Sur la complétude des corps ordonnés

Table des matières

Introduction

Voici une petite exploration du monde des corps ordonnés. La première section est consacrée aux premières définitions et premières propriétés sur les corps ordonnés, puis on s'intéresse dans la deuxième section aux topologie et structure uniforme que l'on peut définir sur ces corps. Ensuite, dans la troisième section, on étudie la complétude d'un corps ordonné, ce qui permet notamment de donner quelques définitions axiomatiques possibles du corps des réels. On termine finalement avec deux notes sur la classification des corps archimédiens et sur les corps ordonnables respectivement aux quatrième et cinquième sections, puis quelques exemples et contre-exemples à la sixième section.

1 Généralités sur les corps ordonnés

Définition 1.1 : Muni d'une relation d'ordre total $\leq$, on dit qu'un corps K est ordonné si pour tout $x, y, z \in K$, $x, y \geq 0$ implique $x \cdot y \geq 0$ et $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$ (on dit que $\leq$ est compatible avec les opérations de K).

Dans un tel corps ordonné, on note pour tout $x, y \in K$: $[x, y] = \{z \in K \mid x \leq z \leq y\}$, $[x, y[= \{z \in K \mid x \leq z < y\}$, $]x, y] = \{z \in K \mid x < z \leq y\}$ et $]x, y[= \{z \in K \mid x < z < y\}$.

Propriété 1.2 : Un corps ordonné est de caractéristique nulle. En particulier, il est de cardinal infini.

Preuve : Soit K un corps ordonné. Suppposons que $\mathrm{car}(K) = p \neq 0$. Alors $0 \leq (p-1)1 \leq p1 = 0$, d'où $(p-1)1 = 0$, ce qui est contradictoire avec la défintion de la caractéristique d'un corps. Donc $\mathrm{car}(K) = 0$.
Cela a notamment pour conséquence que les éléments de la famille $(n1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts, donc K est nécessairement infini. $\square$

Dans le cadre des corps ordonnés, la notion de morphisme intéressante est celle de morphisme de corps ordonnés :

Définition 1.3 : Soient K et C deux corps ordonnés. On dit que $\varphi : K \to C$ est un morphisme de corps ordonnés si c'est un morphismes de corps et si pour tout $x, y \in K$ tels que $x \leq y$, on a $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Propriété 1.4 : Un corps ordonné admet un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Preuve : Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & K \\ p/q & \mapsto & (p1) \cdot (q1)^{-1} \end{array} \right.$. Montrons que φ est un morphismes de corps ordonnés injectif.
Pour cela, il faut d'abord montrer que pour tout $s, q \in \mathbb{Z}^*$ et $r, p \in \mathbb{Z}$, $\varphi\left(\frac{rp}{rq}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right)$, $\varphi\left(\frac{p}{q}\frac{r}{s}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right).\varphi\left(\frac{r}{s}\right)$ et $\varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi\left(\frac{r}{s}\right)$. Cela se montre aisément grâce aux égalités suivantes : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $pq1 = (p1)(q1)$, $(p1)(q1) = (q1)(p1)$ et $(p1)(q1)^{-1} = (q1)^{-1}(p1)$. Ainsi, φ est un morphisme de corps bien défini.
Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Alors $(p1).(q1)^{-1} = 0$ d'où $p1 = 0$; K étant de caractéristique nulle, on en déduit $p = 0$, donc φ est injectif.
Soient $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$. Alors $ps \leq rq$ et comme $1 > 0$ (dans K), on en déduit que $ps1 \leq rq1$ d'où $(s1)(p1) \leq (r1)(q1)$. Ainsi, $(p1)(q1)^{-1} \leq (r1)(s1)^{-1}$ c'est-à-dire $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) \leq \varphi\left(\frac{r}{s}\right)$, donc φ préserve bien l'ordre. □

On confondra souvent $\mathbb{Q}$ avec $\varphi(\mathbb{Q})$. En particulier, on pourra noter p/q au lieu de $(p1)\cdot(q1)^{-1}$. Remarquons que l'ordre induit sur $\mathbb{N} \subset K$ correspond à l'ordre usuel sur les entiers. On retrouve donc les propriétés usuelles sur les maxima et minima d'ensembles d'entiers.

Propriété 1.5 : Soit K un corps ordonné. On définit la valeur absolue de $x \in K$ par $|x| = \max(x, -x)$. On a alors les propriétés :
(i) $\forall x, y \in K,\ |xy| = |x|.|y|$,
(ii) $\forall x \in K,\ (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$,
(iii) $\forall x, y \in K,\ |x + y| \leq |x| + |y|$.

Preuve : Soient $x, y \in K$. Si $xy \geq 0$, alors $|xy| = -xy \leq |x|.y \leq |x|.|y|$; de même, si $xy \geq 0$, $|xy| = xy \leq |x|.y \leq |x|.|y|$. On montre de même que $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Supposons que $|x| = 0$. Alors $x \leq |x| = 0$, et $-x \leq |x| = 0$ donc $x \geq 0$, c'est-à-dire que $0 \leq x \leq 0$ d'où $x = 0$. Comme $|0| = 0$, on en déduit (ii). □

2 Topologie et structure uniforme

Définition 2.1 : Soit K un corps ordonné. On définit usuellement sur K la topologie de l'ordre, topologie ayant pour base $\{\{]x - \epsilon, x + \epsilon[,\ \epsilon \in K_+\},\ x \in K\}$, en notant $K_+ = \{x \in K,\ x > 0\}$.

Propriété 2.2 : Un corps ordonné $(K, \leq)$ est un corps topologique.

Preuve : Montrons donc que les appliations $\psi : (x, y) \mapsto x + y$ et $\phi : (x, y) \mapsto xy$ sont continues. Étant donnée la topologie de l'ordre, il suffit de montrer leur continuité en 0. Or pour tout $\epsilon \in K_+$, $\psi([-\epsilon/2, \epsilon/2] \times [-\epsilon/2, \epsilon/2]) \subset [-\epsilon, \epsilon]$ et $\phi([-\epsilon, \epsilon] \times [-1, 1]) \subset [-\epsilon, \epsilon]$. □

Définition 2.3 : Soit K un corps. On dit qu'une structure uniforme $\mathfrak{U}$ est invariange par translation si pour tout $M \in \mathfrak{U}$, pour tout $(x, y) \in K^2$ et pour tout $z \in K$, $(x, y) \in M$ si, et seulement si, $(x + z, y + z) \in M$.

Théorème 2.4 : Soit K un corps topologique[1]. Il existe une unique structure uniforme invariante par translation et compatible avec la topologie de K. Cette structure uniforme $\mathfrak{U}$ est engendré par $\{N_V = \{(x, y) \in K \times K \mid x - y \in V\}, V \in \mathcal{V}(0)\}$[2].

1. Ce résultat est en fait valable pour tout espace vectoriel topologique.
2. Il s'agit en réalité de la structure uniforme additive.

Preuve : Il est clair que $\mathfrak{U}$ est invariante par translation et compatible avec la topologie de K puisque pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$ et pour tout $x \in K$, $N_V(x) = \{y \in K \mid x - y \in V\} = \{x + z \mid z \in V\} = x + V$. Soit $\mathfrak{U}'$ une seconde structure uniforme sur K vérifant les propriétés du théorème. Soit $M \in \mathfrak{U}$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $V \subset M(0)$. Donc $N_V \subset M$. En effet, si $(x, y) \in N_V$, alors $x - y \in V$ d'où $x - y \in M(0)$ d'après l'inclusion précédente, et donc $(x - y, 0) \in M$ ou $(x, y) \in M$ par invariance par translation. Donc $M \in \mathfrak{U}'$, et $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}'$. Soit $N_V \in \mathfrak{U}$. Alors il existe $M \in \mathfrak{U}$ tel que $M(0) \subset V$, d'où $M \subset N_V$. En effet, si $(x, y) \in M$ alors $(x - y, 0) \in M$, d'où $x - y \in V$ d'après l'inclusion précédente, et $(x, y) \in N_V$. Donc $N_V \in \mathfrak{U}$, et $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$. D'où $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$. $\square$

Ainsi, on dira que K est complet s'il l'est pour la structure uniforme additive.

Définition 2.5 : On dit qu'un corps ordonné K est métrisable s'il existe une distance sur K compatible avec sa structure uniforme.

Pour traiter de la métrisabilité d'un corps ordonné, nous aurons besoin de la notion de suite coinitiale :

Définition 2.6 : Soient K un corps ordonné, α un ordinal et $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha} \in K^\alpha$ une suite. On dit que $(x_\lambda)_\lambda$ est coinitiale si pour tout $x \in K_+$, il existe $\beta < \alpha$ tel que $0 < x_\beta < x$.

Théorème 2.7 : Soit K un corps ordonné. Les proprositions suivantes sont équivalentes :
(i) K est métrisable,
(ii) K admet une suite coinitiale [3],
(iii) 0 admet un système fondamental de voisinages dénombrable,
(iv) tout point de K admet un système fondamental de voisinages dénombrable.

Preuve : Pour tout $\epsilon \in K_+$ et $x \in K$, $V_\epsilon(x) = x + V_\epsilon(0)$ donc (iii) et (iv) sont équivalentes. Ensuite, s'il existe une suite $(a_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ coinitiale, alors $\{[-a_n, a_n], n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinages dénombrable de 0. Réciproquement, si $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinages de 0, alors en fixant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $x_n \in V_n$, la suite $(x_n)_n$ ainsi construite est coinitiale. Donc (ii) et (iii) sont équivalentes. Si K est métrisable, alors $\{B_d(0, 1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est un système fondamental de voisinages dénombrable de 0, en notant d la distance compatible avec la structure uniforme de K.
Supposons qu'il existe une suite coinitiale $(a_n)_n$ dans K. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(a_n)_n$ est décroissante. Définissons les applications :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \to & K \cup \{\infty\} \\ r & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < |r|\} \text{ si } r \neq 0 \\ \infty \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right. \text{, puis } d : \left\{ \begin{array}{ccc} K \times K & \to & \mathbb{R} \\ (r, s) & \mapsto & 2^{-\phi(r-s)} \end{array} \right. .$$

En remarquant que pour tout $(r, s) \in K^2$, $\phi(r + s) \geq \min(\phi(r), \phi(s))$, on en déduit que pour tout $(r, s, t) \in K^3$, $d(r, s) = 2^{-\phi(r-t+t-s)} \leq 2^{\min(\phi(r-t), \phi(t-s))} \leq \max\left(2^{-\phi(r-t)}, 2^{-\phi(t-s)}\right) \leq \max(d(r, t), d(s, t))$. On vérifie alors que d définit une distance (ultramétrique) sur K.
De plus, pour tout $r \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, $B_d(r, 2^{-n}) = \{s \in K \mid d(r, s) < 2^{-n}\} = \{s \in K \mid \phi(r-s) > n\} = \{s \in K \mid |r - s| < a_n\} = V_{a_n}(r)$, donc d est compatible avec la topologie de K. Or la distance d est clairement invariante par translation, donc la structure uniforme engendrée par cette métrique sera la structure uniforme additive sur K. Ainsi, K est métrisable. $\square$

3 Complétudes

Définition 3.1 : Soient K un corps ordonné, α un ordinal et $(x_\lambda)_\lambda \in K^\alpha$ une suite. On dit que $(x_\lambda)_\lambda$ converge vers $x \in K$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\beta < \alpha$ tel que pour tout $\lambda \geq \beta$, $|x_\lambda - x| < \epsilon$.

Les propriétés données précédemment de la valeur absolue font que l'on retrouve beaucoup de propriétés communes avec les limites de suites numériques.

3. De manière générale, lorsque l'on ne précise pas l'ordinal indexant une suite, on considérera qu'il s'agit de ω.

Définition 3.2 : Soient K un corps ordonné et $(x_\lambda)_\lambda \in K^\alpha$ une suite. On dit que $(x_\lambda)_\lambda$ est de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\beta < \alpha$ tel que pour tout $\mu, \nu \geq \beta$, $|x_\mu - x_\nu| < \epsilon$. Lorsque l'on ne précise pas l'ordinal qui indexe une telle suite, on considérera que c'est ω.

On rappelle sans démonstration les propriétés élémentaires suivantes :

Propriété 3.3 : Soit K un corps ordonné. On a les propriétés suivantes :
(i) toute suite convergente est de Cauchy,
(ii) toute suite de Cauchy est bornée,
(iii) toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente.

Définition 3.4 : Un corps ordonné est Cauchy-complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 3.5 : Soient K un corps ordonné et $A \subset K$ une partie majorée. On dit que $M \in K$ est la borne supérieure de A, et on note $M = \sup(A)$, si M est le plus petit majorant de A[4].

Propriété 3.6 : Soient K un corps ordonné, $A \subset K$ et $M \in K$. Alors $M = \sup(A)$ si, et seulement si, M majore A et si pour tout $\epsilon \in K_+$, $]M - \epsilon, M] \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : Supposons que $M \neq \sup(A)$. Soit M ne majore pas A, soit il existe un majorant $m \in K$ tel que $m < M$; dans ce cas, $M - m \in K_+$ et $]M - (M - m), M] \cap A = \emptyset$. Réciproquement, si M ne majore pas A alors $M \neq \sup(A)$, sinon il existe $\epsilon \in K_+$ tel que $]M - \epsilon, M] \cap A = \emptyset$, mais alors $M - \epsilon$ majore également A d'où $M \neq \sup(A)$. $\square$

Définition 3.7 : Un corps ordonné K est Dedekind-complet si toute partie non vide $A \subset K$ majorée admet une borne supérieure.

Définition 3.8 : Soit K un corps ordonné. K est dit archimédien si pour tout $\epsilon, \delta \in K_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\epsilon > \delta$.

Propriété 3.9 : Soit K un corps ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) K est archimédien,
(ii) la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée,
(iii) la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Preuve : Supposons K archimédien. Alors pour tout $\delta \in K_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \delta$ donc $(n)_n$ n'est pas bornée. Supposons que $(n)_n$ n'est pas bornée. Alors pour tout $\epsilon \in K_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 1/\epsilon$ d'où $\frac{1}{n} < \epsilon$; la suite $(1/n)_n$ étant de plus décroissante, on en déduit qu'elle tend vers 0. Supposons que $(1/n)_n$ tende vers 0. Alors pour tout $\epsilon, \delta \in K_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{\delta}$ d'où $n\epsilon > \delta$, c'est-à-dire que K est archimédien. $\square$

Propriété 3.10 : Soit K un corps ordonné. On note $\alpha(K)$ le plus petit ordinal α tel qu'il existe une suite coinitiale indexée par α. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) K est complet,
(ii) toute suite de Cauchy indexée par $\alpha(K)$ est convergente,
(iii) toute suite de Cauchy indexée par un ordinal converge.

Preuve : Il est clair que (iii) implique (ii). Montrons que (ii) implique (i). Fixons $(a_\lambda)_{\lambda<\alpha(K)}$ une suite coinitiale et $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy ; sans perte de généralité, supposons $(a_\lambda)_{\lambda<\alpha(K)}$ décroissante. Alors $\{V_{a_\lambda}, \lambda < \alpha(K)\}$ est un système fondamental d'entourages. Soient $x_0 \in K$ et $F_0 = V_{a_0}$. Il est possible de construire une suite $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha(K)}$ de la manière suivante : pour tout ordinal $\lambda < \alpha(K)$ non nul, il existe $F_\lambda \in \mathfrak{F}$ tel que $F_\lambda \times F_\lambda \subset V_{a_\lambda}$; on prend alors $x_\lambda \in F_\lambda$. Soient $\epsilon \in K_+$ et β un ordinal tel que $a_\beta < \epsilon/2$. Soient $\mu, \nu \geq \beta$. Comme $F_\mu \cap F_\nu \neq \emptyset$, prenons un élément x de cette intersection. Alors $|x_\mu - x_\nu| \leq |x_\mu - x| + |x_\nu - x| \leq a_\mu + a_\nu < \epsilon$. Ainsi, $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha(K)}$ est une suite de Cauchy, et doit converger par hypothèse vers un point

4. On peut vérifier que si la borne supérieure existe, alors elle est unique ; on peut donc parler de *la* borne supérieure.

$x \in K$. Soit $\mathfrak{S}_0 = \{\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i},\ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n < \alpha(K),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $\mathfrak{S}_0$ est une base de filtre telle que x lui soit adhérent. Notons $\mathfrak{F}_0$ le filtre engendré par $\mathfrak{S}_0$. Comme pour tout $\lambda < \alpha(K)$, $F_\lambda \in \mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_0$ est un filtre de Cauchy, et par conséquent converge vers x. De plus, $\mathfrak{F}$ est clairement plus fin que $\mathfrak{F}_0$, donc $\mathfrak{F}$ converge vers x.
Montrons que (i) implique (iii). Soient α un ordinal et $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ une suite de Cauchy. Considérons le filtre $\mathfrak{F}$ associé à cette suite, engendré par $\{\{x_\lambda, \mu \leq \lambda < \alpha\}, \mu < \alpha\}$. Soit $\epsilon \in K_+$. Par définition, il existe $\beta < \alpha$ tel que pour tout $\mu, \nu \geq \beta$, $|x_\mu - x_\nu| < \epsilon$. Donc $\{x_\lambda, \lambda \geq \beta\}$ est petit d'ordre V_ϵ. Par conséquent, $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy, et converge donc vers un point $x \in K$. Soit $\epsilon \in K_+$. Il existe $F \in \mathfrak{F}$ tel que $F \subset V_\epsilon(x)$. Or il existe $\gamma < \alpha$ tel que $\{x_\lambda, \lambda \geq \gamma\} \subset F$. Ainsi, pour tout $\lambda \geq \gamma$, $|x - x_\lambda| < \epsilon$, c'est-à-dire que $(x_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ converge vers x. □

Corollaire : Tout corps complet est Cauchy-complet.

Preuve : Si un corps est complet, alors toute suite de Cauchy indexée par un ordinal converge. En considérant l'ordinal ω, on en déduit que ce corps est Cauchy-complet. □

Propriété 3.11 : Soit $(K, +, ., \leq)$ un corps ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) K est complet et archimédien,
(ii) K est Cauchy-complet et archimédien,
(iii) K vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass,
(iv) K a la propriété de la borne supérieure,
(v) K est localement compact.

Preuve : Montrons que (iii) implique (ii). Toute suite de Cauchy étant bornée, elle doit admettre une valeur d'adhérence, d'où sa convergence. Ainsi, K est Cauchy-complet. Ensuite, comme pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $|p - q| \geq 1$, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence. Elle ne peut donc pas être bornée, et K est alors archimédien.

Montrons que (iv) implique (ii). Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Une suite de Cauchy étant bornée, on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \sup\{x_k, k \geq n\}$. La suite $(y_n)_n$ est alors décroissante et bornée. Notons $x = \inf\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| < \epsilon/3$. Puis il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $|x - y_r| < \epsilon/3$. Notons $t = \max(N, r)$. Alors il existe $s \geq t$ tel que $|x_s - y_t| < \epsilon/3$. Remarquons que, puisque $(y_n)_n$ est décroissante, pour tout $n \geq r$, $|x - y_n| < \epsilon/3$. Ainsi, pour tout $n \geq t$, $|x_n - x| \leq |x_n - x| + |x_s - y_t| + |y_t - x| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$. Donc $(x_n)_n$ converge vers x. K est par conséquent Cauchy-complet.
Supposons par l'absurde que $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure $s \in K$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s > n > s - \epsilon$. Donc pour tout $p \geq n$, $|s - p| < \epsilon$, ce qui montre que s est une valeur d'adhérence de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, or nous avons vu que cette suite ne peut pas admettre de valeur d'adhérence. Donc $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et K est archimédien.

Montrons que (iv) implique (iii). Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir $y_n = \sup\{x_k, k \geq n\}$. Alors la suite décroissante $(y_n)_n$ converge vers $x = \inf\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq y_N \leq x - \epsilon$; mais puisque $(y_n)_n$ est décroissante, pour tout $n \geq N$, $|y_n - x| \leq \epsilon$. Montrons que x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|y_n - x| \leq \epsilon/2$. Notons $N_2 = \max(N_1, N)$. Alors il existe $r \geq N_2$ tel que $|y_{N_2} - x_r| \leq \epsilon/2$. Alors $|x_r - x| \leq |x_r - y_{N_2}| + |y_{N_2} - x| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Montrons que (ii) implique (iii). Montrons d'abord qu'une suite monotone non convergente n'est pas bornée. Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une telle suite. Quitte à considérer $(-x_n)_n$, supposons $(x_n)_n$ croissante. Comme K est Cauchy-complet, $(x_n)_n$ n'est pas de Cauchy. Il existe donc un $\epsilon > 0$ et deux indices $\sigma(0) < n_0$ tels que $|x_{\sigma(0)} - x_{n_0}| \geq \epsilon$. On peut alors construire par récurrence les suites strictement croissantes $(n_k)_k$ et $(\sigma(k))_k$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(k), n_k \geq \max(\sigma(k-1), n_{k-1})$, $\sigma(k) < n_k$ et $|x_{\sigma(k)} - x_{n_k}| \geq \epsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)} \geq x_{n_k} - x_{\sigma(k)} \geq \epsilon$, d'où $x_{\sigma(k+1)} \geq (k+1)\epsilon + x_{\sigma(0)}$. Comme K est archimédien, la suite $(k\epsilon)_k$ n'est pas bornée, donc $(x_n)_n$ n'est pas bornée. Nous venons ainsi de montrer

que toute suite monotone bornée était convergente.
Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On dit que l'entier $n \in \mathbb{N}$ est un indice de type P si pour tout $k \geq n$, $x_k \leq x_n$. Si $(x_n)_n$ possède une infinité d'indices de type P, rangeons-les par ordre croissante : $(p_0, p_1, ...)$. Alors $(x_{p_k})_k$ est décroissante et bornée, elle est donc convergente et $(x_n)_n$ admet ainsi une valeur d'adhérence. Si $(x_n)_n$ possède un nombre fini d'indices de type P, notons p le plus grand d'entre eux. Notons $\sigma(0) = p$. Par récurrence, on peut alors construire $(\sigma(n))_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{\sigma(k+1)} > x_{\sigma(k)}$, puisque tout indice supérieur à p n'est pas un indice de type P. Alors $(x_{\sigma(n)})_n$ est une suite croissante et bornée, donc elle converge, et $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

Montrons que (ii) implique (iv). Soit $A \subset K$ borné. Si A admet un maximum, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que A n'admet pas de maximum. Soit $x_0 \in A$. Définissons la suite $(x_n)_n$ par la relation de récurrence : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $x_i = \left\{ \begin{array}{l} x_{i-1} \text{ si } P_i = \emptyset \\ z \in A \text{ tel que } z \geq \frac{1}{i}\max(P_i) \end{array} \right.$, avec $P_i = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists z \in A, x_{i-1} \leq \frac{n}{i} \leq z\}$. Alors $(x_n)_n$ est croissante et bornée. Or nous avons déjà montré que (i) impliquait que toute suite monotone bornée soit convergente. Notons donc M la limite de $(x_n)_n$. Nous allons montrer que M est la borne supérieure de A. Comme M est par construction un point d'accumulation de A, il suffit de montrer que M majore A.
Soit $y \in A$. A n'admettant pas de maximum, il existe $z \in A$ tel que $z > y$. Notons $j = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{i} < z - y\}$ (l'ensemble dont on prend le minimum n'étant pas vide puisque K est archimédien). Si $y \leq x_{j-1}$, alors $y \leq x_j$ par croissance de $(x_n)_n$. Supposons $y > x_{j-1}$. Alors $P_j \neq \emptyset$. En effet, posons $m = \min \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{j} \geq y\}$ (l'ensemble dont on prend le minimum n'étant pas vide puisque K est archimédien). Alors $x_{j-1} \leq y \leq \frac{m}{j} \leq z$. En effet, si on avait $\frac{m}{j} > z$, alors $\frac{m-1}{j} = \frac{m}{j} - \frac{1}{j} \geq z - (z-y) = y$, ce qui est impossible puisque m est le plus petit entier tel que $\frac{m}{j} \geq y$. Donc $m \in P_j$. Par conséquent, $x_j \geq \frac{1}{j}\max(P_j) \geq \frac{m}{j} \geq y$. On retrouve donc dans tous les cas que $y \leq x_j$. On peut montrer facilement que, puisque $(x_n)_n$ est croissante, $x_j \leq M$, d'où $y \leq M$, ce qui achève la démonstration.

Montrons que (v) implique (iii). Soit $V \in \mathcal{V}(0)$ compact. Comme $\{[-\epsilon, \epsilon], \epsilon > 0\}$ est un système fondamental de voisinages de 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que $[-\epsilon, \epsilon] \subset V$. Puisque $[-\epsilon, \epsilon]$ est fermé, on déduit qu'il est compact. Or pour tout $\eta > 0$ et pour tout $x \in K$, $\varphi_{\epsilon,\eta} : x \mapsto \eta\epsilon^{-1}x$ et $\psi_x : y \mapsto y + x$ sont continues, donc $\varphi_{\epsilon,\eta}([-\epsilon, \epsilon]) = [-\eta, \eta]$ et $\psi_x \circ \varphi_{\epsilon,\eta}([-\epsilon, \epsilon]) = [x-\eta, x+\eta]$ sont compacts. Ainsi, tous les intervalles fermés sont compacts.
Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x_n)_n \in [-\epsilon, \epsilon]^{\mathbb{N}}$. Par compacité, le filtre associé à $(x_n)_n$ dans $[-\epsilon, \epsilon]$ admet un point d'adhérence, donc $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence. La propriété de Bolzano-Wieirstrass est par conséquent vérifiée.

Montrons que (iii) implique (v). Soit $\epsilon > 0$. Nous savons que (iii) implique (i), donc K est complet, et comme $[-\epsilon, \epsilon]$ est fermé dans K, $[-\epsilon, \epsilon]$ est également complet. Soit $\eta > 0$. On sait que (iii) implique (ii), donc K est archimédien. Il existe ainsi $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\eta \geq 2\epsilon$. Alors $[-\epsilon, \epsilon] \subset \bigcup_{k=0}^{p-1}]-\epsilon + k\eta, -\epsilon + (k+1)\eta[$, donc $[-\epsilon, \epsilon]$ admet un recouvrement fini d'ensembles petits d'ordre V_η. Donc $[-\epsilon, \epsilon]$ est précompact. Ayant précédemment montré qu'il était complet, on en déduit qu'il est compact.
Cela étant vrai quelque soit $\epsilon > 0$ et puisque pour tout $x \in K$, $\psi_x : y \mapsto x + y$ est continue, $\{[x-\epsilon, x+\epsilon], \epsilon > 0\}$ est un système fondamental de voisinages compacts de x. Par conséquent, K est localement compact.

Finalement, l'équivalence entre (i) et (ii) est donnée par la propriété précédente. Lorsque K est archimédien, $\alpha(K) = \omega$ (la suite $(1/n)_n$ est coinitiale), donc K est complet si, et seulement si, K est Cauchy-complet. □

Théorème 3.12 : Tout corps ordonné complet est isomorphe au corps des réels.

Preuve : Soit K un corps ordonné complet et archimédien. Reprenons l'isomorphisme de corps ordonnés φ entre $\mathbb{Q}$ et $\varphi(\mathbb{Q})$ défini à la propriété 1.4. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Montrons que pour toute suite croissante $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x, $(\varphi(x_n))_n$ converge vers une unique limite. Soit $(x_n)_n$ une telle suite. Comme $(x_n)_n$ est croissante et que φ préserve l'ordre sur

$\mathbb{Q}$, on en déduit que $(\varphi(x_n))_n$ est croissante dans K. De même, $(x_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{Q}$ donc $(\varphi(x_n))_n$ est bornée dans K. Nous avons vu à la propriété précédente que dans K, toute suite monotone bornée est convergente, donc $(\varphi(x_n))_n$ converge. Notons l sa limite. Soit $(y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une seconde suite croissante convergeant vers x. Notons l' la limite de $(\varphi(y_n))_n$. En rangeant $\{x_n, y_n, n \in \mathbb{N}\}$ par ordre croissant, on obtient une suite $(z_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$; notons l'' la limite de $(\varphi(z_n))_n$. Or $(\varphi(x_n))_n$ et $(\varphi(y_n))_n$ sont des sous-suites de $(\varphi(z_n))_n$, d'où $l = l'' = l'$. On peut dès lors définir $\psi : \mathbb{R} \to K$ par $\psi_{|\mathbb{Q}} = \varphi$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\psi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n)$ où $(x_n)_n$ est une suite croissante de rationnels convergeant vers x. Montrons que ψ est un isomorphisme de corps ordonnés.

On sait déjà que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x \leq y$: $\psi(x+y) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(x.y) = \varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y) = \psi(x).\psi(y)$, $\psi(x) = \varphi(x) \leq \varphi(y) = \psi(y)$. Soient donc $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ deux suites croissantes convergeant respectivement vers x et y. Alors $\psi(x+y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) + \varphi(y_n) = \psi(x) + \psi(y)$. De la même manière, on montre que $\psi(x.y) = \psi(x).\psi(y)$. Supposons de plus que $x < y$. Alors à partir d'un certain rang N, on a $x_n < y_n$. Donc pour tout $n \geq N$, $\varphi(x_n) \leq \varphi(y_n)$ d'où $\psi(x) \leq \psi(y)$. Ainsi, ψ est un morphisme de corps ordonnés.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors nécessairement $x = 0$. Sinon, fixons une suite croissante $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
\psi(x) = 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = 0 \\
& \Rightarrow & \forall \epsilon \in K_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ -\epsilon < \varphi(x_n) < \epsilon \\
& \Rightarrow & \forall \epsilon \in \varphi(\mathbb{Q})_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ -\epsilon < \varphi(x_n) < \epsilon \\
& \Rightarrow & \forall \epsilon \in \varphi(\mathbb{Q})_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ -\varphi^{-1}(\epsilon) < x_n < \varphi^{-1}(\epsilon) \\
& \Rightarrow & \forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ -\epsilon < x_n < \epsilon
\end{array}$$

La dernière implication venant de la bijectivité de φ. On en déduit donc que $(x_n)_n$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers 0, et donc que $(x_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 0. Or $(x_n)_n$ converge vers x, d'où par unicité de la limite : $x = 0$, c'est-à-dire que ψ est injective.

Soit $x \in K$. Puisque $\varphi(\mathbb{Z}) \subset K$ n'est pas borné, puisque K est archimédien, donc il existe $a_0, b_0 \in \varphi(\mathbb{Z})$ tels que $a_0 < x < b_0$. Définissons les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } \frac{a_n+b_n}{2} \geq x \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon} \end{array} \right.$. Alors les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont monotones (respectivement croissante et décroissante), bornées et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite, qui d'après l'inégalité, doit nécessairement être x. Comme $(a_n)_n$ est croissante, convergente et appartient à $\varphi(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$, on en déduit que $(\varphi^{-1}(a_n))_n$ est une suite croissante et convergente de rationnels. Notons a la limite de cette suite. Alors $\psi(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\varphi^{-1}(a_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$. Donc ψ est surjective, ce qui achève la démonstration. $\square$

Les deux résultats précédents impliquent notamment :

Corollaire : À un isomorphisme près, $\mathbb{R}$ est le seul corps ordonné K vérifiant l'une des propriétés suivantes :
(i) K est archimédien et complet,
(ii) K est archimédien et Cauchy-complet,
(iii) K est localement compact,
(iv) K est Dedekind-complet.

4 Note sur les corps archimédiens

Théorème 4.1 : Un corps ordonné est archimédien si, et seulement si, il est isomorphe à un corps ordonné K tel que $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$.

Avant de démontrer ce théorème, introduisons le lemme suivant :

Lemme : Un corps ordonné K est archimédien si, et seulement si, $\mathbb{Q}$ est dense dans K.

Preuve : Supposons $\mathbb{Q}$ dense dans K. Alors pour tout $\epsilon \in K_+$, il existe $p \in \mathbb{Q}_+ \cap [-\epsilon, \epsilon]$. Or $\mathbb{Q}$ est archimédien, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > 1/n$, d'où $1/n < \epsilon$. On en déduit que le suite $(1/n)_n$ tend vers 0, et donc que K est archimédien.
Réciproquement, supposons K archimédien. Soient $x \in K$ et $\epsilon \in K_+$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\epsilon > 1/p$ et fixons $q = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{p} > x\}$ (ces deux éléments existant puisque K est archimédien). Alors $p/q \in]x, x+\epsilon[$. En effet, on a $p/q > x$ et si l'on avait $p/q \geq x + \epsilon$, on aurait $\frac{q-1}{p} \geq x + \epsilon - 1/p > x$, ce qui est impossible vue la définition de q en tant que minimum. Donc $\mathbb{Q}$ est bien dense dans K. □

Preuve du théorème : Nous savons que φ^{-1} est un isomorphisme entre $\mathbb{Q}$ et $\varphi(\mathbb{Q})$. La densité de $\varphi(\mathbb{Q})$ dans K implique que pour tout $x \in K$, il existe une suite $(x_n)_n \in \varphi(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ croissante et convergeant vers x. Alors en reprenant la preuve du théorème 3.12, on montre que $(\varphi^{-1}(x_n))_n$ converge vers un point $\psi(x) \in \mathbb{R}$, puis que l'application ψ introduite est bien définie et qu'elle consitue un morphisme de corps ordonnés injectif. Dès lors, K est isomorphe au corps ordonné $\psi(K) \subset \mathbb{R}$. □

Propriété 4.2 : Tout corps archimédien est commutatif.

Preuve : C'est un corollaire du théorème précédemment, mais ce résultat peut être montré directement :

Soient K un corps archimédien et $a, b, d \in K_+$. Notons $n = \min\{n \in \mathbb{N} | nd \leq a\}$ et $m = \min\{n \in \mathbb{N} | nd \leq b\}$, ces minima existant puisque K est archimédien. Alors $\begin{cases} nd \leq a \leq (n+1)d \\ md \leq b \leq (m+1)d \end{cases}$, d'où $ndmd - (m+1)d(n+1)d \leq ab - ba \leq (n+1)d(m+1)d - mdnd$. Or, en développant, on obtient que $ndmd = nmd^2$. Il en est de même pour $(m+1)d(n+1)d$, $(n+1)d(m+1)d$ et $mdnd$. Ainsi, $-(m+n+1)d^2 \leq ab - ba \leq (m+n+1)d^2$. Cependant, $(m+n+1)d^2 = (md + nd + d)d \leq (md + 2nd)d \leq (2a+b)d$; d'où $-(2a+b)d \leq ab - ba \leq (2a+b)d$. Notons que cette inégalité est vraie pour tout $d \in K_+$ strictement positif.
Supposons par l'absurde que $ab - ba \neq 0$. K étant archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(ab - ba) > (2a+b)$ ou $n(ba - ab) > (2a+b)$. On obtient alors une contradiction en posant $d = 1/n$ dans l'inégalité précédemment trouvée. Par conséquent, $ab = ba$.
Supposons maintenant a et b de signe quelconque (mais non nuls). Soient $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ tels que ϵa et ηb soient strictement positifs. D'après ce qui précède, $(\epsilon a)(\eta b) = (\eta b)(\epsilon a)$. Or $(\epsilon a)(\eta b) = (\epsilon\eta)ab$. Il suffit en effet de vérifier que $a(-b) = -ab$ (les autres cas s'en déduisant par symétrie) : $a(-b) + ab = a(-b+b) = 0 = a(b-b) = ab + a(-b)$ d'où la conclusion par unicité de l'opposé. On trouve donc $(\epsilon\eta)ab = (\epsilon\eta)ba$, d'où $ab = ba$ puisque $\epsilon\eta$ est non nul.
Si a ou b est nul, alors on a bien sûr $ab = ba$. Ainsi, pour tout $a, b \in K$, $ab = ba$ et par conséquent K est bien commutatif. □

Propriété 4.3 : Tout corps archimédien est métrisable.

Preuve : C'est également un corollaire du théorème précédent, mais ce résultat est aussi une conséquence de ce qui précède : la propriété 3.9 assure que $(1/n)_n$ est une suite coinitiale, d'où on déduit grâce à la propriété 2.7 que le corps est métrisable. □

5 Note sur les corps ordonnables

Définition 5.1 : Un corps K est dit ordonnable s'il existe une relation d'ordre $\leq$ telle que $(K, \leq)$ soit un corps ordonné.

Théorème 5.2 : Soit K un corps. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) K est ordonnable,
(ii) -1 n'est pas une somme de carrés,
(iii) $\forall a_1, ..., a_n \in K$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_n = 0\right)$,
(iv) K contient un élément qui n'est pas une somme de carrés (et $\mathrm{car}(K) \neq 2$).

Preuve : Montrons que (ii) implique (i). Considérons l'ensemble des surcorps de K tels que -1 ne soit pas une somme de carrés, et remarquons qu'il est inductif pour la relation :

$K_1 \leq K_2$ si, et seulement si, K_1 est un sous-corps de K_2. En effet, toute chaîne $(K_i)_{i\in I}$ de tels corps est majorée par le corps $\bigcup_{i\in I} K_i$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \bigcup_{i\in I} K_i$ tels que $-1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un corps K_i de la chaîne tel que $\alpha_i \in K_i$; or, parmi les $K_1, ..., K_n$, il existe un corps K_j les contenant tous et alors on peut dire que -1 s'écrit comme somme de carrés de K_j, ce qui est contradictoire. Ainsi, par le lemme de Zorn [5], il existe un corps $\tilde{K}$ maximal pour $\leq$ parmi les surcorps de K et tels que -1 ne puisse s'écrire comme une somme de carrés.
Montrons que pour tout $\gamma \in \tilde{K}$, soit γ soit $-\gamma$ est un carré. Soit donc $\gamma \in \tilde{K}$ qui ne soit pas un carré. Notons $\sqrt{\gamma}$ une racine de $X^2 - \gamma$. Alors $\tilde{K} \subsetneq \tilde{K}(\sqrt{\gamma})$, donc par définition de $\tilde{K}$, il existe $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \tilde{K}$ tels que $-1 = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i\sqrt{\gamma})^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + \gamma b_i^2) + 2\sqrt{\gamma}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Comme $\sqrt{\gamma} \notin \tilde{K}$, nécessairement $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$. De plus, remarquons que γ ne peut pas s'écrire comme une somme de carrés dans $\tilde{K}$ puisque dans le cas contraire, -1 serait une somme de carrés dans $\tilde{K}$. Nous venons donc de montrer que dans $\tilde{K}$ un élément qui n'est pas un carré n'est pas une somme de carrés, ou de manière équivalente qu'une somme de carrés est un carré. Comme $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$ (sans quoi -1 serait une somme de carrés dans K), on en déduit que $-\gamma = \frac{1^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ est un carré.
On peut alors définir sur $\tilde{K}$ la relation $\leq$ par : pour tout $x, y \in \tilde{K}$, $x \leq y$ équivaut à $y - x$ est un carré. Alors on vérifie aisément que $(\tilde{K}, \leq)$ est un corps ordonné [6], et $(K, \leq)$ est ainsi un sous-corps ordonné de $\tilde{K}$.

Montrons que (i) implique (ii). Si K est ordonnable, les carrés sont nécessairement positif et en particulier $1 > 0$. Donc $-1 < 0$. Or, si -1 s'écrivait comme une somme de carrés, il serait positif.

Montrons que (ii) implique (iii). Raisonnons par contraposition et supposons qu'il exite $a_1, ..., a_n \in K^n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Alors $-1 = \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} \left(\frac{a_k}{a_j}\right)^2$ et donc -1 s'écrit comme une somme de carrés.

Montrons que (iii) implique (ii). Raisonnons par contraposition et supposons qu'il existe $a_1, ..., a_n \in K^n$ tels que $-1 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Alors $1^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$ avec $1 \neq 0$.

Il est clair que (ii) implique (iv). Montrons que (iv) implique (i). Pour cela on raisonne comme précédemment. Soit $a \in K$ un élément ne s'écrivant pas comme une somme de carrés. On montre qu'il existe un corps $\tilde{K}$ maximal pour $\leq$ dans l'ensemble des surcorps de K tel que a ne soit pas une somme de carrés, puis que pour tout $\gamma \in \tilde{K}$, γ ou $a\gamma$ est un carré. On définit ensuite sur $\tilde{K}$ la relation d'ordre : pour tout $x, y \in \tilde{K}$, $x \leq y$ équivaut à $x - y$ est un carré. Dès lors, K est un sous-corps du corps ordonné $(\tilde{K}, \leq)$. $\square$

6 Exemples et contre-exemples

Nous allons répertorier ici quelques exemples de corps ordonnés, puis montrer certaines de leurs propriétés. On ne considérera pas le corps des réels, l'ayant précisément caractérisé dans la section précédente.

5. On utilise donc l'axiome du choix dans cette preuve ; on peut en fait simplement utiliser le lemme des ultrafiltres, hypothèse légèrement moins forte.

6. En fait, puisqu'un carré est toujours positif dans un corps ordonné, c'est la seul relation d'ordre compatible avec les opérations de $\tilde{K}$ que l'on peut définir.

6.1 Corps des rationnels et des complexes

Propriété 6.1 : $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné archimédien, métrisable, non complet, non Cauchy-complet, non Dedekink-complet.

Propriété 6.2 : $\mathbb{C}$ est un corps non ordonnable, archimédien le sens où pour tout $a, b \in \mathbb{C}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|na| > |b|$.

6.2 Corps des fractions rationnelles

Définition 6.3 : On définit sur $K[X]$ la valuation X-adique $v_X : P \mapsto \max\{n \in \mathbb{N} \mid X^n|P\}$, que l'on étend sur $K(X)$ par $v_X : P/Q \mapsto v_X(P) - v_X(Q)$. On définit sur $K(X)$ la topologie X-adique telle que pour tout $R \in K(X)$, $\{R + (X^n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinages de R. Alors cette topologie est métrisable, via la distance $d : (R, S) \mapsto 2^{v_X(R-S)}$. On peut définir sur $K(X)$ l'ordre 0_+ en prolongeant l'ordre réel et en considérant X comme un infinitésimal positif ($X > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ X < x$). $K(X)$ est ainsi un corps ordonné dont la structure uniforme est compatible avec la topologie X-adique et la métrique associée.

Propriété 6.4 : $K(X)$ est un corps ordonné non archimédien, métrisable, non complet, non Cauchy-complet, non Dedekind-complet.

6.3 Corps des séries de Laurent

Définition 6.5 : Soit K un corps. On note $K((X))$ l'ensemble des séries formelles de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ avec $(a_n)_n \in K^{\mathbb{Z}}$ une suite telle qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $n \leq k$, $a_n = 0$. On munit $K((X))$ des opérations suivantes :

(i) $\forall \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n X^n \in K((X)),\ \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n X^n = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (a_n + b_n) X^n$,

(ii) $\forall \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n X^n,\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n\right)\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n X^n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum\limits_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n$.

Pour tout $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \in K((X))$, on définit $\operatorname{ord}\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n\right) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$. On munit alors $K((X))$ de la distance $d(f, g) = 2^{-\operatorname{ord}(f-g)}$.

Propriété 6.6 : $K((X))$ est le corps des fractions de l'anneau $K[[X]]$ des séries formelles de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$, avec $(a_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$.

Propriété 6.7 : $K((X))$ est le complété de $K(X)$.

Preuve : Une suite $(S_n)_n \in K((X))^{\mathbb{N}}$, avec $S_n = (a_{nk})_k$, converge si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(a_{nk})_n$ est stationnaire. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$ converge si, et seulement si, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $K((X))$ est complet : si $(S_n)_n$ est de Cauchy, $(S_{n+1} - S_n)_n$ converge vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (S_{n+1} - S_n)$ converge. De plus, on peut plonger isométriquement $K(X)$ dans $K((X))$, et $K(X)$ est clairement dense dans $K((X))$. $\square$

Propriété 6.8 : On peut munir $K((X))$ d'une relation d'ordre étendant l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et faisant de X un infiniment petit positif. Alors, muni de cet ordre, $K((X))$ est un corps ordonné.

Preuve : $\{g \in K((X)) \mid d(f, g) < 1/2^n\} = \{g \in K((X)) \mid \operatorname{ord}(f - g) > n\} = f + (X^{n+1}) = \{g \in K((X)) \mid -X^n < g - f < X^n\}$. $\square$

Propriété : $K((X))$ est un corps ordonné métrisable, non archimédien, complet, Cauchy-complet et non Dedekind-complet.

6.4 Corps des hyperréels

On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les opérations suivantes :

(i) $\forall (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$,

(ii) $\forall (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_n \cdot (b_n)_n = (a_n b_n)_n$.

Soit U un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. On définit alors la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $\forall (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $((a_n)_n \mathfrak{R} (b_n)_n \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in U)$.
Les opérations passent alors au quotient, on peut donc munir $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{R}$ de deux lois de compositions internes. Ensuite, on définit sur $^*\mathbb{R}$ la relation d'ordre : $\forall a, b \in^* \mathbb{R}$, $(a \leq b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in U)$. On vérifie alors facilement que :

Propriété 6.9 : $(^*\mathbb{R}, \leq)$ est un corps ordonné [7].

On confondra, comme à l'accoutumé, $\mathbb{Q}$ avec son image canonique dans $^*\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on notera q au lieu de $(q)_n$, l'élément neutre de $^*\mathbb{R}$ étant $(1)_n$.

Propriété 6.10 : $^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien. Par conséquent, il n'est pas non plus Dedekind-complet.

Preuve : Notons $\epsilon = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$. Comme dans $\mathbb{Q}$ la suite $(1/n)_n$ est décroissante et tend vers 0, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{n} < \frac{1}{k}\}$ est cofini donc [8] $\epsilon < \frac{1}{k}$. Cela étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien. □

Propriété 6.11 : $^*\mathbb{R}$ n'est pas métrisable.

Preuve : D'après la propriété 2.7, il suffit de montrer que toute suite strictement positive dans $^*\mathbb{R}$ est minorée par un élément strictement postif. Soit $(x_n)_n$ une telle suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid x_n(k) = 0\}$ est cofini ; sans perte de généralité, il est possible donc possible de modifier un nombre fini de termes dans la suite $(x_n(k))_k$ pour se ramener au cas où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_n(k) > 0$.
Soit $x \in^* \mathbb{R}$, défini par : $\forall k \in \mathbb{N},\ x(k) = \min\{x_i(k),\ 1 \leq i \leq k\}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \leq x_i(k)\} \supset [\![i, +\infty[\![$, donc $x \leq x_i$. On trouve finalement que $0 < x \leq x_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

La question de savoir si $^*\mathbb{R}$ est complet ou Cauchy-complet est assez délicate, et ne sera pas traitée ici.

Références

N. Bourbaki, *Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, Springer (1971).

B. van der Waerden, *Algebra. Volume I*, Springer (1970).

Y. Tanaka, *Ordered fields and metrizability*, Bull. Tokyo Gakugei Univ. Division of Natur. Sci., 61 :1-9 (2009).

B. Gelbaum, J. Olmsted *Counterexamples in analysis*, Dover Publications (1992).

7. Le théorème de Loś montre de plus que $^*\mathbb{R}$ est élémentairement équivalent à $\mathbb{R}$.
8. En effet, soit un ultrafiltre contient le filtre de Fréchet soit il est principal, donc ici, U contient tous les ensembles cofinis.