Chapitre 4 - Les systèmes d'équations linéaires

I) Le rang d'une matrice

Contrairement au déterminant, la notion de rang d'une matrice se définit pour des matrices quelconques et donc pas nécessairement carrées.

1) Définition

Définition 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.*
*On appelle **rang** de la matrice A et on note $rg(A)$, le nombre de colonnes de la matrice A qui sont linéairement indépendantes.*

Exemple 1 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et appelons C_i la $i^{ème}$ colonne de la matrice A.*
Il est clair que les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et par conséquent nous pouvons dire que $rg(A) \geqslant 2$.
De plus, nous remarquons que : $C_3 = C_1 + C_2$ et $C_4 = 2C_1 + C_2$.
Par conséquent, nous avons : $rg(A) = 2$.

Remarque 1 *Nous pouvons étendre la définition précédente au cas où la matrice A est nulle : dans ce cas nous dirons que son rang est nul. Remarquons que la matrice nulle est la seule matrice de rang nul.*

Définition 2 *On appelle **sous-déterminant** d'ordre m d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le déterminant de toute matrice carrée d'ordre m obtenue en supprimant $(n-m)$ lignes et $(p-m)$ colonnes dans la matrice A.*

Exemple 2 *Dans la matrice A de l'exemple précédent, un sous-déterminant d'ordre 2 sera par exemple celui obtenu en supprimant la première ligne et les colonnes C_3 et C_4 :* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

2) Propriétés

Proposition 1 *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, non nulle, est égal au nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de la matrice A.*

Preuve. Ce résultat est admis. ■

Exemple 3 *Reprenons l'exemple de la matrice du 1) :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Il est clair que les deux premières lignes sont linéairement indépendantes et puisque :
$L_3 = \dfrac{1}{2}L_1 - \dfrac{3}{2}L_2$*, nous en déduisons donc bien que $rg(A) = 2$.*

Proposition 2 *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, non nulle, est égal à l'ordre le plus élevé des sous-déterminants non nuls de la matrice A.*

Preuve. Ce résultat est admis. ■

Exemple 4 *Reprenons toujours le même exemple.*
Nous avons : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$*, par conséquent : $rg(A) \geqslant 2$.*
De plus, tous les sous-déterminants d'ordre 3 sont nuls :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *(sa troisième colonne est égale à la somme des deux premières);*
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ *(car : $C_3 = 2_1 + C_2$);*
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ *(sa troisième colonne est égale à la somme des deux autres);*
$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ *(car : $C_3 = -C_1 + 2C_2$).*
Par suite on en déduit que $rg(A) < 3$, donc : $rg(A) = 2$.

Proposition 3 *Si la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors on a : $rg(A) \leqslant \min(n,p)$.*

Preuve. Ce résultat est immédiat, compte tenu de la caractérisation du rang à l'aide des sous-déterminants. ■

Proposition 4 *Un ensemble de n vecteurs constitue une famille de vecteurs linéairement indépendants si et seulement si la matrice qu'ils constituent est de rang n.*

Preuve. Ce résultat est immédiat. ■

Proposition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.*
Si on supprime un certain nombre de lignes et de colonnes de la matrice A, le rang de la matrice ainsi obtenue est au plus égal à $rg(A)$.

Preuve. Comme tout sous-déterminant de la matrice ainsi obtenue est un sous-déterminant de la matrice A, nous en déduisons que son rang sera inférieur ou égal à celui de la matrice A. ■

Proposition 6 *Le rang d'une matrice A ne change pas si :*
- on permute deux colonnes de A;
- on multiplie une colonne de la matrice A par un nombre réel non nul;
- on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes;
- on enlève à la matrice A une colonne qui est combinaison linéaire des autres.

Preuve. Ces résultats proviennent des résultats du chapitre 1, relatifs aux familles libres et liées de vecteurs. ■

Remarque 2 *On peut énoncer un résultat similaire en renplaçant les colonnes de la matrice par les lignes de la matrice.*
De ce fait, nous avons : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $rg(A^t) = rg(A)$.

Exemple 5 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons tout d'abord que $C_1 = C_5$ et que $C_2 = C_4$, donc: $rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Nous voyons facilement que les trois colonnes restantes sont linéairement indépendantes, par conséquent : $rg(A) = 3$.

Proposition 7
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifie : $\det(A) \neq 0$ et si $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors on a : $rg(AB) = rg(B)$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifie : $\det(A) \neq 0$ et si $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ alors on a : $rg(CA) = rg(C)$.

Preuve. Ces deux résultats seront admis. ■

Proposition 8 *Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses éléments diagonaux non nuls.*

Preuve. Ce résultat est immédiat. ■

Corollaire 1 *On a :* $rg(I_n) = n$.
De plus, si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale alors :* $rg(A) = n$.

Preuve. Le premier des deux résultats est évident, compte tenu de la proposition précédente.
On a : $A^t A = I_n$. On en déduit donc que : $\det(A^t A) = \det(I_n) = 1$ et par suite $\det(A) \neq 0$ ce qui nous permet de dire que $rg(A) = n$. ■

3) Méthode de calcul du rang

Théorème 1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *Nous avons le résultat suivant :*
$rg(A) = r \Leftrightarrow$ *la matrice* A *contient un sous-déterminant* Δ *non nul, d'ordre* r *tel que tous les sous-déterminants d'ordre* $(r+1)$ *qui contiennent* Δ *comme sous-déterminant sont nuls.*

Preuve. La condition nécessaire est évidente : en effet, si $rg(A) = r$ alors tous les sous-déterminants d'ordre $m > r$ seront nuls et en particuliers cela sera vérifié pour tous les sous-déterminants d'ordre $(r+1)$ qui contiennent Δ comme sous-déterminant.
Réciproquement, on suppose que tous les sous-déterminants d'ordre $(r+1)$ qui contiennent Δ comme sous-déterminant sont nuls et démontrons qu'alors $rg(A) = r$.
Puisque $\Delta \neq 0$, on peut affirmer que $rg(A) \geqslant r$.
Nous allons montrer que $rg(A) \leqslant r$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
Supposons donc que : $rg(A) > r$
Dans ce cas il existe dans la matrice A une colonne qui n'est pas combinaison linéaire des colonnes constituant le déterminant Δ. Cette colonne constitue donc avec celles qui forment le déterminant Δ une matrice M de taille $(n, r+1)$ de rang $(r+1)$.
Par un raisonnement analogue, dans cette matrice M ainsi constituée, on peut trouver une ligne qui sera linéairement indépendante des lignes constituant Δ. On pourra dons construire une matrice qui sera d'ordre $(r+1)$ bordant Δ et qui aura un déterminant non nul.
Par conséquent, dans la matrice A il existera un sous-déterminant d'ordre $(r+1)$ non nul.
Le rang de la matrice A sera de ce fait supérieur ou égal à $r+1$.
Cela est impossible puisque par hypothèse, tous les sous-déterminants d'ordre $(r+1)$ qui contiennent Δ comme sous-déterminant sont nuls.
Par conséquent, la supposition faite : $rg(A) > r$ est fausse et on en déduit donc que $rg(A) \leqslant r$.
Par suite, on a donc : $\begin{cases} rg(A) \geqslant r \\ rg(A) \leqslant r \end{cases}$, donc : $rg(A) = r$. ■

Remarque 3 *Nous avons grâce à ce théorème une méthode pratique qui nous permet de limiter le nombre de déterminants à calculer afin de trouver le rang d'une matrice.*

Exemple 6 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $rg(A) = 2$.
Remarquons que : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.
Il faut donc calculer les six déterminants bordant Δ *et montrer qu'ils sont tous nuls :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{et} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II) Les systèmes d'équations linéaires

1) Définitions

Définition 3 *On appelle **système linéaire** de m équations linéaires à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n l'ensemble des m relations :*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = bm \end{array} \right. .$$

*Les nombres a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n)$ seront appelés les **coefficients** du système linéaire.*
*Les nombres b_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ seront appelés les **seconds membres** du système linéaire.*
*Les nombres x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ seront appelés les **inconnues** du système linéaire.*

Remarque 4 *Remarquons que le système précédent peut encore s'écrire : $AX = B$ en posant :*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_b \end{pmatrix}$.
Notons encore que le système pourrait s'écrire : $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n$ où C_1, C_2, ..., C_n désignent les colonnes de la matrice A.

Exemple 7 *Le système :* $\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{array} \right.$ *peut s'écrire $AX = B$ en posant :*
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 4 *On appelle **solution du système** linéaire un $n-$uple de nombres réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vérifiant simultanément les m équations du système.*
*On dit d'un système linéaire qu'il est **résoluble**, ou encore que **ses équations sont compatibles**, lorsqu'il admet au moins une solution.*
*On dit d'un système linéaire qu'il est **impossible**, ou encore que **ses équations sont incompatibles**, lorsqu'il n'admet pas de solution.*
*On qualifie un système résoluble de **déterminé** lorsqu'il n'admet qu'une seule solution.*
*On dit qu'un système linéaire est **indéterminé** lorqu'il admet plusieurs solutions.*
*On dit d'un système linéaire qu'il est **redondant** lorsque certaines de ses équations sont des combinaisons linéaires des autres; dans ce cas, ces équations ne sont pas utilisées pour résoudre le système linéaire.*

Définition 5 *Un système linéaire est **homogène** lorsque les seconds membres sont tous nuls, soit lorsque $B = \overrightarrow{0}$; le système homogène associé est alors : $AX = \overrightarrow{0}$.*

2) Propriétés

Théorème 2 *Si X_0 est une solution du système linéaire $AX = B$, alors l'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des $X_0 + X\ '$ où $X\ '$ est une solution du système homogène associé.*

Preuve. Considérons X_0 une solution du système $AX = B$ et $X\ '$ une solution du système $AX = \overrightarrow{0}$.
On a donc : $AX_0 = B$ et $AX\ ' = \overrightarrow{0}$. Posons : $Y = X_0 + X\ '$.
Nous avons : $A(X_0 + X\ ') = AX_0 + AX\ ' = B$. Par conséquent, Y sera une solution du système linéaire.
Réciproquement, si X_1 et X_2 sont deux solutions du système linéaire, nous avons : $AX_1 = AX_2 = B$.
Par suite, $A(X_1 - X_2) = \overrightarrow{0}$, donc $X_1 - X_2$ est solution du système homogène associé.
En conclusion : nous pouvons donc dire que toutes les solutions du système linéaire seront de la forme $X_0 + X\ '$ où X_0 est une solution du système linéaire et $X\ '$ est une solution du système homogène associé. ■

Définition 6 *Considérons le système linéaire : $AX = B$ donné dans le paragraphe II)1).*
*On appelle **matrice augmentée** et on la motera : $(A; B)$, la matrice de type $(m, n + 1)$ obtenue en ajoutant la matrice colonne B à droite de la matrice A :*

$$(A; B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_n \end{array} \right).$$

Proposition 9
Le système (S) est résoluble si et seulement si $rg(A) = rg(A; B)$.
Le système (S) est impossible si et seulement si $rg(A) < rg(A; B)$.

Preuve. Si le système est résoluble, alors il existe un $n - uple$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vérifiant le système (S).
On aura donc : $B = x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n$. Le vecteur colonne B sera donc combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A. Par conséquent, nous aurons : $rg(A) = rg(A; B)$.
Si le système est impossible, alors il n'existera pas de $n - uple$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vérifiant le système (S). Le vecteur colonne B ne sera donc pas combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A. Par conséquent, nous aurons : $rg(A; B) > rg(A)$.
Réciproquement : remarquons que l'on a toujours $rg(A) \leqslant rg(A; B)$.
Si $rg(A) = rg(A; B)$: alors les colonnes donnant le rang de la matrice augmentée sont les colonnes de la matrice A.
Par conséquent, le vecteur B sera une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A. Il existera donc un $n - uple$ de nombres réels $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tel que : $B = \alpha_1C_1 + \alpha_2C_2 + ... + \alpha_nC_n$.
Ce $n - uple$ sera donc une solution du système linéaire (S).
Si $rg(A) < rg(A; B)$: on peut donc dire que le vecteur B est indépendant des vecteurs colonnes de la matrice A, par suite il n'existera pas de $n - uple$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vérifiant le système (S). ■

Proposition 10 *Si le système linéaire (S) est résoluble, alors il est redondant si et seulement si $rg(A) < m$.*

Preuve. Si le système linéaire (S) est résoluble et redondant, alors certaines de ses équations sont des combinaisons linéaires des autres; par conséquent, certaines lignes de la matrice A seront combinaisons linéaires des autres lignes de la matrice A.
Par conséquent on aura : $rg(A) < m$.
Réciproquement, si le système linéaire (S) est résoluble et $rg(A) < m$, alors puisque l'on a : $rg(A) = rg(A; B)$, les relations entre les lignes de la matrice A seront valables pour les éléments de la matrice B.
Nous aurons donc des relations entre les équations du système. Puisque $rg(A) = r < m$, il y aura dans la matrice A, r lignes linéairement indépendantes et les $(m - r)$ lignes restantes seront des combinaisons linéaires des r lignes indépendantes : le système sera donc redondant. ■

Remarque 5 *Un système linéaire qui contient plus d'équations que d'inconnues est nécessairement redondant.*
De plus, si $rg(A) = r$, il est possible de trouver parmi les m équations du système redondant, $(m-r)$ équations qui sont des combinaisons linéaires des r autres équations.

Proposition 11 *Si le système linéaire (S) admet plusieurs solutions alors il en admet une infinité.*

Preuve. Supposons que le système linéaire (S) admet daux solutions X_1 et X_2.
Nous aurons donc : $AX_1 = AX_2 = B$.
Prenons un nombre réel quelconque α.
Nous avons : $A(\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2) = \alpha(AX_1) + (1 - \alpha)(AX_2) = \alpha B + (1 - \alpha) B = B$.
Par conséquent, $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ sera également une solution du système (S).
Puisque α est un nombre réel quelconque, nous en déduisons donc qu'il y une infinité de solutions au système (S). ■

Proposition 12 *Si le système (S) est résoluble, alors :*
- il est déterminé si et seulement si $rg(A) = n$;
- il est indéterminé si et seulement si $rg(A) < n$.

Preuve. Démontrons le premier point :
Supposons que le système (S) est résoluble et déterminé.
Par conséquent, il existe un seul $n-uple$, $X_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ solution du système (S).
Démontrons par l'absurde que $rg(A) = n$.
Supposons donc que $rg(A) \neq n$. puisque $rg(A) \leqslant n$ nous avons donc $rg(A) < n$ et par conséquent les vecteurs colonnes de la matrice A seront liés.
Il existera donc n nombres réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que : $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_n C_n = \overrightarrow{0}$.
Posons $\Gamma = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, d'après le théorème 2 vu au début de ce paragraphe, nous déduisons que $X_0 + \Gamma \neq X_0$ sera également solution du système (S).
Le système (S) possèdera donc au moins deux solutions distinctes ce qui contredit l'hypothèse que le système est déterminé.
Par conséquent, la supposition faite (soit $rg(A) \neq n$) est fausse et nous en déduisons donc que $rg(A) = n$.
Réciproquement, supposons que le système (S) est résoluble et que $rg(A) = n$.
Le système (S) admettra donc au moins une solution X_0.
De plus, puisque $rg(A) = n$, les vecteurs colonnes de la matrice A seront linéairement indépendants et le système homogène associé : $x_1 C_1 + x_2 C_2 + ... + x_n C_n = \overrightarrow{0}$ n'admettra qu'une seule solution qui est $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ puisque $(C_1, C_2, ..., C_n)$ est une famille libre.
Compte tenu du théorème 2 donné au début de ce paragraphe, on obtiendra toutes les solutions du système (S) en ajoutant à X_0 une solution quelconque du système homogène associé et puisque ce système homogène n'a que le vecteur nul comme solution, nous en déduisons que (S) possèdera une unique solution. Le système (S) sera donc déterminé.
Démontrons le second point
Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que l'on a nécessairement $rg(A) \leqslant n$ puis on utilise la contraposée du premier point. ■

Remarque 6 *Un système résoluble qui contient plus d'inconnues que d'équations (soit $n > m$) sera nécessairement indéterminé.*

Définition 7 *On appelle* ***fonction affine*** *des variables $x_1, x_2, ..., x_p$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}^p$ par :*

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_p x_p.$$

où c_0, $c_1, c_2, ..., c_p$ désignent $p+1$ nombres réels.

Proposition 13 *Si le système linéaire (S) est indéterminé etsi $rg(A) = r$ alors il est possible de trouver parmi les n variables $x_1, x_2, ..., x_n$:*
* r *inconnues principales;*
* $n-r$ *inconnues secondaires;*
telles que chacune des inconnues principales s'exprime comme fonction affine des inconnues secondaires, ces dernières prenant des valeurs quelconques.

Remarque 7 *On dit dans ce cas que le* ***degré d'indétermination*** *du système (S) est égal à $n-r$.*

3) Exemples

Exemple 8 *Considérons le système linéaire :* $(S) : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$.

Nous avons ici : $n = m = 3$. Posons: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Puisque le déterminant : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, *nous pouvons dire que : $rg(A) \geqslant 2$.*
De plus, nous remarquons que $\det(A) = 0$, donc nous avons $rg(A) \leqslant 2$ et par suite $rg(A) = r = 2$.
Comme : $rg(A; B) = rg \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = 2$, *nous en déduisons que le système est résoluble, redondant et indéterminé.(Remarquons que : $E_3 = 2E_1 - 3E_2$ où E_i désigne la $i^{ème}$ équation).*

La troisième équation est donc inutile. Le degré d'indétermination sera donc de $3-2=1$ et puisque les deux premières colonnes de A sont linéairement indépendantes,nous choisirons x_1 et x_2 comme inconnues principales et x_3 comme inconnue secondaire.

Nous avons donc : $\left\{\begin{array}{c} x_1 = 1+\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -1+x_1+x_3 = \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_3 \textit{ est quelconque} \end{array}\right.$.

L'ensemble solution du système sera : $\left\{\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{2}x_3 \\ \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \textit{ décrivant } \mathbb{R}\right\}$.

Exemple 9 *Considérons le système* (S) : $\left\{\begin{array}{c} x_1-2x_2=4 \\ x_1+3x_2=-1 \\ 2x_1+x_2=1 \end{array}\right.$.

Posons : $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Puisque* $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, *nous pouvons dire que* $rg(A)=r=2$.

De plus, $rg(A;B) = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ *puisque* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$.

Par conséquent, le système (S) est impossible : ses équations sont incompatibles.

4) <u>Les formules ce Cramer</u>

Définition 8 *Considérons le système linéaire de n équations à n :* (S) : $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=bn \end{array}\right.$

et considérons posons : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

Le système (S) est de ***Cramer*** *si* $\det(A)\neq 0$ *c'est à dire que* $rg(A)=n$.

Théorème 3 *Le système (S) précédent admet une unique solution $(x_1, x_2, ..., x_n)$ si et seulement si c'est un système de Cramer. dans ce cas, cette solution est donnée par les formules de Cramer :*

$$\forall i \in \{1;2;...;n\} \textit{ on a : } x_i = \frac{\Delta_i}{\det(A)}$$

où Δ_i désigne le déterminant obtenu en remplaçant dans $\det(A)$ la $i^{ème}$ colonne par la colonne B.

Exemple 10 *Considérons le système* (S) : $\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{array}\right.$. *Posons :* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

On a : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ *(On a soustrait la première colonne à la troisième puis on a développé suivant la troisième colonne). Par conséquent, on a $rg(A)=3$ et le système est donc de Cramer.*

Nous aurons donc :

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$ *et* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12$.

Par conséquent, la solution du système (S) est $(x_1=1; x_2=2; x_3=-2)$.