Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Math 218 **Année 2008–2009**

Séries entières 2

Exercice 4 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières ($x \in \mathbb{R}$)

2) $u_n(x) = n^2x^n$, $n \geq 0$. On utilise le critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

donc le rayon de convergence est 1.

Pour tout $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$; en dérivant l'égalité entre ces deux fonctions, on obtient : pour tout $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$, d'où, en multipliant par x : pour tout $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x/(1-x)^2$. On redérive cette égalité entre fonctions : pour tout $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = (1+x)/(1-x)^3$ (après calcul), d'où en remultipliant par x :

$$\text{pour tout } |x| < 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

4) $u_n = \frac{n^2+1}{n!}x^n$. On utilise le critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence :

$$\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2+1} \sim \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

lorsque n tend vers ∞, donc le rayon de convergence est $+\infty$.

On va utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$ (par changement d'indice dans les sommes). Pour $N > 2$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2+1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!},$$

car dans la somme des $\frac{n^2}{n!}x^n$, le terme en $n = 0$ est nul. $n = (n-1)+1$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n-1)!}x^n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n-1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{(n-1)!} = x^2\sum_{n=2}^{N} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

(dans la somme des $\frac{n-1}{(n-1)!}x^n$, le terme en $n=1$ est nul). Finalement, toutes ces sommes ont une limite lorsque N tend vers ∞ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = (x^2+x+1)e^x.$$

Exercice 5 Calculer à l'aide des séries entières la somme des séries numériques

1) $u_n = \frac{1}{n3^n}$, $n \geq 1$.

$u_n = U_n(1/3)$ avec $U_n(x) = x^n/n$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum U_n(x)$ est 1 (critère de d'Alembert). Pour tout x, $U_n'(x) = x^{n-1}$ donc pour $|x|<1$, $(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1/(1-x)$ (dérivation terme à terme des séries entières à l'intérieur de l'intervalle de convergence). En intégrant cette égalité entre fonctions, on obtient pour $|x|<1$: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = c - \ln|1-x|$. La constante d'intégration c est obtenue en prenant la valeur $x=0$: $c = \ln 1 = 0$ d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1/3) = -\ln(1-1/3) = \ln(3/2).$$

2) $u_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{2n}}$.

$u_n = U_n(-1/4)$ avec $U_n(x) = (n+1)x^n$. Or pour $|x|>1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, donc en dérivant terme à terme à l'intérieur du disque de convergence : pour $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$, et par changement d'indices, cette somme est égale à $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(-1/4) = \frac{1}{(1+\frac{1}{4})^2} = \frac{16}{25}.$$

Exercice 6 Déterminer les développements en série entière des fonctions réelles $y = f(x)$ tout en donnant le domaine de convergence.

1) $y = \sin 3x + x\cos 3x$.

On utilise les développements suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

En remplaçant x par $3x$: pour tout x,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{3(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n+1} \frac{2n+4}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

5) $y = \cos^2 x$.

Mettre au carré le développement en série entière de $\cos x$ est très périlleux. Il est beaucoup plus simple de linéariser y : pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$y = \frac{\cos 2x + 1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

6) $y = e^{2-x^2}$.

La fonction exponentielle étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$y = e^2 \cdot e^{-x^2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^2}{n!} x^{2n}.$$

9) $y = \ln(2+x)$.

$y = \ln(2(1+x/2)) = \ln 2 + \ln(1+x/2)$. Or pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

donc en intégrant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence (la constante d'intégration, obtenue pour $x = 0$, est nulle)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

donc pour $|x/2| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$,

$$y = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+1}}{n+1} = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$$