1 Infinitésimaux

1.1 Levi–Civita

1.1.1 Introduction

Le corps de Levi-Civita doit son nom à un mathématicien Italien, Tullio Levi-Civita (1873-1941), c'est un corps qui étend $\mathbb{R}$ avec des quantités infinitésimales.

1.1.2 Définition

Le corps de Levi-Civita, est traditionnellement noté $\mathcal{R}$, il est défini comme un ensemble de séries formelles où ε représente une quantité infinitésimale positive (c'est à dire un élément strictement plus grand que 0, mais plus petit que tous les réels positifs) :

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{q \in Q} a_q \varepsilon^q \mid a_q \in \mathbb{R} \wedge Q \subset \mathbb{Q} \wedge \text{ Q est fini à gauche} \right\}$$

Un ensemble X ordonné est dit « fini à gauche » si pour tout élément $x \in X$, l'ensemble des éléments de X plus petits que x est fini.

Une autre façon de définir les ensembles finis à gauche est de les définir comme les images de suites strictement croissantes, finies ou divergentes.

1.1.3 Table de multiplication

Avant de donner les définitions des opérations sur $\mathcal{R}$, il est nécessaire de faire quelques remarques.

Si X et Y sont deux ensembles finis à gauche tels que $X \subset Y$, si $x = \sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q$, alors en posant : $\forall q \in Y (b_q = a_q \Leftrightarrow q \in X \wedge b_q = 0 \Leftrightarrow q \notin X)$, on a le résultat trivial $\sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q = \sum_{q \in Y} b_q \varepsilon^q$.

Dans la suite de ce document et pour simplifier la lecture, si X et Y sont deux ensembles finis à gauche tels que $X \subset Y$, nous écrirons que $\sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q = \sum_{q \in Y} a_q \varepsilon^q$, en sous-entendant que les coefficients correspondant à des éléments de $Y - X$ sont égaux à 0.

Lemme 1 : Si X et Y sont des ensembles finis à gauche, alors $X \cup Y$ est fini à gauche.

Lemme 2 : Si X et Y sont des ensembles finis à gauche, alors $X + Y = \{x + y \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$ est fini à gauche, et chacun de ses éléments ne peut être issu que d'un nombre fini de couples $(x, y) \in X \times Y$.

On définit l'addition de la façon suivante :
Soit $x = \sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q$ et $y = \sum_{q \in Y} b_q \varepsilon^q$, alors : $x + y = \sum_{q \in X \cup Y} (a_q + b_q) \varepsilon^q$.

On définit la multiplication de la façon suivante :
Soit $x = \sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q$ et $y = \sum_{q \in Y} b_q \varepsilon^q$, alors : $x \times y = \sum_{p \in X, q \in Y} (a_p . b_q) \varepsilon^{p+q}$.

A noter que la définition précédente ne donne pas une écriture canonique de $x \times y$, dans la mesure où une même valeur de l'exposant peut être atteinte par plusieurs valeurs de p et de q.

1.1.4 Support, $\lambda, \sim, \approx$, et Inverse

Le support d'un élément x est le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, tel que $a_q \neq 0$, il est noté $\text{supp}(x)$.

$\lambda(x)$ est le plus petit élément de $\text{supp}(x)$ si $x \neq 0$, qui existe, puisque $\text{supp}(x)$ est fini à gauche, et $\lambda(0) = \infty$. $\lambda(x)$ représente l'ordre de magnitude de x.

La relation $\sim$ est définie par : $x \sim y \Leftrightarrow \lambda(x) = \lambda(y)$
C'est à dire que deux éléments de $\mathcal{R}$ ont le même ordre de magnitude, c'est une relation d'équivalence.

La relation $\approx$ est définie par : $x \approx y \Leftrightarrow (\lambda(x) = \lambda(y)) \wedge (a_{\lambda(x)} = b_{\lambda(y)})$
C'est à dire que deux éléments de $\mathcal{R}$ ont le même ordre de magnitude, et son identique à cet ordre là, c'est une relation d'équivalence.

On définit la relation d'ordre de la façon suivante : Soit $x = \sum_{q \in X} a_q \varepsilon^q$ et $y = \sum_{q \in Y} b_q \varepsilon^q, x \neq y$, alors : $x < y \Leftrightarrow (a_{\lambda(x-y)} + b_{\lambda(x-y)})$.

Cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication par un élément plus grand que 0.

Ont peut aussi remarquer qu'avec cette définition, et pour tout $n : n \times \varepsilon < 1$, c'est à dire que $\mathcal{R}$ n'est pas archimédien.

La démonstration et le calcul de l'inverse dépasse le cadre de ce document, mais on peut la trouver dans le document disponibles sur le net New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field.

1.1.5 Propriétés algébriques

Le corps de Levi-Civita, comme son nom l'indique est un corps, de plus il est ordonné non archimédien.
L'injection $\pi : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{R}$ définie par $\pi(x) = x\varepsilon^0$, permet de plonger canoniquement $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans $(\mathcal{R}, +, \times)$.
C'est le plus petit corps contenant $\mathbb{R}$, non archimédien et complet (au sens de Cauchy).

1.1.6 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Il aurait aussi été possible de définir $\mathcal{R}$ sans introduire une quantité infinitésimale, mais à l'aide de fonctions :

$\mathcal{R} = \{f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R} \mid \{x \mid f(x) \neq 0\}$ est fini à gauche $\}$.

A partir de cette définition on peut introduire la notion de support, de $\lambda(x)$, les relations d'équivalence $\sim$ et $\approx$, puis de définir l'addition la multiplication et la relation d'ordre de façon naturelle, afin de retrouver les définitions précédentes.

Il est possible d'étendre le corps de Levi-Civita en un corps algébriquement clos en prenant les coefficients dans $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$.

1.1.7 Utilisation en physique

Le calcul infinitésimal est lourdement utilisé en physique, par conséquent toutes les théories mathématiques permettant de travailler simplement avec des infinitésimaux peuvent intéresser les physiciens.

1.1.8 Références

Levi-Civita theory for irrotational water waves in a one-dimensional channel and the complex Korteweg-de Vries equation.

M. Berz. Analysis on a Nonarchimedean Extension of the Real Numbers. Lecture Notes, 1992 and 1995 Mathematics Summer Graduate Schools of the German National Merit Foundation. MSUCL-933, Department of Physics, Michigan State University, 1994

Tullio Levi-Civita. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. Atti Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Art., 7a, 4 :1765, 1892.

Tullio Levi-Civita. Sui numeri transfiniti. Rend. Acc. Lincei, 5a, 7 :91,113, 1898.

Khodr Shamseddine, Analysis on the Levi-Civita Field : A Brief Overview.

Khodr Shamseddine, New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field

D'une façon générale on peut consulter le site de Khodr Shamseddine.