Supméca 2008/2009
26 juin 2009

Examen de Méthodes numériques
Énoncé

Ni calculatrices, ni documents.

Durée de l'examen : 1h15.

Les questions sont numérotées de **1** à **12**. Pour chacune d'elle, les étudiants inscrivent leur réponse (ou le code de la réponse indiqué dans l'énoncé) dans la case prévue à cet effet sur la feuille de réponse.

A. Algèbre matricielle.

1. Une norme matricielle N sur l'algèbre des matrices carrées d'ordre n donné doit, par définition, satisfaire non seulement aux trois propriétés qui caractérisent les normes vectorielles, mais également à une quatrième propriété : pour toutes matrices A et B, écrire dans la case prévue à cet effet la relation entre $N(A)$, $N(B)$ et $N(AB)$ qui exprime cette quatrième propriété.

2. Soit $x \mapsto \|x\|$ une norme vectorielle, et $A \mapsto |||A|||$ la norme matricielle subordonnée. Ecrire dans la case prévue à cet effet la relation nécessaire entre les trois réels $\|x\|$, $\|Ax\|$ et $|||A|||$.

3. On note $\rho(M)$ le rayon spectral d'une matrice M, et $N(M)$ sa norme (pour une norme matricielle N, subordonnée ou non). Ecrire une relation nécessaire entre les deux réels $\rho(M)$ et $N(M)$.

B. Schémas aux différences : cas général.

Dans les questions de cette partie (questions **4** à **8**), on considère, pour un problème aux dérivées partielles linéaire $Lu = f$, un schéma aux différences $(L_h v_h = f_h)_h$, où le paramètre h est destiné à tendre vers 0. Pour tout vecteur w de l'espace fonctionnel U (de dimension infinie) sur lequel opère L, on note $[w]_h$ la restriction de w aux nœuds du maillage associé au pas de discrétisation h, de sorte que $[w]_h$ appartient à l'espace vectoriel (de dimension finie) U_h sur lequel opère L_h.

Voici une liste de dix-sept expressions, numérotées de (1) à (17).

$$\lim_{h\to 0}[u]_h = u \tag{1}$$

$$\lim_{h\to 0} L_h v_h = f \tag{2}$$

$$\forall\infty, \exists\diamondsuit, \sharp = \flat \tag{3}$$

$$\exists K > 0, \|u - u_h\| \leq Kh \tag{4}$$

$$\forall w \in U, \lim_{h\to 0}[w]_h = w \tag{5}$$

$$\lim_{h\to 0} v_h = [u]_h \tag{6}$$

$$\forall w \in U, \lim_{h\to 0} \|w\|_{U_h} = \|w\|_U \tag{7}$$

$$\lim_{h\to 0} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} = 0 \tag{8}$$

$$\exists M > 0, |||L_h||| \leq M \tag{9}$$

$$\lim_{h\to 0} \|L_h v_h - f_h\|_{F_h} = 0 \tag{10}$$

$$\forall w \in U, \lim_{h\to 0} \|[w]_h\|_{U_h} = \|w\|_U \tag{11}$$

$$\lim_{h\to 0} v_h = u \tag{12}$$

$$\lim_{h\to 0} \|[u]_h - v_h\|_{U_h} = 0 \tag{13}$$

$$\lim_{h\to 0} \|f - v_h\|_{F_h} = 0 \tag{14}$$

$$\lim_{h\to 0} \|Lu - f_h\|_{F_h} = 0 \tag{15}$$

$$\exists M > 0, |||{L_h}^{-1}||| \geq M \tag{16}$$

$$\exists v \in F, \lim_{u \to 0} \|Lv - [f]_h\|_{F_h} = 0 \tag{17}$$

Pour chacune des questions suivantes **4** à **8**, écrire dans la case prévue à cet effet le numéro de l'expression (ou des expressions) qui, parmi les dix-sept expressions précédentes, répond (ou répondent) à la question, ou bien écrire le code 99 si aucune expression ne convient.

4. Quelle expression signifie que les espaces d'approximation sont munis d'une famille cohérente de normes ?

5. Quelle expression signifie que le schéma considéré est consistant vis-à-vis du problème considéré ?

6. Quelle expression exprime la stabilité du schéma ?

7. Quelle expression exprime la convergence du schéma pour le problème considéré ?

8. Donner (par ordre croissant) la liste des expressions qui, dans le contexte considéré, peuvent être vraies ou fausses, mais ont en tout cas un sens (par opposition aux expressions qui n'ont aucun sens).

C. Schémas aux différences : problèmes d'évolution.

Un schéma aux différences sous la forme canonique

$$y_{k+1} = R_\tau y_k + \tau \Psi_k,$$

(l'état initial $y_0 \in Y_\tau$ étant spécifié) est proposé pour un problème d'évolution, τ désignant le pas de discrétisation temporelle caractérisant la finesse du maillage spatio-temporel utilisé. Les espaces d'approximation considérés sont supposés munis de normes adéquates (en particulier cohérentes). Pour toute matrice R agissant sur l'espace des états Y_τ (de dimension finie, dépendant de τ), on note $|||R|||$ la norme matricielle de R subordonnée à la norme vectorielle dont l'espace Y_τ est muni, et on note $\rho(R)$ son rayon spectral.

Voici une liste d'expressions, numérotées de (18) à (24).

$$\exists \alpha > 0, \rho(R_\tau) \leq 1 + \alpha\tau \tag{18}$$

$$\rho(R_\tau) \leq 1 \tag{19}$$

$$\rho(R_\tau) < 1 \tag{20}$$

$$\exists K > 0, |||R_\tau||| \leq 1 + K\tau \tag{21}$$

$$|||R_\tau||| \leq 1 \tag{22}$$

$$|||R_\tau||| < 1 \tag{23}$$

$$|||R_\tau^k||| \text{ est borné indépendamment de } k \text{ et } \tau \tag{24}$$

Pour les questions **9** et **10**, on suppose que le processus étudié se déroule sans limitation dans le temps.

9. Ecrire le numéro des expressions qui, dans la liste ci-dessus, expriment une condition suffisante de stabilité pour le schéma considéré.

10. Ecrire le numéro des expressions qui, dans la liste ci-dessus, expriment une condition nécessaire de stabilité pour le schéma considéré.

On suppose à présent que le processus étudié se déroule au cours d'un intervalle de temps fini.

11. Ecrire le numéro des expressions qui, dans la liste ci-dessus, expriment une condition suffisante de stabilité pour le schéma considéré.

D. Problème.

12. Etant donnés un réel $L > 0$ et une fonction $u_0 : [0, L] \to \mathbf{R}$, on considère le problème de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbf{R}_+, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \forall t \in \mathbf{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in [0,L]. \end{cases}$$

Pour un pas de discrétisation spatiale $h = \frac{L}{N+1}$, on prend comme espace des états l'espace Y_h des fonctions réelles définies sur l'ensemble fini $\{h, 2h, ..., Nh\}$, muni de la norme définie par $\|y\|^2 = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{j=N} y_j^2$.

Pour un pas de discrétisation temporelle τ donné, on note alors u_j^k l'approximation de la solution u du problème considéré au point $(x,t) = (jh, k\tau)$ que donne le schéma aux différences (manifestement consistant)

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k),$$

avec la condition initiale $u_j^0 = u_0(jh)$ et les conditions aux limites $u_0^k = u_{N+1}^k = 0$.

Grâce aux théorèmes sur la stabilité d'un schéma d'évolution mis sous forme canonique, on vérifie que pour le problème considéré il suffit que, pour tout état initial y^0, la suite des normes des états successifs $\|y^k\|_{Y_h}$ soit décroissante pour que le schéma soit stable (cette condition étant par ailleurs quasiment nécessaire dans le cas présent, du fait de la décroissance au cours du temps de l'énergie de la solution exacte du problème).

En déduire une condition suffisante (et quasiment nécessaire !) de stabilité du schéma considéré, condition portant sur la relation entre les pas de discrétisation spatiale h et temporelle τ.

On écrira la relation obtenue, et elle seule, dans le cadre prévu à cet effet.

Remarque. On pourra admettre les implications

$$y_0 = y_{N+1} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{j=N} y_j(\triangle^2 z)_j = -\sum_{j=0}^{j=N}(\triangle y)_j(\triangle z)_j,$$

et

$$y_0 = y_{N+1} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{j=N} {(\triangle^2 y)_j}^2 \leq 4\sum_{j=0}^{j=N} {(\triangle y)_j}^2,$$

où l'on a posé $(\triangle y)_j = y_{j+1} - y_j$ et $(\triangle^2 y)_j = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}$.