

**Exercice 2 (Localisation des racines de polynômes d'une variable complexe)** On rappelle que d'après le théorème fondamental de l'algèbre, tout polynôme d'une variable complexe  $z$  à coefficients complexes de degré  $n$  s'écrit

$$c \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

avec  $c$  différent de 0. Les nombres complexes  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , distincts ou non, sont les racines de ce polynôme.

### 1. Résultant de deux polynômes

Soient

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

et

$$g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$$

deux polynômes de degrés  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$  avec  $a_0$  différent de 0 et  $b_0$  différent de 0.

- (a) Montrer que pour que  $f$  et  $g$  aient au moins une racine commune, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes non nuls  $h$  et  $k$  de degrés respectifs inférieur ou égal à  $m - 1$  et inférieur ou égal à  $n - 1$ , tel que l'on ait pour tout  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$  :

$$h(z)f(z) = k(z)g(z). \quad (1)$$

- (b) Si on écrit

$$h(z) = \alpha_0 z^{m-1} + \alpha_1 z^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1}$$

et

$$k(z) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1},$$

montrer qu'en identifiant les deux membres de (1), on obtient un système linéaire, que l'on écrira, de  $m + n$  équations pour les  $\alpha_i$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ ,  $\beta_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ .

- (c) Montrer que le déterminant de ce système est donné, au signe près, par

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{vmatrix}. \quad (2)$$

- (d) Le déterminant de la formule (2) est appelé résultant de Sylvester de  $f$  et  $g$  et est noté  $R(f, g)$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce résultant pour que  $f$  et  $g$  aient au moins une racine commune.

## 2. Nombre de racines d'un polynôme dans un demi-plan

Soit  $f$  un polynôme de degré  $n$ ,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

on lui associe le polynôme

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{a_0} z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + \dots + \overline{a_n}.$$

Pour  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes distincts, on note

$$K(f; z, z') = \frac{f(z)f^*(z') - f(z')f^*(z)}{z - z'}.$$

- (a) Montrer qu'il existe des nombres complexes  $A_{hk}$ ,  $0 \leq h, k \leq n-1$  tels que

$$K(f; z, z') = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{hk} z^h z'^k.$$

- (b) Montrer que pour tous  $h$  et  $k$ ,  $0 \leq h, k \leq n-1$ , on a

$$\overline{A_{hk}} = -A_{hk} = -A_{kh}.$$

*Indication : On calculera pour cela  $\overline{K(f; z, z')}$ .*

- (c) On définit  $H(f)$  par

$$H(f)(u_0, \dots, u_{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i} A_{hk} u_h \overline{u_k}.$$

Montrer que  $H(f)$  est une forme hermitienne.

- (d) Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux polynômes de degrés respectifs  $r$  et  $s$  tels que

$$r + s = n.$$

Trouver deux suites  $v_0, v_1, \dots, v_{r-1}$  et  $w_0, w_1, \dots, w_{s-1}$ , dépendant linéairement de la suite  $u_0, \dots, u_{n-1}$ , telles que

$$H(f_1 f_2)(u_0, \dots, u_{n-1}) = H(f_1)(v_0, v_1, \dots, v_{r-1}) + H(f_2)(w_0, w_1, \dots, w_{s-1}).$$

- (e) Montrer que le déterminant de la matrice des coefficients des  $n$  formes linéaires  $v_h$ ,  $0 \leq h \leq r-1$ ,  $w_k$ ,  $0 \leq k \leq s-1$  en les  $u_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , est  $R(f_1^*, f_2)$ .

(f) Montrer par récurrence que si

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

alors

$$H(f)(u_0, \dots, u_{n-1}) = |a_n|^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{i} (z_k - \bar{z}_k) F_k(u_0, \dots, u_{n-1}) \overline{F_k(u_0, \dots, u_{n-1})},$$

où les  $F_k$  sont  $n$  formes linéaires en les  $u_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , linéairement indépendantes.

- (g) En déduire le résultat suivant : Soit  $g$  le p.g.c.d. des polynômes  $f$  et  $f^*$ ; soit  $r$  son degré et posons  $f = gf_1$ . Alors le rang de la forme hermitienne  $H(f)$  est égal à  $n - r$  et sa signature  $(p, q)$  est telle que  $p$  soit le nombre de racines de  $(f_1(z) = 0)$  contenues dans le demi-plan  $(\Im z > 0)$ ,  $q$  le nombre de racines de cette équation contenues dans le demi-plan  $(\Im z < 0)$ .
- (h) En déduire que pour que l'équation  $(f(z) = 0)$  ait toutes ses racines dans le demi-plan  $(\Im z > 0)$ , il faut et il suffit que la forme hermitienne  $H(f)$  soit définie positive.
- (i) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(f(z) = 0)$  ait toutes ses racines dans le demi-plan  $(\Re z < 0)$ .