Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Soient (a_i) et (b_i) deux suites de réels définies sur $\{1\ ;2\ ;\ldots\ ;n\}$

On a alors $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Démonstration :

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda^2a_i^2+b_i^2+2\lambda a_ib_i)$

$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)+\sum_{i=1}^{n}(b_i^2)+2\lambda\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)$

Calculons alors le discriminant de ce trinôme :

$\Delta=b^2-4ac$ avec $a=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)$, $b=2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)$ et $c=\sum_{i=1}^{n}(b_i^2)$

$\Delta=4\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^2-4\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)\times\sum_{i=1}^{n}(b_i^2)$

Or pour tout $i\in\{1\ ;2\ ;\ldots\ ;n\}$, $(\lambda a_i+b_i)^2\geq0$ donc $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2\geq0$

Donc comme $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2\geq0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2=0$ ou $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+b_i)^2>0$, alors $\Delta=0$ ou $\Delta<0 \Leftrightarrow \Delta\leq0$

Il en résulte que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Généralisation :

I] Théorème :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Soit (u_i) une suite de réels positifs ou nuls définie sur $\{1\ ;2\ ;\ldots\ ;n\}$

On a alors $\sum_{i=1}^{n}(u_i^2)\leq\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2$

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i^2)\leq\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2$ quelque soit (u_i), suite de réels positifs ou nuls définie sur $\{1\ ;2\ ;\ldots\ ;n\}$

Initialisation :

Vérifions cette propriété pour n=1 :

$\sum_{i=1}^{1}(u_i^2)=u_1^2$

$(\sum_{i=1}^{1}u_i)^2=u_1^2$

Or $u_1^2 \leq u_1^2$ donc $\sum_{i=1}^{1}(u_i^2) \leq (\sum_{i=1}^{1}u_i)^2$

La propriété est donc vraie au rang 1.

<u>Caractère héréditaire :</u>

Supposons que $\sum_{i=1}^{k}(u_i^2) \leq (\sum_{i=1}^{k}u_i)^2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$:

On a $(\sum_{i=1}^{k+1}u_i)^2=[(\sum_{i=1}^{k}u_i)+u_{k+1}]^2$

Donc $(\sum_{i=1}^{k+1}u_i)^2=(\sum_{i=1}^{k}u_i)^2+u_{k+1}^2+2u_{k+1}(\sum_{i=1}^{k}u_i)$

Or pour tout $i \in \{1 ;2 ;\ldots ;k+1\}$, $u_i \geq 0$ donc $2u_{k+1}(\sum_{i=1}^{k}u_i) \geq 0$

Donc $(\sum_{i=1}^{k+1}u_i)^2 \geq (\sum_{i=1}^{k}u_i)^2+u_{k+1}^2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{k}(u_i^2) \leq (\sum_{i=1}^{k}u_i)^2$

D'où $(\sum_{i=1}^{k+1}u_i)^2 \geq (\sum_{i=1}^{k}u_i^2)+u_{k+1}^2$

Donc $(\sum_{i=1}^{k+1}u_i)^2 \geq (\sum_{i=1}^{k+1}u_i^2)$

La propriété est donc vraie au rang k+1

<u>Conclusion :</u>

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n}(u_i^2) \leq (\sum_{i=1}^{n}u_i)^2$ quelque soit (u_i), suite de réels positifs ou nuls définie sur $\{1 ;2 ;\ldots ;n\}$

II]Généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les suites à termes positifs ou nuls:

Soit $(m,n)\in IN^*\backslash\{1\}\times IN^*$

Soient $(a_{(i,j)})$ j suites de réels positifs ou nuls définies sur {1 ;2 ;… ;n} avec $j\leq m$

On a alors $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}{}^2)$

Démonstration :

Démontrons cette propriété par récurrence sur $m\in IN^*\backslash\{1\}$:

Initialisation :

Vérifions cette propriété pour m=2 :

On a alors $(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,1)}a_{(i,2)})^2\leq(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,1)}{}^2)\times(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,2)}{}^2)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

La propriété est donc vraie au rang 2.

Caractère héréditaire :

Supposons que cette propriété est vraie pour un certain $k\in IN^*\backslash\{1\}$:

On a alors $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k+1}a_{(i,j)})]^2=[\sum_{i=1}^{n}[(\prod_{j=1}^{k}a_{(i,j)})\times a_{(i,k+1)}]]^2\leq\sum_{i=1}^{n}((\prod_{j=1}^{k}a_{(i,j)})^2)\times\sum_{i=1}^{n}(a_{(i,k+1)}{}^2)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Or d'après le théorème précédent, $\sum_{i=1}^{n}((\prod_{j=1}^{k}a_{(i,j)})^2)\leq[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k}a_{(i,j)})]^2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}{}^2)$

Il en résulte donc que $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k+1}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}{}^2)\times\sum_{i=1}^{n}(a_{(i,k+1)}{}^2)$

Par conséquent $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k+1}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{k+1}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}{}^2)$

La propriété est donc vraie au rang k+1

Conclusion :

On a alors $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}{}^2)$ $\forall(m,n)\in IN^*\backslash\{1\}\times IN^*$

III]Généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(m,n)\in IN^*\backslash\{1\}\times IN^*$

Soient $(a_{(i,j)})$ j suites de réels définies sur {1 ;2 ;… ;n} avec $j\leq m$

On a alors $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}^2)$

Démonstration :

On a $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}|a_{(i,j)}|)]^2\leq\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}^2)$ puisque l'ensemble des suites de la forme $|a_{(i,j)}|$ correspond à j suites de termes positives ou nulles avec $j\in\{1 ;2 ;\dots ;m\}$ et $i\in\{1 ;2 ;\dots ;n\}$

Soient P l'ensemble des $i\in\{1 ;2 ;\dots ;n\}$ tels que $\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)}\geq 0$ et $E=\{1 ;2 ;\dots ;n\}\backslash P$

Soient $A=\sum_{i\in P}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})$ et $B=\sum_{i\in E}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})$

On a donc $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}|a_{(i,j)}|)]^2=(A-B)^2$

Or $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2=(A+B)^2$

Comme $(A-B)^2-(A+B)^2=-4AB\geq 0$ puisque $A\geq 0$ et $B<0$, alors $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}|a_{(i,j)}|)]^2\geq [\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2$

On a donc $[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{(i,j)})]^2\leq\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{(i,j)}^2)$