Le théorème de Mason-Stothers et le théorème de Fermat-Wiles.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Démonstration du Théorème de Fermat-Wiles
par le théorème de Mason-Stothers.

Preuve :

Théorème de Mason-Stothers :

Pour tous polynômes a,b,c premiers entre eux vérifiant a + b = c, on a

$\max(\deg\{a,b,c\}) \leq n_0(abc) - 1$

où $n_0(P)$ est le nombre de racines distinctes de P.

Soit l'équation

(1) $x^n+y^n-z^n=0$, où $(x,y,z,n) \in N^{*4}$ et $n>2$.

En posant m = x+y-z, on peut écrire :

x = (x+y-z)+z-y = m+u , avec u=z-y

y = (x+y-z)+z-x = m+v , avec v=z-x

z = (x+y-z)+(z-y)+(z-x) = m+u+v = m+w, w=u+v.

Sans nuire à la généralité de l'équation (1), on considère que x, y et z sont premiers entre eux et, par conséquence, u, v et w sont premiers entre eux.

En posant x=m+u, y=m+v et z=m+w dans (1), on obtient l'équation:

(2) $(m+u)^n + (m+v)^n = (m+w)^n$, avec w=u+v.

Equation polynômiale qui a pour indéterminée m, indépendante des constantes entières u, v et w puisque w=u+v et m=x+y-z.

Avec X=m, on obtient les trois polynômes de degré n :

(3) $P(X) = (X+u)^n$, $Q(X) = (X+v)^n$, $R(X) = (X+w)^n$.

Les trois polynômes P(X), Q(X) et R(X) sont premiers entre eux car toute fraction formée par deux polynômes distincts parmi les polynômes primitifs, de premier degré, X+u, X+v et X+w, où u, v et w sont premiers eux, est irréductible.

Comme P(X), Q(X) et R(X) sont de degré n, premiers entre eux, admettant chacun une seule racine d'ordre de multiplicité égal à n et vérifiant l'équation :

(4) $P(X) + Q(X) = R(X)$,

le théorème de Mason-Stothers permet d'écrire l'inéquation :

$\max(\deg\{P,Q,R)\} \leq n_0(PQR) - 1$

soit : $n \leq 3 - 1 = 2$.

Et par suite, l'égalité $z^n = x^n + y^n$, où $(x,y,z,n) \in N^{*4}$ et $n>2$, est impossible.

Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

Inpi - Paris