Chapitre 2 - Les matrices carrées

I) Produit et puissance des matrices carrées

1) Propriétés

Nous avons défini le produit de deux matrices dans le chapitre précédent. Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser au produit de deux matrices carrées d'ordre n.
Il est clair que le produit de deux matrices d'ordre n sera une matrice d'ordre n : on dit que la multiplication matricielle est une loi interne dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1 *Nous avons les propriétés suivantes :*

- $\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.(N.P) = (M.N).P$ *(**associativité** de la multiplication matricielle) ;*
- $\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.(N+P) = (M.N) + (M.P)$ *(la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition) ;*
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.I_n = I_n.M = M$ *(la matrice unité* I_n *est **élément neutre** pour la multiplication matricielle).*

Preuve. Ces résultats ont été vus dans le chapitre précédent. ■

Remarque 1 *Il faut bien noter que **la multiplication matricielle n'est pas commutative** : cela signifie que si M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on n'a pas toujours : $M.N = N.M$.*
Par exemple, si : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, on a :*
$M.N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N.M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et on a bien :* $M.N \neq N.M$.

2) Puissances d'une matrice carrée

a) Définition

Définition 1 *Considérons une matrice M d'ordre n.*
*Soit p un nombre entier naturel; la **puissance** $p^{\text{ème}}$ de la matrice M, que l'on notera M^p sera définie par récurrence*
par : $\begin{cases} M^0 = I_n \\ M^{p+1} = M.M^p \text{ pour tout entier naturel } p \end{cases}$.

Exemple 1 *Considérons la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a : $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $M^3 = M.M^2 = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 15 \\ 34 & 11 & 17 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ...

b) Puissance de la transposée

Théorème 1 $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$ *on a :* $(M^t)^p = (M^p)^t$.

Preuve. Nous allons démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p.
Initilalisation : on a : $(M^t)^0 = I_n = I_n^t = \left(M^0\right)^t$, la propriété est donc bien vraie au rang 0.
Hérédité : on suppose que : $(M^t)^p = (M^p)^t$ pour p fixé quelconque et on va montrer que : $(M^t)^{p+1} = \left(M^{p+1}\right)^t$.
$(M^t)^{p+1} = (M^t)(M^t)^p = (M^t).(M^p)^t = (M^p.M)^t = \left(M^{p+1}\right)^t$.
Par conséquent la propriété est héréditaire.
Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $(M^t)^p = (M^p)^t$. ■

c) Propriété

Proposition 2 *$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $(\lambda M)^p = \lambda^p.M^p$.*

Preuve. Nous allons démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p.
Initilalisation : on a : $(\lambda M)^0 = I_n = 1.I_n = \lambda^0 M^0$, la propriété est donc bien vraie au rang 0.
Hérédité : on suppose que : $(\lambda M)^p = \lambda^p.M^p$ pour p fixé quelconque et on va montrer que : $(\lambda M)^{p+1} = \lambda^{p+1}.M^{p+1}$.
$(\lambda M)^{p+1} = (\lambda M)(\lambda M)^p = (\lambda M).(\lambda^p.M^p) = (\lambda.\lambda^p)(M.M^p) = \lambda^{p+1}.M^{p+1}$.
Par conséquent la propriété est héréditaire.
Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $(\lambda M)^p = \lambda^p.M^p$. ■

3) La formule du binôme de Newton

Théorème 2 *Considérons deux matrices M et N d'ordre n **qui commutent**, c'est à dire qu'elles vérifient : $M.N = N.M$.*
Alors : $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $(M+N)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}$.

Preuve. Nous allons démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p.
Initilalisation : on a : $\begin{cases} (M+N)^0 = I_n \\ \sum_{k=0}^{0} C_0^k M^k.N^{0-k} = C_0^0 M^0.N^0 = 1.I_n.I_n = I_n \end{cases}$.

On a donc bien : $(M+N)^0 = \sum_{k=0}^{0} C_0^k M^k.N^{0-k}$, la propriété est donc bien vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que : $(M+N)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}$ pour p fixé quelconque.

On va montrer que : $(M+N)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k M^k.N^{p+1-k}$.

$(M+N)^{p+1} = (M+N)(M+N)^p = (M+N).\sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}$

soit : $(M+N)^{p+1} = M.\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}\right) + N.\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}\right)$
ce qui donne, puisque M et N commutent :
$(M+N)^{p+1} = \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k M^{k+1}.N^{p-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p+1-k}\right)$
soit : $(M+N)^{p+1} = \left(C_p^p M^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k M^{k+1}.N^{p-k}\right) + \left(C_p^0 N^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} C_p^k M^k.N^{p+1-k}\right)$.
On a donc :
$(M+N)^{p+1} = M^{p+1} + \left(\sum_{k'=k+1=1}^{p} C_p^{k'-1} M^{k'}.N^{p-(k'-1)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} C_p^k M^k.N^{p+1-k}\right) + N^{p+1}$
soit : $(M+N)^{p+1} = M^{p+1} + \left(\sum_{k=1}^{p} (C_p^{k-1} + C_p^k) M^k.N^{p+1-k}\right) + N^{p+1}$.
Puisque : $C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$ et que : $C_{p+1}^0 = C_{p+1}^{p+1} = 1$ on en déduit que :
$(M+N)^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} M^{p+1} + \left(\sum_{k=1}^{p} C_{p+1}^k M^k.N^{p+1-k}\right) + C_{p+1}^0 N^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k M^k.N^{p+1-k}$.
La propriété est donc bien héréditaire.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $(M+N)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k.N^{p-k}$. ■

Remarque 2 *Il faut noter qu'il est **obligatoire** que les matrices M et N commutent pour pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton.*

Exemple 2 *On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On va calculer M^p *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

Remarquons tout d'abord que : $M = N + I_3$ *en posant :* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons ensuite les puissances successives de la matrice N.

On a : $N^o = I_3$, $N^1 = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N^3 = O_3$.

Par suite on aura : $N^k = O_3$ *pour tout entier* $k \geqslant 3$.

Puisque : $I_3.N = N.I_3 = N$ *on peut donc dire que les matrices* N *et* I_3 *commutent et nous pourrons donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer :* $M^p = (N + I_3)^p$.

On a donc, compte tenu des résultats obtenus sur les puissances successives de la matrice N *:*

$M^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k N^k.I_3^{p-k} = C_p^0 N^0 + C_p^1 N + C_p^2 N^2 = C_p^0 I_3 + C_p^1 N + C_p^2 N^2$, $\forall n \geqslant 2$.

De plus, comme : $\begin{cases} C_p^0 = 1 \\ C_p^1 = p \\ C_p^2 = \dfrac{p(p-1)}{2} \end{cases}$ *, on en déduit que :*$M^p = I_3 + pN + \dfrac{p(p-1)}{2} N^2$,

soit : $M^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{p(p-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ce qui donne :*

$\forall n \geqslant 2$ *on a :* $M^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p + \dfrac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p & \dfrac{p(p+1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, on a : $M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1(1+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *la formule trouvée*

précédemment reste valable pour $n = 1$ *et puique :* $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{0(0+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on peut affirmer que la formule est encore valable pour $n = 0$.

En conclusion : $\forall n \geqslant 0$ *on a :*$M^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \dfrac{p(p+1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II) Les matrices carrées inversibles

1) Définitions

Définition 2 *Considérons une matrice carrée* M *d'ordre* n.

On appelle ***matrice inverse à gauche*** *de la matrice* M, *toute matrice carrée* G *d'ordre* n *telle que* $G.M = I_n$.

On appelle ***matrice inverse à droite*** *de la matrice* M, *toute matrice carrée* D *d'ordre* n *telle que* $M.D = I_n$.

Proposition 3 *Si la matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *admet à la fois une matrice inverse à gauche* G *et une matrice inverse à droite* D, *alors ces deux matrices sont égales et uniques.*

Preuve. On a donc : $G.M = M.D = I_n$ par définition des matrices inverses à gauche et à droite.
De plus on a : $G = G.I_n = G.(M.D) = (G.M).D = I_n.D = D$, par conséquent, les matrices G et D sont égales.

Montrons maintenant l'unicité.
Pour cela nous utiliserons un raisonnement par l'absurde.
Supposons donc qu'il existe deux matrices inverses à gauche distinctes G et G' pour la matrice M.
On a donc : $G.M = G'.M = I_n$.
De plus, on aura : $G' = G'.I_n = G'(M.D) = (G'.M).D = I_n.D = D = G$, ce qui aboutit à une contradiction puisque les deux matrices G et G' ont été supposées distinctes.
Par conséquent, l'hypothèse faite est fausse, d'où l'unicité de la matrice G et donc celle de D. ■

Proposition 4 *Considérons une matrice carrée M d'ordre n.*
Si la matrice M admet une matrice inverse à gauche alors elle admettra une matrice inverse à droite.
De même, si la matrice M admet une matrice inverse à droite alors elle admettra une matrice inverse à gauche.

Preuve. Ce résultat est admis.

Définition 3 *Considérons une matrice carrée M d'ordre n.*
*On dira que la matrice M est **inversible** si elle possède une matrice inverse à gauche ou une matrice inverse à droite.*

■

Notation 1 *Dans ce cas, la matrice inverse à gauche (ou encore la matrice inverse à droite) sera appelée la **matrice inverse** de la matrice M et on la notera : M^{-1}.*

2) Exemples

Exemple 3 *La matrice identité d'ordre n est inversible et sa matrice inverse est $I_n^{-1} = I_n$; en effet, nous avons : $I_n.I_n = I_n$.*

Exemple 4 *Considérons les matrices d'ordre 2 : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.*
On a : $M.N = I_2$ et par conséquent, on en déduit que la matrice M est inversible et que sa matrice inverse est $M^{-1} = N$.

3) Recherche pratique de la matrice inverse

a) Méthode Considérons une matrice M d'ordre n.
Pour déterminer si la matrice M est inversible, nous chercherons à résoudre le système $Y = M.X$ dans lequel les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ joueront respectivement les rôles d'inconnue et de paramètre :

- si nous trouvons un seul vecteur solution X à ce système nous pourrons en déduire que la matrice M est inversible et que la matrice inverse M^{-1} est définie par la relation : $X = M^{-1}.Y$ puisque : $Y = M.X \iff M^{-1}.Y = M^{-1}.(M.X) = (M^{-1}.M).X = I_n.X = X$.
- si nous ne trouvons pas de solution ou encore une infinité de solutions au système, nous en déduirons que la matrice M n'est pas inversible.

b) Exemple Considérons la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Etudions l'inversiblité de M.
Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On a : $Y = M.X \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

Cela nous donne donc le système linéaire : $(S) : \begin{cases} y_1 = -x_2 \\ y_2 = x_1 - x_3 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}$.

On a : $(S) \iff \begin{cases} x_2 = -y_1 \\ x_1 - x_3 = y_2 \\ x_3 = y_1 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = -y_1 \\ x_3 = y_1 + y_3 \end{cases}$.

Nous avons donc trouvé une seule solution au système, par conséquent, la matrice M est inversible.
Pour déterminer M^{-1} il ne nous reste plus qu'à écrire le dernier système sous forme matricielle.
Nous obtenons :
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, par conséquent, nous avons :
$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Propriétés des matrices carrées inversibles

a) Transposée d'une matrice inversible

Théorème 3 *Considérons une matrice carrée M d'ordre n.*
Si la matrice M est inversible, alors sa matrice transposée M^t est inversible et on a :
$(M^t)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^t$.

Preuve. Puisque : $\left(M^{-1}.M\right) = I_n$ on en déduit que : $\left(M^{-1}.M\right)^t = I_n^t = I_n$,
soit encore : $M^t.\left(M^{-1}\right)^t = I_n$.
Par conséquent, la matrice M^t sera inversible à droite, donc sera inversible et sa matrice inverse sera : $(M^t)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^t$. ■

b) Produit de deux matrices inversibles

Théorème 4 *Considérons deux matrice M et N d'ordre n.*
Si les matrices M et N sont inversibles, d'inverses respectifs M^{-1} et N^{-1} alors leur matrice produit $M.N$ sera inversible et on aura : $(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$.

Preuve. On a : $\left(N^{-1}.M^{-1}\right).(M.N) = N^{-1}.\left(M^{-1}.M\right).N = N^{-1}.I_n.N = N^{-1}.N = I_n$.
Par conséquent, la matrice produit $M.N$ est inversible à gauche, donc sera inversible et on aura :
$(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$. ■

c) Autres propriétés

Proposition 5 *Si M est une matrice carrée d'ordre n inversible, alors :*
$\forall p \in \mathbb{N}$, la matrice M^p est inversible et on a : $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.

Preuve. Démontrons ce résultat par récurrence sur p.
Initialisation : On a : $M^0 = I_n$ et par suite la matrice M^0 sera inversible d'inverse :
$\left(M^0\right)^{-1} = I_n^{-1} = I_n = \left(M^{-1}\right)^0$.
La propriété est donc bien vérifiée au rand 0.
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel p fixé quelconque la matrice M^p est inversible et que son inverse est $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.
Nous allons montrer que la matrice M^{p+1} est inversible et que son inverse est $\left(M^{-1}\right)^{p+1}$.
Puisque : $M^{p+1} = M.M^p$ et compte tenu que M et M^p sont inversibles, on déduit du théorème du paragraphe précédent que la matrice M^{p+1} sera inversible (produit de deux matrices inversibles).
De plus, on aura : $\left(M^{p+1}\right)^{-1} = (M.M^p)^{-1} = (M^p)^{-1}.M^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p.M^{-1} = \left(M^{-1}\right)^{p+1}$.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$, la matrice M^p est inversible et on a : $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$. ■

Définition 4 *Considérons une matrice M d'ordre n inversible et un entier naturel p.*
Nous définirons la puissance négative de la matrice M par : $M^{-p} = (M^p)^{-1}$.

Remarque 3 *Compte tenu de la propriété précédente nous aurons :* $M^{-p} = (M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.

Proposition 6 *Si M est une matrice carrée d'ordre n inversible alors :*
$\forall p, q \in \mathbb{Z}$ *on a :* $M^p.M^q = M^{p+q}$.

Preuve. Quatre cas sont à envisager :

- si $p, q \in \mathbb{N}$: cette propriété provient de la définition de la puissance positive d'une matrice.
- si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}_-$: on pose : $q' = -q \in \mathbb{N}$.

  On a donc : $M^p.M^q = M^p.M^q.I_n = M^p.M^q.(M^{q'}.(M^{q'})^{-1}) = M^p.\left(M^{-q'}.M^{q'}\right).M^{-q'}$

  soit encore : $M^p.M^q = M^p.\left(\left(M^{q'}\right)^{-1}.M^{q'}\right).M^{-q'} = M^p.I_n.M^{-q'} = M^p.M^{-q'}$
- ce qui donne : $M^p.M^q = M^{p+(-q')} = M^{p+q}$.
- Les deux cas restants : $(p \in \mathbb{Z}_-$ et $q \in \mathbb{N})$ et $(p \in \mathbb{Z}_-$ et $q \in \mathbb{Z}_-)$ se traiteront de la même façon que le cas précédent.

■