1 Méthode de construction

1.1 Multicomplexe $\mathbb{MC}_n$

1.1.1 Introduction

La dénomination Multicomplexe peut faire réference à deux types d'ensembles assez différents, ceux qui sont présentés ici et qui sont notés $\mathbb{MC}_n$ et les multicomplexes $\mathbb{C}_n$.

1.1.2 Définition

Soit e un élément tel que $e^n = -1$ (ce n'est donc pas la constante de Neper).

L'ensemble $\mathbb{MC}_n$ est l'ensemble des nombres de la forme $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.e^i$, où les a_i sont des réels.

Attention : pour $n > 2$, e n'est pas une racine n-ième complexe de -1.

1.1.3 Mode de construction

$\mathbb{MC}_n$ est un cas particulier d'algèbre de Clifford généralisée.

1.1.4 Table de multiplication

La table de multiplication des nombres multicomplexes est très simple et surtout elle est unique pour un n donné.

Exemple pour n = 5.

$\times$	1	e	e^2	e^3	e^4
1	1	e	e^2	e^3	e^4
e	e	e^2	e^3	e^4	-1
e^2	e^2	e^3	e^4	-1	e
e^3	e^3	e^4	-1	e	e^2
e^4	e^4	-1	e	e^2	e^3

Exemple pour n = 4.

$\times$	1	e	e^2	e^3
1	1	e	e^2	e^3
e	e	e^2	e^3	-1
e^2	e^2	e^3	-1	e
e^3	e^3	-1	e	e^2

1.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

On peut aussi représenter les éléments de $\mathbb{MC}_n$ par un élément de $M_n(\mathbb{R})$) Soit $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.e^i$, on peut lui associer la matrice $n \times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Cette écriture sous forme d'une matrice permet de définir une pseudo-norme ($\| x \| = 0$ n'entraîne pas $x = 0$) sur $\mathbb{MC}_n$) :

$\| x \|^n = det(A)$, c'est à dire que dans le cas n = 2 on retrouve bien le module des nombres complexes, mais pour n = 3 on trouve $\| x \|^3 = a_0^3 - a_1^3 + a_2^3 + 3a_0a_1a_2$ qui est nul, par exemple, pour $a_0 = a_1$ et $a_2 = 0$.

Les éléments de pseudo-norme nulle sont des diviseurs de 0, par exemple, pour n = 3 : $(1+e)(1-e+e^2) = 0$

Si $\| x \| \neq 0$, il est possible d'écrire x sous forme polaire : $x = \| x \| \, exp(\sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i.e^i)$

1.1.6 Propriétés algébriques

$\mathbb{MC}_n$ est une algèbre commutative et associative de dimension n sur $\mathbb{R}$, générée par un seul élément : e.
Plus précisément :
Si n est pair $\mathbb{MC}_n = \oplus^{\frac{n}{2}}\mathbb{C}$
Si n est impair $\mathbb{MC}_n = \oplus^{n}\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \oplus^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{C}$

1.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les multicomplexes sont des cas particuliers des algèbres hypercomplexes.
Pour n = 2 on retrouve les nombres complexes,
Pour n = 4 on retrouve les bicomplexes.
Rappel de la table de multiplication des bicomplexes (en utilisant les notations habituelles i, j, ij à la place des e_i :

×	1	i	j	ij
1	1	i	i	ij
i	i	-1	ij	-j
j	j	ij	-1	-i
ij	ij	-j	-i	1

Pour définir un isomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_2 \mapsto \mathbb{MC}_4$ ($\mathbb{C}_2$ = les bicomplexes), il suffit de définir les images d'une base.

Par exemple :
$\varphi(1) = 1$ (pas le choix pour une $\mathbb{R}$-algèbre)
$\varphi(i) = e^2$
$\varphi(j) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^3 + e)$
$\varphi(ij) = \varphi(i).\varphi(j) = e^2.\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3 + e) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^3 - e)$

Avec ces données il est facile de construire la table de multiplication des images et de vérifier que c'est la même que celle de $\mathbb{C}_2$.

Variations : on peut aussi définir des ensembles de nombres en posant $e^n = 1$ (en place de $e^n = -1$)

1.1.8 Utilisation en physique

Théorie des Champs, cf. ci-dessous.

1.1.9 Références

Algèbres de Clifford - Supersymétrie et Symétries $\mathbb{Z}_n$ -Applications en Théorie des Champs

Commutative Extended Complex Numbers and Connected Trigonometry (eng) N. Fleury ,M. Rausch De Traubenberg ,R. M. yamaleev Journal of mathematical analysis and applications ISSN 0022-247X 1993, vol. 180, No2, pp. 431-457

Extended Complex Number Analysis and Conformal-like Transformations N. Fleury ,M. Rausch de Traubenberg ,R.M. Yamaleev Journal of mathematical analysis and applications ISSN 0022-247X 1995, vol. 191, No 1, pp. 118-136