1 Méthode de construction

1.1 Hypercomplexes

1.1.1 Introduction

La définition des nombres hypercomplexes n'est pas stable, pour certains, cette appellation ne désigne que les quaternions, pour d'autres elle désigne tous les ensembles construit par la méthode de Cayley-Dickson à partir de $\mathbb{C}$, ou seulement $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ (voire d'autres combinaisons), pour d'autres la définition est très générale : un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ sur lequel une multiplication distributive sur l'addition est définie (donc une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie) ; on pourrait d'ailleurs généraliser encore : module sur n'importe quel anneau de dimension finie ou non, sur lequel une multiplication est définie.

1.1.2 Définition

Dans ce document nous prendrons comme définition celle de I.L. Kantor (à ne pas confondre avec G. Cantor) et A.S. Solodovnikov : Un ensemble de nombres hypercomplexes est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'une opération supplémentaire, la multiplication, qui soit unitaire et distributive (c'est à dire une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire de dimension finie) avec la propriété suivante :
soit $(1, e_1, e_2, ..., e_n)$ une base (c'est à dire que les nombres hypercomplexes peuvent s'écrire : $z = a_0 + a_1.e_1 + ... + a_n.e_n$, où les a_i sont des nombres réels) alors pour tout i, $e_i^2 \in \{-1, 0, 1\}$.

On peut catégoriser les algèbres hypercomplexes en fonctions des carrés de la base :

- Elliptique : pour tout i e_i^2 = -1
- Parabolique : pour tout i $e_i^2 = 0$
- Hyperbolique : pour tout i $e_i^2 = 1$
- Mixte : les autres cas.

Mais cette nomenclature n'est pas stable, pour certains auteurs une algèbre hypercomplexe est Elliptique si elle possède au moins un élément de base de carré égale à -1, et parabolique si elle possède au moins un élément de base de carré égale à 0 (mixte si elle possède au moins un de ces deux derniers cas).

1.1.3 Mode de construction

Il est immédiat qu'une $\mathbb{R}$-algèbre avec un axe réel et un seul axe non-réel est complétement déterminé par la valeur de $e_1^2 = a + b.e_1$, or il est aisé de démontrer qu'en fonction du signe de $b^2 + 4a$ une telle algèbre est isomorphe à un ensemble hypercomplexe avec un seul axe non réel où $e_i^2 = -1$ ou $e_i^2 = 0$ ou $e_i^2 = 1$.

Il y a donc 3 exemples pour les hypercomplexes avec un seul axe non réel (n = 1) : Les complexes ($e_1^2 = -1$, généralement noté i), les nombres complexes duaux ($e_1^2 = 0$, généralement noté ε), les complexes fendus ($e_1^2 = 1$).

1.1.4 Table de multiplication

Les contraintes dans la définition des hypercomplexes étant assez faibles au delà de n = 1, il n'est pas raisonnable de donner une liste des cas possibles, certains exemples de tables de multiplications sont disponibles dans les chapitres concernant les cas particuliers d'algèbre hypercomplexe.

A titre d'exemple "peu intéressant", dans le cas n = 2 :

$\times$	1	e_1	e_2
1	1	e_1	e_2
e_1	e_1	1	0
e_2	e_2	0	1

On peut vérifier facilement que cette algèbre est commutative, mais non associative, qu'elle possède des diviseurs de 0, des éléments idempotents non triviaux (par exemple ($\frac{1+e_1}{2}$), et des éléments nilpotents.

Deux algèbres hypercomplexes sont isomorphes si elles sont de même dimension, et si leur table de multiplication sont identiques en interchangeant les bases ou par combinaisons liénaires de leur base.

1.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

On peut définir un conjugué hypercomplexe, si $z = a_0 + a_1.e_1 + ... + a_n.e_n$, alors le conjugué de z est $\overline{z} = a_0 - a_1.e_1 + ... - a_n.e_n$, mais dans le cas général, cette notion n'est pas très intéressante et ne donne pas systématiquement naissance à une notion de norme.

1.1.6 Propriétés algébriques

Les ensembles hypercomplexes sont des algèbres unitaires de dimension finie sur $\mathbb{R}$, certaines de ces structures sont commutatives et/ou associatives, d'autres non.

La définition des hypercomplexes étant très générale, ils ne possèdent pas de propriétés communes à part celles contenues dans la définition, pour plus de détails, cf. les différents exemples d'hypercomplexes de ce document.

Le théorème de Hurwitz précise : toute $\mathbb{R}$-algèbre normée, unitaire à division est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{H}$, soit $\mathbb{O}$, donc de dimension 1, 2, 4 ou 8.

On peut noter néanmoins que seuls $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ sont des corps (et seul $\mathbb{C}$ est un corps commutatif).

Une conséquence triviale, mais pas forcément intuitive du théorème de Hurwitz est qu'un espace Euclidien ne peut être muni d'un espace vectoriel que s'il est de dimension 0, 1, 3 ou 7 (Les cas 0 et 1 ne sont guère intéressants).

Démonstration : Soit V un espace euclidien muni d'un produit vectoriel (noté $\wedge$), alors $(\mathbb{R} \oplus V)$ peut être muni d'une multiplication définie par :

$(a, \vec{u}).(b, \vec{v}) = (ab - \vec{u}\vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v})$

Il est immédiat de vérifier que cela munit $(\mathbb{R} \oplus V)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre unitaire.

En posant $|| (a, \vec{u}) || = \sqrt{a^2 + \vec{u}^2}$, on peut vérifier que $|| (a, \vec{u}) ||$ est bien une norme d'algèbre (vérifiant en plus des axiomes d'une norme que $|| x.y ||) = || x ||). || y ||)$.

Et comme $(a, \vec{u}).(\frac{a}{||(a,\vec{u})||^2}, \frac{-u}{||(a,\vec{u})||^2}) = (1, 0)$, on en déduit que $(\mathbb{R} \oplus V)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre normée, unitaire à division, donc de dimension 1, 2, 4 ou 8 (CQFD).

1.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

De nombreux ensembles sont en fait des hypercomplexes (à commencer par les complexes et ses variations) :
- Les algèbres de Clifford sont des cas particuliers d'hypercomplexes.
- La construction de Cayley-Dickson donne des hypercomplexes.

Le produit tensoriel d'algèbres hypercomplexes donne une algèbre hypercomplexe, par exemple :
- $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ donne les nombres bicomplexes de dimension 4.
- $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ donne les biquaternions de dimension 8.
- $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$ donne les octonions complexes de dimension 16.

Synonyme = Hyper-nombres (à ne pas confondre avec les hypernombres de Musès).

1.1.8 Utilisation en physique

Voir chacun des ensembles hypercomplexes particuliers.

Une recherche Google sur "hypercomplexes in physics" ramène 25 400 sites.

Par exemple : Hyper-Complex Numbers in Geometry and-Physics

1.1.9 Références

Site russe dédié aux hypercomplexes (en anglais)
Un historique remontant à 665 (en anglais)
Hypercomplex Numbers : An Elementary Introduction to Algebras
Author : I.L. Kantor, A.S. Solodovnikov
Publisher : Springer-Verlag
ISBN : 0387969802
Année 1989