Chapitre 3 - Les déterminants

Dans tout ce chapitre, les matrices utilisées seront exclusivement des matrices carrées d'ordre n.

I) Définition et premières propriétés

1) Théorème - Définition

Théorème 1 *Il existe une unique application, appelée* ***déteminant*** *que nous noterons* det*, qui à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on peut écrire : $A = (C_1, C_2, ..., C_n)$ où $C_1, C_2, ..., C_n$ désignent les colonnes de la matrice A, associe le nombre réel, noté $\det(A)$, vérifiant :*

1. $\begin{cases} \forall j \in \{1,...,n\} \text{ on a :} \det(C_1,...,C_j + C'_j,...,C_n) = \det(C_1,...,C_j,...,C_n) + \det(C_1,...,C'_j,...,C_n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall j \in \{1,...,n\} \text{ on a :} \det(C_1,...,\lambda C_j,...,C_n) = \lambda \det(C_1,...,C_j,...,C_n) \end{cases}$
2. $\forall j_1,\ j_2 \in \{1,...,n\}$ *on a :* $\det(C_1,...,C_{j_1},...,C_{j_2},...,C_n) = -\det(C_1,...,C_{j_2},...,C_{j_1},...,C_n)$
3. $\det I_n = 1$ *où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.*

Preuve. Ce théorème est admis. ■

Remarque 1

- *Pour le premier point, on dit que le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne (les autres vecteurs colonnes étant fixés), on dit alors que le déterminant est une forme n-linéaire;*
- *Le second point signifie que le déterminant est une forme alternée.*
- *Si la matrice $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, nous déduisons du premier et du troisième point du théorème précédent que :* $\det(A) = a$.

Notation 1 *On notera encore le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ *sous la forme :* $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

2) Premières propriétés du déterminant

Proposition 1 *Si une matrice carrée d'ordre n possède un vecteur colonne nul, alors son déterminant est nul.*

Preuve. Ce résultat est immédiat compte tenu du premier point du théorème donné dans le paragraphe précédent. ■

Proposition 2 *Si une matrice carrée d'ordre n possède deux vecteurs colonnes identiques, alors son déterminant est nul.*

Preuve. Ce résultat est immédiat compte tenu du second point du théorème du paragraphe précédent. ■

Proposition 3 *Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Si A' désigne la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaires des autres colonnes de la matrice A, alors on a : $\det(A') = \det(A)$.

Preuve. Posons : $A = (C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n)$ et $A' = (C_1, C_2, ...C_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j, ..., C_n)$.

Nous povons dire, compte tenu de la linéarité du déterminant que l'on a :

$\det(A') = \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j \det(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n)$

soit encore : $\det(A') = \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) = \det(A)$

puisque dans chacune des matrices $(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n)$ il y aura toujours deux colonnes identiques et donc en vertu de la proposition précédente, nous en déduirons que : $\det(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n) = 0$.

■

Corollaire 1 *Si une colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice A, alors on a :* $\det(A) = 0$.

Preuve. Supposons que : $A = (C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n)$ et que : $C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j$.

On a donc d'après la propriété précédente :

$\det(A) = \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) = \det(C_1, C_2, ..., \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j, ..., C_n)$

soit : $\det(A) = \det(C_1, C_2, ..., \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (-\lambda_j C_j), ..., C_n) = \det(C_1, C_2, ..., \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (\lambda_j - \lambda j)\, C_j, ..., C_n)$

ce qui donne : $\det(A) = \det(C_1, C_2, ..., \overrightarrow{0}, ..., C_n) = 0$. ■

II) Cofacteurs - Développement du déterminant

1) Cofacteurs

Définition 1 *Considérons la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

*On appelle **mineur** de l'élément a_{ij} de la matrice A le déterminant :* $\det(A^{(i,j)})$ *où $A^{(i,j)}$ designe la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en lui supprimant la ligne i et la colonne j.*

*On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} de la matrice A le nombre réel* $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$.

Remarque 2 *Le cofacteur d'un élément de la matrice A est donc égal au mineur correspondant affecté d'un signe $+$ ou d'un signe $-$ selon que la somme $i + j$ est paire ou impaire, ce qui, graphiquement, correspond à la situation suivante :* $\begin{bmatrix} + & - & + & - & ... \\ - & + & - & + & ... \\ + & - & + & - & ... \\ - & + & - & + & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$.

Exemple 1 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Par exemple, le cofacteur de l'élément a_{32} est : $c_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Développement du déterminant

Théorème 2 *Si on a :* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *alors :*

$$\forall i,\ j \in \{1, ..., n\} \text{ on a : } \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.c_{ij} \text{ ou encore : } \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.c_{ij}.$$

Preuve. Ce théorème est admis. ■

Remarque 3 *Nous dirons que l'on a développé le déterminant de la matrice A selon la colonne j dans le premier cas et selon la ligne i dans le second cas.*

Remarque 4 *Nous avons, grâce à ce théorème, une méthode qui nous permet de calculer un déterminant d'ordre n.*
En effet, compte tenu du théorème précédent, nous pouvons dire que le calcul se ramènera au calcul de n déterminants d'ordre $(n-1)$ qui pour chacun d'entre eux se ramènera au calcul de $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n-2)$, ...
Néanmoins, il sera très judicieux d'utiliser les propriétés vues sur les déterminants afin d'arriver au calcul d'une matrice comportant un maximum de zéros avant de se lancer à corps perdu dans les calculs... Enfin, n'oubliez pas que si deux colonnes sont identiques, ou encore proportionnelles, le déterminant sera nul.

3) Exemples

Exemple 2 *Calculons le déterminant :* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.
Développons par rapport à la première colonne, nous obtenons :
$\Delta = 2.\,|-2| - 3.\,|-1| = 2.\,(-2) - 3.\,(-1) = -4 + 3 = -1.$

Remarque 5 *Nous avons :*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

En effet nous avons : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.\,|d| - c.\,|b| = ad - cb.$

Exemple 3 *Calculons le déterminant :* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.
<u>Méthode 1</u> : Développons par rapport à la première colonne :
$\Delta = 1.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.\,(-1+4) - 3.\,(2+2) + 3.\,(4+1) = 6.$
<u>Méthode 2</u> : Utilisation des propriétés du déterminant :
on a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \\ 3 & -8 & -2 \end{vmatrix}$ *(nous avons remplacé la seconde colonne C_2 par $C_2 - 2C_1$ et la troisième colonne C_3 par $C_3 - C_1$ en appelant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes du déterminant).*
Il ne nous reste plus qu'à développer par rapport à la première ligne.
Nous obtenons : $\Delta = 1.\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 1.\,(14-8) = 6.$

Remarque 6 *Nous avons :*

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = (ab'c'' + a''bc' + a'b''c) - (a''b'c + a'bc'' + ab''c')\,.$$

*Cette règle est appelée la **règle de Sarrus**.*
En effet, développons le déterminant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix},$$

soit encore : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\,(b'c'' - b''c') - b\,(a'c'' - a''c') + c\,(a'b'' - a''b');$

il ne reste plus ensuite qu'à développer puis regrouper les termes pour obtenir le résultat annoncé.

Exemple 4 *Etudions un cas particulier :* ***la matrice triangulaire supérieure****.*

Calculons donc le déterminant de la matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Développons $\det(A)$ *par rapport à la première colonne, nous obtenons :*

$\det(A) = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$*, développons ensuite le nouveau déterminant d'ordre* $(n-1)$ *par rapport à sa première colonne. Nous obtenons :* $\det(A) = a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & ... & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & ... & a_{4n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

De façon immédiate nous obtiendrons : $\det(A) = a_{11}.a_{22}....a_{nn}$.

Conclusion : Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des termes situés sur sa diagonale principale.

Remarque 7 *D'une façon analogue (en développant par rapport à la première ligne) nous prouverions que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des termes situés sur sa diagonale principale.*

4) Autres propriétés du déterminant

Théorème 3 *On a les résultats suivants:*

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\det(A^t) = \det(A)$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\det(\lambda A) = \lambda^n.\det(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

Preuve.

- Puisque nous avons vu dans le théorème du 2) que nous pouvions aussi bien calculer le déterminant de la matrice A en faisant le développement par rapport à sa première ligne que par rapport à sa première colonne, nous pouvons en déduire que A et A^t auront le même déterminant.
- Si on a : $A = (C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n)$ alors on en déduit que : $\lambda A = (\lambda C_1, \lambda C_2, ..., \lambda C_k, ..., \lambda C_n)$.
  En utilisant la n linéarité du déterminant, nous en déduisons que :
  $\det(\lambda A) = \lambda.\lambda...\lambda \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) = \lambda^n \det(A)$.
- Le troisième résultat du théorème sera admis.

■

Remarque 8 *Il faut remarquer que :* $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Par exemple, prenons : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons : $\det(A) = 7$, $\det(B) = -5$, $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\det(A+B) = 4 \neq \det(A) + \det(B)$.

III) Cas des matrices carrées inversibles

Théorème 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et désignons par C la matrice des cofacteurs de la matrice A.*
On a : $A.C^t = C^t.A = \det(A).I_n$.

Preuve. On a : $C = (c_{ij})$ avec : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$; par conséquent, $C^t = \left(c'_{ij}\right)$ avec : $c'_{ij} = c_{ji}$.

Posons : $B = A.C^t$, on a donc : $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ avec : $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{jk}$.

<u>1^{er} cas</u> : Si $i = j$

Alors on a : $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{ik} = \det(A)$ d'après le théorème II)2).

<u>$2^{ème}$ cas</u> : Si $i \neq j$

On a dans ce cas : $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - a_{jk}).c_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}.c_{jk}$.

Soit encore : $b_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik}).c_{jk} + \det(A)$.

Or : $\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik}).c_{jk}$ représente le développement par rapport à la ligne j du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $j^{àme}$ ligne de la matrice A par la différence entre la $j^{àme}$ ligne et la $i^{ème}$ ligne de la matrice A et on sait d'après les propriétés du déterminant qu'il sera identique à celui de la matrice A.

Par conséquent on aura : $\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik}).c_{jk} = \det(A)$ et par suite : $b_{ij} = 0$.

<u>Conclusion</u> :

On a donc montré que : $b_{ij} = \begin{cases} \det(A) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, et par suite on en déduit que : $B = A.C^t = \det(A).I_n$.

On démontrerait d'une façon analogue que : $C^t.A = I_n$. ■

Remarque 9 *La matrice C^t est appelée la* ***matrice adjointe*** *de la matrice A.*

Corollaire 2 *La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

où C désignera la matrice des cofacteurs de la matrice A.

Preuve.

- Supposons que la matrice A soit inversible. dans ce cas, nous avons : $A.A^{-1} = I_n$.

  Par conséquent on a : $\det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$; on en déduit donc que : $\det(A) \neq 0$.

  De plus, d'après le théorème précédent, nous savons que : $A.C^t = C^t.A = \det(A).I_n$.

  Puisque $\det(A) \neq 0$, $A.\left(\frac{1}{\det(A)} C^t\right) = \left(\frac{1}{\det(A)} C^t\right).A = I_n$, nous en déduisons donc d'après l'unicité de la matrice inverse que : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$.

- Réciproquement, supposons que $\det(A) \neq 0$.

  D'après le théorème précédent, nous savons que : $A.C^t = C^t.A = \det(A).I_n$.

  Puisque $\det(A) \neq 0$: $A.\left(\frac{1}{\det(A)} C^t\right) = \left(\frac{1}{\det(A)} C^t\right).A = I_n$, nous en déduisons donc que la matrice A est inversible et que sa matrice inverse est égale à $\frac{1}{\det(A)} C^t$.

■

Exemple 5 *Reprenons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *étudiée au chapitre 2.*

Calculons son déterminant en développant suivant la première colonne :

$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *par conséquent A est inversible.*

Déterminons maintenant A^{-1}.

Nous avons donc : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} C^t$ *d'après le corollaire vu précédemment.*

Nous avons : $C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

par suite, nous avons : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} C^t = 1.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.