0 \in W$) telle que $M \cap W = g^{-1}(0)$. On pose $\widehat{W} = W \times \mathbb{R}^n \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{E \times F}$. Soit alors $\pi: \widehat{W} \rightarrow W$ la projection.

Posons $d: \widehat{W} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $d(x, v) = g'(x)(v)$. On obtient l'application

$$Tg: \begin{array}{ccc} \widehat{W} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \\ (x, v) & \longmapsto & (g(x), g'(x)(v)) \end{array}$$

$(Tg = (g \circ \pi, d))$.

Remarquons que $TM \cap \widehat{W} = Tg^{-1}(0)$. Il est clair que Tg est de classe C^∞ . On va montrer que c'est une submersion en tout point (x_0, v_0) , où $v_0 \in DT_M(x_0)$.

On voit que $d'_F(x_0, v_0) = g'(x_0)$ (ici $g'(x_0)$ est considérée comme application linéaire définie sur F), car $g'(x_0): F \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire. L'application g est une submersion donc $g'(x_0)$ est surjective. Par conséquent, l'application $((g \circ \pi)'(x_0, v_0), d'_F(x_0, v_0))$ est surjective, car $(g \circ \pi)'(x_0, v_0) = g'(x_0) \circ \pi$ (ici $g'(x_0)$ est considérée comme une application linéaire définie sur E).

En effet, choisissons un vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. Il existe $w_2 \in F$ tel que $d'_F(x_0, v_0)(w_2) = g'(x_0)(w_2) = b$ et il existe $w_1 \in E$ tel que $g'(x_0)(w_1) = a$. Donc, $((g \circ \pi)'(x_0, v_0), d'_F(x_0, v_0))(w_1, w_2) = (a, b)$. Par conséquent, $Tg'(x_0, v_0)$ est surjective.

Donc TM est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et de dimension $2(n - p)$. □

REMARQUE : Si M est de classe C^k , où $k \neq +\infty$, alors TM est de classe C^{k-1} .

REMARQUE : Toute application différentiable $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où M est une sous-variété de \mathbb{R}^m) définit une application $T\varphi: TM \rightarrow \mathbb{R}^n$: à tout couple $(x, v) \in TM$, on associe $\varphi'(x)(v)$.

DEFINITION V.5.3 : *Soit M et N des sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n respectivement (et de classe C^k et C^l respectivement), et x_0 un point de M . Une application $\varphi: M \rightarrow N$ est dite différentiable de classe C^j (où $1 \leq j \leq \min\{k, l\}$) en*

x_0 , si pour certaines (et donc, pour toutes) paramétrisations locales $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M et N aux voisinages de x_0 et $\varphi(x_0)$ respectivement, l'application $f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_1$ est de classe C^j .

DEFINITION V.5.4 : L'application φ est dite de classe C^j si elle est de classe C^j en tout point de M .

DEFINITION V.5.5 : Une application $\varphi: M \rightarrow N$ différentiable de classe C^∞ définit une application

$$\begin{aligned} T\varphi: TM &\longrightarrow TN \\ (x, v) &\longmapsto (\varphi(x), \varphi'(x)(v)) \end{aligned}$$

(Vérifier que $\varphi'(x)(v) \in DT_N(\varphi(x))$)

L'application $T\varphi$ s'appelle la différentielle de φ .

EXERCICE V.2 : Montrer que l'application $T\varphi$ est continue.

V.6 Fibrés vectoriels

DEFINITION V.6.1 : Soit X et E deux espaces topologiques, $\pi: E \rightarrow X$ une application continue surjective, et chaque fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ ($x \in X$) est munie d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension finie. On suppose que pour tout point x_0 de X , il existe un voisinage ouvert W de x_0 , un nombre entier positif m et un homéomorphisme $\psi: W \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(W)$ tel que, pour tout point x de W , on ait :

- $(\pi \circ \psi)(x, u) = x$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$,
- L'application $u \mapsto \psi(x, u)$ induit un isomorphisme de \mathbb{R}^m et $\pi^{-1}(\{x\})$.

Dans cette situation, on dit que le triplet (E, X, π) avec la structure d'espace vectoriel sur toutes les fibres $\pi^{-1}(\{x\})$ ($x \in X$) est un fibré vectoriel (réel).

EXEMPLE : Le triplet $(X \times \mathbb{R}^m, X, \pi)$, où $\pi: X \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$ est la projection, est un fibré vectoriel. On dit que c'est un fibré vectoriel trivial.

DEFINITION V.6.2 : L'espace X s'appelle la base du fibré, et E s'appelle l'espace total du fibré. Les homéomorphismes ψ s'appellent trivialisations locales.

DEFINITION V.6.3 : Les trivialisations locales montrent que l'application $x \mapsto m_x$ (la dimension de $\pi^{-1}(\{x\})$) est localement constante (constante sur chaque composante connexe de X). Si m_x est égale à une constante m (qui ne dépend pas de x , donc) sur X , on dit que le fibré vectoriel en question est de rang m .

EXEMPLE : Le triplet $(X \times \mathbb{R}^m, X, \pi)$, où $\pi: X \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$ est la projection, s'appelle fibré vectoriel trivial de rang m sur X .

DEFINITION V.6.4 : Un morphisme d'un fibré vectoriel $\pi_1: E_1 \rightarrow X_1$ dans un fibré vectoriel $\pi_2: E_2 \rightarrow X_2$ est une paire d'applications continues $\xi: E_1 \rightarrow E_2$ et $\eta: X_1 \rightarrow X_2$ telle que :

- $\eta \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \xi$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\xi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\eta} & X_2 \end{array}$$

- Pour tout point $x \in X_1$, l'application $\pi_1^{-1}(\{x\}) \rightarrow \pi_2^{-1}(\{\eta(x)\})$ induite par ξ est une application linéaire d'espaces vectoriels.

REMARQUE : L'application ξ détermine l'application η car π_1 est surjective.

DEFINITION V.6.5 : Un morphisme (ξ, η) de fibrés vectoriels $\pi_1: E_1 \rightarrow X_1$ et $\pi_2: E_2 \rightarrow X_2$ est un isomorphisme, si ξ et η sont des homéomorphismes et (ξ^{-1}, η^{-1}) est un morphisme du fibré vectoriel $\pi_2: E_2 \rightarrow X_2$ dans le fibré vectoriel $\pi_1: E_1 \rightarrow X_1$. Dans cette situation, on dit que les fibrés vectoriels $\pi_1: E_1 \rightarrow X_1$ et $\pi_2: E_2 \rightarrow X_2$ sont isomorphes.

DEFINITION V.6.6 : Un fibré vectoriel de rang m isomorphe à un fibré vectoriel trivial est dit trivialisable.

EXERCICE V.3 : Soit M une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n . Alors le triplet (TM, M, π) , où $\pi: TM \rightarrow M$ est la projection, est un fibré vectoriel. (Il faut montrer l'existence des trivialisations locales).

INDICATION : Soit x_0 un point de M , $U \subset \mathbb{R}^{n-p}$ un ouvert connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation locale de M au voisinage de x_0 . On considère l'application $\psi: W \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \pi^{-1}(W)$ définie par

$$\psi(x, u) = (x, f'(f^{-1}(x))(u)),$$

où $W \subset f(U)$ est un voisinage ouvert de x_0 dans M . C'est une trivialisations locale.

EXERCICE V.4 : Soit M et N des sous-variétés de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n respectivement.

- Soit $\varphi: M \rightarrow N$ une application différentiable. Montrer que $(T\varphi, \varphi)$ est un morphisme du fibré tangent $TM \rightarrow M$ dans le fibré tangent $TN \rightarrow N$.
- Soit $\varphi: M \rightarrow N$ une bijection différentiable telle que φ^{-1} soit aussi différentiable (dans cette situation, on dit que φ est un **difféomorphisme** et que M et N sont **difféomorphes**). Montrer que les fibrés tangents $TM \rightarrow M$ et $TN \rightarrow N$ sont isomorphes.

DEFINITION V.6.7 : Soit M une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n . On dit que M est parallélisable si le fibré tangent $TM \rightarrow M$ est trivialisable.

DEFINITION V.6.8 : Une section d'un fibré vectoriel $\pi: E \rightarrow X$ est une application continue $s: X \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \text{id}_X$.

DEFINITION V.6.9 : Un fibré vectoriel $\pi: E \rightarrow X$ est dit de classe C^k si :

- E et X sont des sous-variétés de classe C^k ,
- π est de classe C^k ,
- Il existe des trivialisations locales qui sont des C^k -difféomorphismes.

DEFINITION V.6.10 : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^∞ . On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur M une section $s: X \rightarrow E$ de classe C^k du fibré tangent $TM \rightarrow M$ de M .

V.7 Fibré tangent de la sphère S^k

THEOREME V.7.1 : *La sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ n'est pas parallélisable.*

THEOREME V.7.2 (Théorème de la boule chevelue) : *Si $s: S^2 \rightarrow TS^2$ est un champ de vecteurs (continu) sur S^2 , alors il existe un point x de S^2 tel que $s(x) = (x, 0)$.*

THEOREME V.7.3 (Théorème du point fixe de Brouwer) : *Soit $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ une boule fermée et $f: D^2 \rightarrow D^2$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

THEOREME V.7.4 : *Parmi les sphères S^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, il n'y a que 3 sphères parallélisables : S^1 , S^3 et S^7 .*

Références

- [BG] M. BERGER et B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces* (2ème édition).
- [Pos] M. POSTNIKOV, *Leçons de géométrie. Algèbre linéaire et géométrie différentielle.*

Index

- 1-forme différentielle , 31
- Angle entre deux courbes, 30
- Application
 - de classe C^k sur une sous-variété de \mathbb{R}^n , 50
 - de Gauss, 42
 - de rang constant, 5
 - différentiable sur une sous-variété de \mathbb{R}^n , 50
 - semi-continue inférieurement, 5
- Base d'un fibré, 52
- C^k -difféomorphisme, 2
 - local, 2
- Centre de courbure, 16
- Cercle osculateur, 16
- Champ de vecteurs de classe C^k , 53
- Changement de coordonnées, 2, 3
- Contact d'ordre k , 13
- Courbe paramétrée
 - k -régulière, 23
 - équivalente, 11
 - bi-régulière, 20
 - de classe C^k , 10, 20
 - lisse, 12
 - par la longueur d'arc, 15, 20
 - régulière, 10, 20
- Courbes de coordonnées, 28
- Courbure
 - d'une courbe paramétrée, 15, 20, 24
 - de Gauss, 40
 - moyenne, 40
 - principale, 40
- Courbures, 25
- Dérivation sur une sous-variété de \mathbb{R}^n , 50
- Déterminant de Gram, 37
- Difféomorphisme entre 2 sous-variétés, 53
- Différentielle
 - d'une application entre 2 sous-variétés, 52
- Direction
 - asymptotique, 44
 - principale, 41
- Droite tangente à une courbe, 11
- Endomorphisme de Weingarten, 42
- Equations d'une courbe sur une surface, 28
- Equations de Weingarten, 44
- Espace
 - tangent, 48
 - total d'un fibré, 52
 - vectorel tangent, 48
- Fibré
 - tangent, 51
 - vectorel
 - de classe C^k , 53
 - isomorphe, 53
 - réel, 52
 - trivial, 52
 - trivialisable, 53
- Fibre, 52
- Forme
 - bilinéaire, 15, 32
 - symétrique, 32
 - polaire d'une forme quadratique, 32
 - quadratique, 30, 32
 - deuxième, 38
 - différentielle, 30
 - fondamentale, 30
 - quadratique différentielle, 32
- Forme
 - linéaire, 56
- Formule de Taylor, 12
- Formules de Frénet
 - pour une courbe dans \mathbb{R}^3 , 20
 - pour une courbe dans \mathbb{R}^n , 24
 - pour une courbe plane, 17

- Image réciproque
 d'une 1-forme diff., 31
 d'une f.q. diff., 33
- Immersion de classe C^k , 4
- Indicatrice de Dupin, 39
- Isométrie de surfaces, 35
- Isomorphisme entre deux fibrés, 53
- Longueur d'arc, 14
- Longueur d'une courbe, 37
- Métrique riemannienne, 33
- Matrice
 de passage, 2
 jacobienne, 2, 3
- Morphisme entre deux fibrés, 52
- Normale à une surface, 29
- Paramétrisation locale, 7
- Plan
 osculateur, 20
 tangent, 29
- Point
 d'inflexion, 14
 double ordinaire, 12
 elliptique, 39
 hyperbolique, 40
 ombilic, 44
 parabolique, 40
- Polarisée d'une forme quadratique, 32
- Procédé d'orthonormalisation
 de Gram-Schmidt, 24
- Projection
 sur le plan normal, 22
 sur le plan osculateur, 21
 sur le plan rectifiant, 22
- Rang d'un fibré, 52
- Rayon de courbure, 16
- Repère mobile, 17
 de Frénet, 17, 20, 24
- Section d'un fibré vectoriel, 53
- Section normale d'une surface, 38
- Sous-espace k -osculateur, 23
- Sous-variété
 de classe C^k et de codimension p , 6
 difféomorphe, 53
- immergée, 48
 parallélisable, 53
 transverse, 49
- Submersion de classe C^k , 3
- Support d'une surface paramétrée, 28
- Surface
 cylindrique, 28
 des binormales, 29
 des normales principales, 29
 des tangentes, 29
 difféomorphe, 35
 isométrique, 35
 réglée, 29
 sphérique, 29
- Surface paramétrée
 équivalente, 28
 de classe C^k , 28
 régulière, 28
- Symbole de Christoffel, 44
- Théorème
 d'inversion locale, 2, 4
 de la boule chevelue, 54
 des fonctions implicites, 6
 du point fixe de Brouwer, 54
 du rang constant, 5
 theorema egregium de Gauss, 46
- Torsion
 d'une courbe dans \mathbb{R}^3 , 20, 21
 d'une courbe dans \mathbb{R}^n , 25
- Trivialisation locale, 52
- Valeur régulière, 11
- Vecteur
 binormal, 20
 gradient, 34
 normal d'une surface, 37
 normal principal, 20
 tangent, 48
 vitesse, 11