1 Algèbres de dimension 4 sur $\mathbb{R}$

1.1 Quaternions $\mathbb{H}$

1.1.1 Introduction

Les quaternions ont été introduits par W. Hamilton (d'où la notation $\mathbb{H}$), alors qu'il cherchait un moyen de représenter les points de l'espace (de dimension 3) de la même façon que les complexes permettent de représenter le plan (de dimension 2).

Frobenius a démontré (1877) que les seuls corps de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel) sur $\mathbb{R}$, sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$.

1.1.2 Définition

L'ensemble des quaternions est identique à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, avec les opérations naturelles d'addition et de multiplication par un réel.

Les quaternions sont donc des nombres qui peuvent s'écrire $q = a_0 + a_1.e_1 + a_2.e_2 + a_3.e_3$, où les a_i sont des nombres réels, et les e_i une base dont la table de multiplication est donnée ci-dessous.

Les quaternions peuvent être vus comme une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$, un quaternion $q = a_0 + a_1.e_1 + a_2.e_2 + a_3.e_3$, pouvant s'écrire :

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$$

Où $u = a_0 + i.a_1$ et $v = a_2 + i.a_3$

Les quaternions peuvent aussi être vus comme une sous-algèbre de $M_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Pour un quaternion $q = a + a_1.e_1 + a_2.e_2 + a_3.e_3$, en posant $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ (un vecteur de $\mathbb{R}$), on peut noter $q = (a, \vec{u})$, l'addition et la multiplication par un réel sont les opérations naturelles, et la multiplication est définie par

$(a, \vec{u}) \times (b, \vec{v}) = (a.b - \vec{u}.\vec{v}, a.\vec{v} + b.\vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{v})$

1.1.3 Mode de construction

Les quaternions sont des nombres hypercomplexes, une algèbre de Clifford($\mathcal{C}\ell_{0,2}(\mathbb{R})$), et le résultat de la construction de Cayley-Dickson à partir des complexes.

1.1.4 Table de multiplication

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	-e_2
e_2	e_2	-e_3	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	-e_1	-1

Dans le cas des quaternions, les éléments de la base sont plus traditionnellemetn notées i, j et k (où le i est exactement celui de $\mathbb{C}$) :

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

1.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Si $q = a_0 + a_1.e_1 + a_2.e_2 + a_3.e_3$, alors le conjugué de q est :
$\overline{q} = a_0 - a_1.e_1 - a_2.e_2 - a_3.e_3$.
La norme est $\| q \| = \sqrt{q.\overline{q}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. C'est une norme multiplicative : $\| p \times q \| = \| p \| . \| q \|$
L'inverse $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$

Tout quaternion non nul peut s'écrire de façon unique $q = \| q \| .U$, où U est un quaternion unitaire, cette écriture est la forme polaire de q.

1.1.6 Propriétés algébriques

$(\mathbb{H}, +, \times)$ est un corps normé, non commutatif (par exemple $e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1$.
$(\mathbb{H}, +, \times, .)$ est aussi une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

1.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Synonyme : Quaternions circulaires.

1.1.8 Utilisation en physique

Une recherche google sur (« quaternion in physics ») ramène 17 500 pages.

Ludwik Silberstein utilise une fonction de potentiel à un quaternion comme variable pour exprimer les équations de Maxwell sous la forme d'une seule équation différentielle.

Les quaternions unitaires (de norme 1) permettent de représenter simplement les rotations d'objets en 3 dimensions.

A développer

1.1.9 Références

le Quaternion-group sur face-book
Pour l'usage en Physique, voir, par exemple : The quaternion group and modern physics

A développer