Chapitre 1 - Les matrices : généralités et opérations

I) Les vecteurs

1) Définitions

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul. On appelle **vecteur de dimension** n un tableau constitué d'une seule colonne formée de n nombres réels.*

Notation 1 *Nous noterons :* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ *un tel vecteur.*

Nous noterons $\dim(X)$ *la dimension du vecteur X; donc ici, nous avons* $\dim(X) = n$.

*Chacun des nombres réels x_i sera appelé **composante** du vecteur X; par exemple, x_1 désignera la première composante du vecteur X, x_2 la seconde composante...*

Remarque 1 *Nous noterons souvent $X = (x_i)$ le vecteur X.*

Définition 2 *Deux vecteurs X et Y sont égaux si :* $\left\{ \begin{array}{c} \dim(X) = \dim(Y) \\ \forall i \in \{1; 2; ...; n\} \text{ on a : } x_i = y_i \end{array} \right.$ *, où x_i et y_i désignent les composantes respectives des vecteurs X et Y.*

2) Vecteurs particuliers

Définition 3 *On appelle **vecteur nul** le vecteur dont toutes les composantes sont nulles.*

Nous le noterons : $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 4 *On appelle $i^{\text{ème}}$ **vecteur unitaire** le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.*

Nous le noterons : $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Opérations sur les vecteurs

a) L'addition de deux vecteurs

Définition 5 *La **somme** de deux vecteurs $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ de dimension n est le vecteur de dimension n que nous noterons $X + Y$ défini par : $X + Y = (x_i + y_i)$.*

Exemple 1 *Si* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ *alors on a :* $X + Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Proposition 1 *L'addition de vecteurs de dimension n possède les propriétés suivantes :*

- *elle est **commutative** :* $\forall X, Y$ *on a :* $X + Y = Y + X$
- *elle est **associative** :* $\forall X, Y, Z$ *on a :* $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
- *elle possède $\overrightarrow{0}$ pour **élément neutre** :* $\forall X$ *on a :* $X + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + X = X$

- *tout vecteur $X = (x_i)$ possède un* ***opposé*** *qui est noté $(-X)$ et qui est défini par : $(-X) = (-x_i)$: on a $X + (-X) = (-X) + X = \overrightarrow{0}$.*

Preuve. Ces propriétés dérivent immédiatement des propriétés de l'addition des nombres réels. ■

Remarque 2 *Puisque l'addition vectorielle est associative, nous noterons sans parenthèses la somme de trois vecteurs.*

Proposition 2 *Unicité de l'élément neutre.*
L'élement neutre neutre d'un vecteur X de dimension n est unique.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'addition vectorielle possède deux éléments neutres distincts $\overrightarrow{0_1}$ et $\overrightarrow{0_2}$.
$\forall X$ on a : $\begin{cases} \overrightarrow{0_1} + \overrightarrow{0_2} = \overrightarrow{0_2} \text{ puisque } \overrightarrow{0_1} \text{ est élément neutre} \\ \overrightarrow{0_1} + \overrightarrow{0_2} = \overrightarrow{0_1} \text{ puisque } \overrightarrow{0_2} \text{ est élément neutre} \end{cases}$. Par suite on a : $\overrightarrow{0_1} = \overrightarrow{0_2}$, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, il y a unicité de l'élément neutre. ■

Proposition 3 *Unicité de l'opposé d'un vecteur.*
Tout vecteur X de dimension n possède un vecteur opposé unique.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons que le vecteur X possède deux vevteurs opposés distincts $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$.
On a : $\begin{cases} X + \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{X_2} \text{ puisque } \overrightarrow{X_1} \text{ est un opposé de } X \\ X + \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{X_1} \text{ puisque } \overrightarrow{X_2} \text{ est un opposé de } X \end{cases}$.
Par suite on a : $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_2}$, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, il y a unicité de l'opposé. ■

Remarque 3 *Nous disons dans ce cas que l'ensemble des vecteurs de dimension n muni de l'addition possède une structure de* ***groupe commutatif*** *ou encore de* ***groupe abélien****.*

b) Le produit par un nombre réel

Définition 6 *Le* ***produit*** *du vecteur $X = (x_i)$ de dimension n* ***par le nombre réel*** *λ est noté $\lambda.X$ ou encore λX et il est défini par : $\lambda.X = (\lambda x_i)$.*

Exemple 2 *Si Si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = -5$ alors on a : $\lambda.X = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}$.*

Proposition 4 *Le produit d'un vecteur de dimension n par un nombre réel possède les propriétés suivantes :*

- *$\forall X$ on a : $1.X = X$*
- *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a : $\lambda.(\mu.X) = (\lambda\mu).X$*
- *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall X$ on a : $(\lambda + \mu).X = (\lambda.X) + (\mu.X)$*
- *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y$ on a : $\lambda(X + Y) = (\lambda.X) + (\lambda.Y)$*

Preuve. Ces propriétés dérivent immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. ■

Remarque 4 *Nous dirons que l'ensemble des vecteurs de dimension n muni de l'addition et du produit par un nombre réel possède une* ***structure d'espace vectoriel****.*

Corollaire 1 *Nous avons les conséquences suivantes :*

- *$\forall X$ on a : $0.X = \overrightarrow{0}$*
- *$\forall X$ on a : $(-1).X = -X$*

Preuve.

- Puisque : $\begin{cases} (1+0).X = X \\ (1+0).X = 1.X + 0.X = X + 0.X \end{cases}$ on en déduit que : $X + 0.X = X$, et par suite on tire : $0.X = \overrightarrow{0}$.
- Puisque : $\begin{cases} (1+(-1)).X = 0.X = \overrightarrow{0} \\ (1+(-1)).X = 1.X + (-1).X = X + (-1).X \end{cases}$ on en déduit que : $X + (-1).X = \overrightarrow{0}$ et d'après l'unicité de l'élément neutre pour l'addition vectorielle nous en déduisons que $(-1).X$ est l'élement neutre de X et par conséquent : $(-1).X = -X$.

■

c) Le produit scalaire

Définition 7 *Le produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ de dimension n est le nombre réel, noté $X.Y$ et défini par :*

$$X.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i.$$

Remarque 5 *Le produit scalaire $X.Y$ est encore noté $< X/Y >$.*

Exemple 3 *Si* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ *alors on a :* $X.Y = 1.5 + (-2).4 + 3.(-7) = -24$.

Définition 8 *Deux vecteurs X et Y de dimension n sont **orthogonaux** si $X.Y = 0$.*

Proposition 5 *Le produit scalaire de vecteurs de dimension n est :*

- ***symétrique** : $\forall X, Y$ on a : $X.Y = Y.X$;*
- ***bilinéaire** : $\forall X, Y, Z, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :* $\begin{cases} (X+Y).Z = (X.Z) + (Y.Z) \ \text{ et } X.(Y+Z) = (X.Y) + (X.Z) \\ (\lambda X).Y = \lambda (X.Y) \ \text{ et } X.(\lambda Y) = \lambda (X.Y) \end{cases}$.

Preuve. Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. ■

Définition 9 *La **norme** du vecteur X de dimension n est notée $\|X\|$ et elle est définie par :*

$$\|X\| = \sqrt{X.X}.$$

*Un vecteur de dimension n est dit **normé** si sa norme est égale à 1.*

Proposition 6 *La norme d'un vecteur de dimension n vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *on a :* $\|\lambda.X\| = |\lambda| . \|X\|$
- $\forall X, Y$ *on a :* $|X.Y| \leqslant \|X\| . \|Y\|$ *(Inégalité de Schwarz)*
- $\forall X, Y$ *on a :* $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$
- $\forall X, Y$ *on a :* $|\|X\| - \|Y\|| \leqslant \|X - Y\|$
- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = \overrightarrow{0}$.

Preuve. Les démonstrations ont été faites dans le cours d'Analyse II du premier semestre. ■

4) Dépendance et indépendance linéaire

Définition 10 *p vecteurs de dimension n : X_1, X_2, ..., X_p sont **linéairement indépendants** si :*

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0.$$

Remarque 6

- *On dit encore dans ce cas que la famille $(X_1, X_2, ..., X_p)$ est une **famille libre**;*
- *dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants ou encore que la **famille** $(X_1, X_2, ..., X_p)$ **est liée**.*

Exemple 4 *Considérons les trois vecteurs : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.*

Etudions la dépendance ou non de ces trois vecteurs.
Il faut donc résoudre l'équation : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \overrightarrow{0}$ d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3 soit encore :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ 5\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \text{ est quelconque} \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases}.$$

Les trois nombres réels ne sont pas tous nuls, par exemple on peut choisir : $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$.

Par conséquent, la famille (X_1, X_2, X_3) est liée.

Proposition 7 *Nous avons les propriétés suivantes :*

- *Si le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ figure parmi les vecteurs X_1, X_2, ..., X_p alors ceux-ci sont linéairement dépendants;*
- *des vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, soit encore :*

$$\exists i \in \{1, 2, ..., p\}\, \exists \alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_p \in \mathbb{R} \text{ tels que} : X_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \alpha_k X_k$$

- *si parmi les vecteurs X_1, X_2, ..., X_p il existe une famille de vecteurs linéairement dépendants, alors la famille X_1, X_2, ..., X_p est liée.*

Preuve. Ces résultats sont très simples à démontrer et sont laissés à titre d'exercice. ■

II) Les matrices

1) Définitions

Définition 11 *Considérons deux nombres entiers naturels non nuls n et p.*

*On appelle **matrice** de **taille** (n, p) (ou matice à n lignes et p colonnes) un tableau à n lignes et p colonnes.*

Une telle matrice sera notée : $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & a_{np} \end{pmatrix}$ ou encore $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou même $M = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

Notation 2 *L'ensemble des matrices de taille (n, p) et à coefficients réels sera noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{M}_{n,p}$.*

Exemple 5 $I = \left(a_{ij} = \dfrac{1}{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ *est une matrice de taille* $(3;3)$.

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ *est une matrice de taille* $(1;3)$.

$M_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est une matrice de taille* $(4;1)$.

$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice de taille* $(2;3)$.

Définition 12

- *Lorsque $n = p$ on dit que l'on a une* ***matrice carrée****; dans ce cas $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{M}_n$. On parlera alors de matrice d'ordre n;*
- *lorsque $n = 1$ on dit que l'on a une* ***matrice ligne****;*
- *lorsque $p = 1$ on dit que l'on a une* ***matrice colonne*** *(ou encore un vecteur de dimension n).*

Définition 13 *Deux matrices M et N sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.*

2) Matrices particulières

Nous ne reviendrons pas sur les matrices carrées ainsi que sur les matrices ligne et colonne déjà vues dans le paragraphe précédent. Nous rencontrerons très souvent d'autres matrices particulières : les matrices symétriques, les matrices triangulaires supérieures et inférieures, les matrices diagonales, les matrices orthogonales, la matrice identité et la matrice nulle.

Définition 14 *Une* ***matrice symétrique*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n pour laquelle les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\forall i,j \in \{1;2;...;n\}$ on a : $a_{ij} = a_{ji}$.*

Exemple 6 $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique d'ordre* 3.

Définition 15 *Une* ***matrice triangulaire supérieure*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\forall \left\{ \begin{array}{l} i,j \in \{1;2;...;n\} \\ \text{vérifiant : } i > j \end{array} \right.$ on a : $a_{ij} = 0$.*

Exemple 7 $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure d'ordre* 3.

Définition 16 *Une* ***matrice triangulaire inférieure*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments situés au dessus de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\forall \left\{ \begin{array}{l} i,j \in \{1;2;...;n\} \\ \text{vérifiant : } i < j \end{array} \right.$ on a : $a_{ij} = 0$.*

Exemple 8 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure d'ordre* 3.

Définition 17 *Une* ***matrice diagonale*** *est une matrice carrée dont les éléments situés en dehors de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que :*

$\forall \left\{ \begin{array}{l} i,j \in \{1;2;...;n\} \\ \text{vérifiant : } i \neq j \end{array} \right.$ on a : $a_{ij} = 0$.

Exemple 9 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale d'ordre* 3.

Définition 18 *Une* ***matrice orthogonale*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n pour laquelle les vecteurs colonnes sont normés et deux à deux orthogonaux.*

Exemple 10 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ *est une matrice orthogonale d'ordre* 3.

Définition 19 *La* ***matrice identité*** *de rang n est la matrice diagonale d'ordre n pour laquelle tous les éléments diagonaux sont égaux à* 1*. On notera I_n ou encore I s'il n'y a pas d'ambigüité possible.*

Exemple 11 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est la matrice identité d'ordre* 3.

Définition 20 *La* ***matrice nulle*** *de taille (n, p) est la matrice de taille (n, p) pour laquelle tous les éléments sont nuls*

On la notera $O_{n,p}$.

3) Opérations sur les matrices

a) L'addition de deux matrices

Définition 21 *Considérons $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$ deux matrices de même taille (n, p).*

La ***somme*** *$M + N$ sera une matrice de taille (n, p) définie par $M + N = (a_{ij} + b_{ij})$;*

Exemple 12 *Si* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *sont deux matrices de taille* $(2; 3)$ *alors on aura :* $M + N = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 8 *La somme matricielle définie précédemment possède les propriétés suivantes :*

- *elle est commutative :* $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $M + N = N + M$;
- *elle est associative :* $\forall M, N, Q \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $(M + N) + Q = M + (N + Q)$;
- $O_{n,p}$ *est élément neutre pour l'addition matricielle :* $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $M + O_{n,p} = O_{n,p} + M = M$;
- *toute matrice* $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ *possède une matrice opposée qui est notée* $(-M)$ *définie par* $(-M) = (-a_{ij})$.

Preuve. Ces propriétés proviennent immédiatement des propriétés de l'addition des nombres réels.

■

Remarque 7

- *Comme nous l'avions vu pour les vecteurs, nous pouvons affirmer qu'il y a unicité de l'élément neutre pour l'addition matricielle et unicité de l'opposé d'une matrice donnée.*
- *Nous dirons dans ce cas que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ muni de l'addition possède une structure de groupe commutatif (ou abélien).*

b) La multiplication par un nombre réel

Définition 22 *Considérons $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*Le **produit par le nombre réel** λ **de la matrice** M est la matrice de taille (n,p) que nous noterons $\lambda.M$ ou plus simplement λM définie par : $\lambda M = (\lambda.a_{ij})$.*

Exemple 13 *Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$, alors on a : $\lambda M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.*

Proposition 9 *La multiplication par un nombre réel possède les propriétés suivantes :*

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $(\lambda + \mu).M = (\lambda.M) + (\mu.M)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $\lambda.(M + N) = (\lambda.M) + (\lambda.N)$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $\lambda.(\mu M) = (\lambda\mu).M$
- $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $1.M = M$

Preuve. Ces résultats se démontrent sans difficultés et sont des conséquences des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. ■

Remarque 8 *Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ muni de l'addition et du produit par un nombre réel possède une **structure d'espace vectoriel**.*

Corollaire 2 *Nous avons les conséquences suivantes :*

- $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $0.M = O_{n,p}$
- $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $(-1).M = -M$

Preuve. Ces deux résultats se démontrent d'une façon analogue à ceux déjà rencontrés pour les vecteurs de dimension n dans le paragraphe I). ■

c) La multiplication matricielle

Dans ce paragraphe nous allons étudier la multiplication de deux matrices. Notons tout de suite que cette multiplication ne sera pas toujours possible et qu'une condition sur les tailles des matrices sera nécessaire.

Définition 23 *Considérons deux matrices : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.*

*Le **produit** de la matrice M par la matrice N sera la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}$, noté $M.N$ définie par :*

$$M.N = (c_{ik}) \text{ avec : } c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}.$$

Remarque 9 *Il faut bien remarquer que le nombre de colonnes de la matrice M doit être égal au nombre de lignes de la matrice N pour pouvoir effectuer le produit $M.N$. Si cette condition n'est pas satisfaite, le produit matriciel ne sera pas défini.*

Exemple 14 *Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;4}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4;2}$ alors on a : $M.N = \begin{pmatrix} 20 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;2}$.*

Remarquons qu'il n'aurait pas été possible d'effectuer le produit de la matrice N par la matrice M.

Proposition 10 *Lorsque les produits matriciels sont possibles, nous avons :*

- $(M_1 + M_2).N = (M_1.N) + (M_2.N)$
- $M.(N_1 + N_2) = (M.N_1) + (M.N_2)$

Preuve. Ces propriétés proviennent des propriétés de la multiplication des nombres réels. Démontrons le premier résultat à titre d'exemple.

Si $M_1 = (a_{ij})$, $M_2 = \left(a'_{ij}\right)$ et $N = (b_{jk})$ alors on a : $M_1 + M_2 = \left(a_{ij} + a'_{ij}\right)$ et par conséquent on obtient : $(M_1 + M_2).N = (c_{ik})$ où : $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} \left(a_{i\,j} + a'_{ij}\right).b_{\,jk} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i\,j}.b_{\,jk} + \sum\limits_{j=1}^{p} a'_{ij}.b_{\,jk}$.

Puisque : $\begin{cases} M_1.N = (c'_{ik}) \text{ avec : } c'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i\,j}.b_{\,jk} \\ M_2.N = (c''_{ik}) \text{ avec : } c'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a'_{i\,j}.b_{\,jk} \end{cases}$, on en déduit que : $(M_1 + M_2).N = (M_1.N) + (M_2.N)$. ■

Proposition 11 *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $\forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ on a : $\lambda.(M.N) = (\lambda.M).N = M.(\lambda.N)$*

Preuve. Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.

On a : $\lambda.(M.N) = (\lambda.c_{ik})$ où $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk}$.

De plus puisque : $\lambda.M = (d_{ij})$ où $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ on obtient : $(\lambda.M).N = (e_{ik})$ avec : $e_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} d_{ij}.b_{\,jk}$, soit encore :

$e_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} (\lambda a_{ij}).b_{\,jk} = \lambda \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk} = \lambda c_{ik}$.

On a donc prouvé que : $\lambda.(M.N) = (\lambda.M).N$

De même, puisque : $\lambda.N = (f_{jk})$ avec $f_{jk} = \lambda.b_{jk}$ on obtient :

$M.(\lambda.N) = (g_{ik})$ où $g_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.f_{\,jk} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.(\lambda.b_{jk}) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk} = \lambda c_{ik}$.

On vient donc de démontrer que : $\lambda.(M.N) = M.(\lambda.N)$ ■

Proposition 12 *$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $\forall P \in \mathcal{M}_{q,r}$ on a : $M.(N.P) = (M.N).P$*

Preuve. Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $P = (c_{kl}) \in \mathcal{M}_{q,r}$.

On a : $N.P = (d_{jl})$ avec $d_{jl} = \sum\limits_{k=1}^{q} b_{jk}.c_{kl}$ donc : $M.(N.P) = (e_{il})$ avec $e_{il} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.d_{\,jl}$, soit encore :

$e_{il} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.\left(\sum\limits_{k=1}^{q} b_{jk}.c_{kl}\right) = \sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{q} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl} = \sum\limits_{k=1}^{q}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}\right).c_{kl}$.

De plus, on a : $M.N = (f_{ik})$ où $f_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk}$.

On en déduit que : $e_{il} = \sum\limits_{k=1}^{q} f_{ik}.c_{kl}$ et par suite on obtient : $(M.N).P = (e_{il})$, ce qui prouve que : $M.(N.P) = (M.N).P$. ■

Proposition 13

- *$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ on a : $M.I_p = M$*
- *$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ on a : $I_n.M = M$*

Preuve. Ces deux propriétés sont évidentes. ■

d) La transposition

Définition 24 *Considérons une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$.*

*La **transposée** de la matrice M sera une matrice de taille (p, n) que l'on notera M^t définie par :*

$$M^t = (b_{ji}) \text{ avec : } b_{ji} = a_{ij}.$$

Exemple 15 *Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2;3}$.*

Nous avons donc : $M^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;2}$.

Remarque 10 • *C'est cette opération qui permet de définir un vecteur ligne : en effet un vecteur X de dimension n étant par définition une colonne, le vecteur ligne correspondant sera le transposé X^t.*

- *Le produit scalaire de deux vecteurs qui a été défini précédemment peut encore s'écrire sous la forme : $X.Y = X^t.Y = Y^t.X$.*
- *La transposée d'une matrice diagonale est la matrice elle-même.*
- *La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.*
- *La transposée d'une matrice nulle est une matrice nulle.*

Proposition 14 $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

- $(M+N)^t = M^t + N^t$
- $(M^t)^t = M$
- $(\lambda.M)^t = \lambda.M^t$

Preuve. Ces trois propriétés sont évidentes. ■

Proposition 15 $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ *on a :* $(M.N)^t = N^t.M^t$

Preuve. Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.
On a : $M.N = (c_{ik})$ avec : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk}$.
Par conséquent, $(M.N)^t = (d_{ki})$ où $d_{k\,i} = \sum_{j=1}^{p} a_{i\,j}.b_{\,jk}$
De plus puisque : $\left\{ \begin{array}{l} N^t = (e_{k\,j}) \text{ avec : } e_{k\,j} = b_{jk} \\ M^t = (f_{ji}) \text{ avec : } f_{ji} = a_{ij} \end{array} \right.$ on obtient : $N^t.M^t = (g_{k\,i})$ avec $g_{k\,i} = \sum_{j=1}^{p} e_{k\,j}.f_{ji}$,
soit encore : $g_{k\,i} = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}.a_{ij} = d_{k\,i}$.
On obtient donc : $N^t.M^t = (M.N)^t$. ■