# Chapitre 5 - Valeurs propres et vecteurs propres - Diagonalisation

## I) Valeurs propres et vecteurs propres

### 1) Définition

**Définition 1** *Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
*On recherche un vecteur $X \neq \overrightarrow{0}$ de dimension $n$ tel que $AX$ soit proportionnel à $X$ soit $AX = \lambda X$; cette relation s'écrira encore : $AX - \lambda X = \overrightarrow{0}$ ou encore $(A - \lambda I_n)X = \overrightarrow{0}$ où $\lambda$ désignera un nombre réel.*
*Par définition, le vecteur $X$ ainsi déterminé est appelé **vecteur propre** de la matrice $A$.*

**Remarque 1** *Le vecteur $X$ cherché est donc solution du système linéaire $(A - \lambda I_n)X = \overrightarrow{0}$.*
*Deux cas se présenteront :*
*$1^{er}$ cas : Si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \neq 0$*
*D'après ce que nous avons vu dans les chapitres précédents, le système linéaire aura une solution unique qui sera $X = \overrightarrow{0}$. Ce cas ne nous intéressera donc pas.*
*$2^{ème}$ cas : Si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$*
*L'équation obtenue par cette relation nous donnera une équation polynomiale appelée **polynôme caractéristique** de la matrice $A$; une solution de cette équation caractéristique est appelée valeur propre de la matrice $A$.*

**Exemple 1** *Considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.*
*Le polynôme caractéristique de la matrice $A$ sera : $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(4-\lambda) + 3 = 0$, soit encore : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.*
*Cette équation possède deux racines réelles qui sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.*
*Recherchons maintenant les vecteurs porpres associés.*
*Pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$ :*
*Il faut donc résoudre le système : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = x_2 \end{cases}$ en posant : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.*
*Cela donne $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ est quelconque (non nul)} \end{cases}$.*
*Donc tout vecteur de la forme : $X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre. (avec $x_2 \neq 0$)*
*Pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$ :*
*Il faut donc résoudre le système : $AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 3x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3x_2 \end{cases}$ en posant : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.*
*Cela donne $\begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_1 \text{ est quelconque (non nul)} \end{cases}$.*
*Donc toute vecteur de la forme : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre.(avec$x_1 \neq 0$)*

### 2) Propriétés

#### a) Propriétés des valeurs propres

**Proposition 1** *Une matrice carrée d'ordre $n$ admet $n$ valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.Ces valeurs propres peuvent être complexes et, si $\lambda_k$ est une valeur propre complexe de partie imaginaire nom nulle, alors son conjugué $\overline{\lambda_k}$ sera également une valeur propre de la matrice $A$ avec le même ordre de multiplicité que celui de $\lambda_k$.*

**Proposition 2** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $S$ est une matrice carrée inversible, alors le polynôme caractéristique des matrices $A^t$ ets $S^{-1}AS$ sera le même et par suite, ces deux matrices auront les mêmes valeurs propres.*

**Preuve.** On a : $\det(A^t - \lambda I_n) = \det(A^t - \lambda I_n^{\,t}) = \det(\left[(A - \lambda I_n)^t\right] = \det(A - \lambda I_n)$, et :
$\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}I_n S) = \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)S) = \det(S^{-1}).\det(A - \lambda I_n).\det(S)$
ce qui donne : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$puisque $\det(S^{-1}) = \dfrac{1}{\det(S)}$.
Nous en déduisons que : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \det(A^t - \lambda I_n)$. ■

**Proposition 3** *Si $\lambda$ est une valeur propre non nulle d'une matrice $A$ inversible, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de $A^{-1}$.*

**Preuve.** On a donc $AX = \lambda X$, par conséquent : $\lambda A^{-1}X = A^{-1}AX = X$.
Par suite, nous avons : $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$ ce qui prouve que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de $A^{-1}$. ■

**Proposition 4** *Si $\lambda$ est une valeur propre non nulle d'une matrice $A$, alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^p$ est une valeur propre de $A^p$.*

**Preuve.** Démontrons ce résultat par récurrence sur $p$.
Initialisation : On a : $A^1X = AX = \lambda X = \lambda^1 X$, donc $\lambda^1$ est une valeur propre de $A^1$.
Hérédité : On suppose que $\lambda^n$ est une valeur propre de $A^n$ pour tout entier naturel non nul $n \leqslant p$ ($p$ étant fixé $\geqslant 1$) et on montre que $\lambda^{p+1}$ est une valeur propre de $A^{p+1}$.
On a : $A^{p+1}X = A^p(AX) = A^p(\lambda X) = \lambda\,(A^pX) = \lambda(\lambda^pX) = \lambda^{p+1}X$.
Par conséquent, $\lambda^{p+1}$ est une valeur propre de $A^{p+1}$.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^p$ est une valeur propre de $A^p$. ■

**Proposition 5** *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les valeurs des éléments de la diagonale principale de la matrice.*

**Preuve.** La matrice étant triangulaire, son équation caractéristique sera :
$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$ et par suite, ses valeurs propres seront :
$\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, ..., $\lambda_n = a_{nn}$. ■

## b) Propriétés des vecteurs propres

**Proposition 6** *A toute valeur propre on peut associer au moins un vecteur propre.*

**Preuve.** Les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique : $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Par conséquent, ces valeurs propres rendent la matrice $A - \lambda I_n$ non inversible; par suite nous en déduisons l'existence d'une infinité de solutions pour l'équation caractéristique vectorielle :
$AX = \lambda X$. ■

**Proposition 7** *Les vecteurs propres sont définis à un facteur près.*

**Preuve.** Si $AX = \lambda X$, alors on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $A(\alpha X) = \alpha\,(AX) = \alpha\,(\lambda X) = \lambda\,(\alpha X)$, donc $\alpha X$ sera un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ pour la matrice $A$. ■

**Proposition 8** *Toute combinaison linéaire de vecteurs propres associés à une même valeur propre est elle-même un vecteur propre pour cette valeur propre.*

**Preuve.** Supposons que : $X_1$, $X_2$, ...,$X_p$ sont $p$ vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda$.
On a donc : $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}$ alors : $AX_k = \lambda X_k$.
Si $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_p$ désignent $p$ nombres réels quelconques, nous obtenons :
$A\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,(AX_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k(\lambda X_k) = \lambda\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_k\right)$. Par suite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_k$ sera un vecteur propre de la matrice $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. ■

**Remarque 2** *Une étude plus complète de l'algèbre linéaire, nous montrerait que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre, ensemble auquel on ajoute le vecteur nul, forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^n$. Ce sous-espace vectoriel est appelé* ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre en question.*

**Proposition 9** *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.*

**Preuve.** Considérons $p$ vecteurs propres $X_1$, ..., $X_p$ de la matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspondants respectivement aux valeurs propres différentes respectives $\lambda_1$, ..., $\lambda p$.
Nous allons démontrer le résultat à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
Supposons donc que ces $p$ vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
Appelons $r$ le nombre maximum de vecteurs qui sont linéairement indépendants parmi ces $p$ vecteurs.
Nous avons donc $r < p$.
Pour simplifier les notations, supposons que ces $r$ vecteurs soient les vecteurs $X_1$, ..., $X_r$.
Le vecteur $X_p$ sera donc combinaison linéaire de ces $r$ vecteurs.
Il existera donc $r$ nombres réels $\alpha_1$, ..., $\alpha_r$ tels que : $X_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k$.
Comme nous avons : $AX_p = \lambda_p X_p$, nous en déduisons donc que : $A\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k\right) = \lambda_p \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k$,
soit encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A X_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda_k X_k = \lambda_p \sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k$.
Nous en déduisons donc que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left(\lambda_p - \lambda_k\right) X_k = \overrightarrow{0}$.
La famille $\{X_1, ..., X_r\}$ étant libre, nous en déduisons que : $\forall k \in \{1, ..., r\}$ on a : $a_k \left(\lambda_p - \lambda_k\right) = 0$ et puisque pour tout $k$ nous avons $\lambda_p \neq \lambda_k$, nous en tirons que les coefficients $\alpha_k$ sont tous nuls.
Par suite, le vecteur $X_p$ sera nul, ce qui est impossible puisqu'il est un vecteur propre.
Par conséquent l'hypothèse faite est fausse , d'où le résultat annoncé. ■

**Proposition 10** *A une valeur propre de multiplicité q, on peut associer au plus q vecteurs propres linéairement indépendants.*

**Preuve.** Ce résultat est admis. ■

**Proposition 11** *Si la matrice $A$ est inversible et si $\lambda$ est une valeur propre non nulle de la matrice $A$, alors les vecteurs propres de la matrice $A^{-1}$ relatifs à la valeur propre $\dfrac{1}{\lambda}$ sont les mêmes que ceux de la matrice $A$ relatifs à la valeur propre $\lambda$.*

**Preuve.** Ce résultat provient immédiatement du résultat vu dans le paragraphe précédent relatif aux valeurs propres de la matrice $A^{-1}$. ■

**Proposition 12** *Pour tout entier naturel p non nul, les vecteurs propres de la matrice $A^p$ sont les mêmes que ceux de la matrice $A$.*

**Preuve.** Ce résultat provient immédiatement du résultat vu dans le paragraphe précédent relatif aux valeurs propres de la matrice $A^p$. ■

# II) La diagonalisation d'une matrice

## 1) Définition

**Définition 2** *Considérons une matrice carrée $A$ d'ordre $n$. La matrice $A$ est diagonale s'il existe une matrice d'ordre $n$ ,inversible $S$ telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit diagonale.*

**Remarque 3** *Puisque :*
$\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det\left[S^{-1}(A-\lambda I_n)S\right] = \det(S^{-1}).\det(A-\lambda I_n).\det(S) = \det(A-\lambda I_n)$, *nous en déduisons que la matrice* $S^{-1}AS$ *aura le même polynôme caractéristique que la matrice* $A$.
*Les éléments diagonaux de la matrice* $S^{-1}AS$ *seront donc les valeurs propres de la matrice* $A$.

*Nous noterons dans ce cas :* $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *où* $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

**Remarque 4** *Si la matrice* $A$ *est diagonalisable, il n'y a pas unicité de la matrice* $S$.

## 2) Propriétés

**Théorème 1** *La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable si et seulement si elle admet* $n$ *vecteurs propres linéairement indépendants.*
*De plus, les colonnes d'e la matrice* $S$ *de transformation sont les vecteurs propres de la matrice* $A$ *rangés dans l'ordre où apparaîtront les valeurs propres dans la matrice diagonale.*

**Preuve.** Supposons que la matrice $A$ soit diagonalisable et posons $S = [C_1, ..., C_n]$ où $C_i$ désigne la $i^{ème}$ colonne de la matrice $S$.
Puisque : $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, nous déduisons : $AS = S.diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, ce qui donne encore $[AC_1, ..., AC_n] = [\lambda_1 C_1, ..., \lambda_n C_n]$.
Par conséquent : $\forall k \in \{1, ..., n\}$ on a : $AC_k = \lambda_k C_k$. Cela montre que les $n$ colonnes de la matrice $S$ sont les vecteurs propres de la matrice $A$ qui sont nécessairement linéairement indépendants puisque $\det(S) \neq 0$ car la matrice $S$ est inversible.
Réciproquement, si les $n$ vecteurs propres $X_1$, ..., $X_n$ de la matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendants, on considère la matrice $S = [X_1, ..., X_n]$.
On a alors: $S^{-1}AS = S^{-1}[AX_1, ..., AX_n] = S^{-1}[\lambda_1 X_1, ..., \lambda_n X_n]$
soit encore : $S^{-1}AS = S^{-1}[X_1, ..., X_n]\, diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. ■

**Proposition 13**
*La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable si et seulement si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à chaque valeur propre est égal à l'ordre de multiplicité de cette dernière comme solution de l'équation caractéristique.*

**Preuve.** Ce résultat est admis. ■

**Remarque 5** *Compte tenu de cette propriété, nous pouvons dire qu'une matrice qui n'admet que des valeurs propres simples est diagonalisable.*

## 3) Exemples

**Exemple 2** *Reprenons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *vue au début de ce chapitre.*
*Nous avions deux valeurs propres simples :* $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = 3$.
*De plus, pour* $\lambda_1$*, un vecteur propre était* $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et pour* $\lambda_2$ *on avait* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
*Ces deux valeurs propres étant simples, nous pouvons en déduire que la matrice* $A$ *est diagonalisable.*
*Posons :* $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ *et vérifions que la matrice* $S$ *est inversible et que la matrice* $S^{-1}AS$ *est bien diagonale.*
*Comme* $\det(S) = 2 \neq 0$, *nous en déduisons que la matrice* $S$ *est inversible et que :*
$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
*De plus;* $S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, *soit encore :*
$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

**Exemple 3** *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

*Recherchons les valeurs propres de la matrice A*

*On a :* $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$.

*On a :* $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ \lambda & 2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ *(on a remplacé* $C_1$ *par* $C_1 - C_2 + C_3$*), soit encore :*

$\det(A - \lambda I_3) = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ *(on a remplacé* $L_2$ *par* $L_2 + L_1$ *et* $L_3$ *par* $L_3 - L_1$*).*

*En définitive, le ploynôme caractéristique est :* $P(\lambda) = -\lambda\,(4-\lambda)\,(2-\lambda) = 0$.

*Nous obtenons donc trois valeurs propres simples* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ *et* $\lambda_3 = 2$.

*La matrice A sera donc diagonalisable.*

*Recherchons maintenant les vecteurs propres*

* *Relativement à* $\lambda_1 = 0$

*Il faut résoudre le système :* $AX = \overrightarrow{0}$ *soit :*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ quelconque(non nul)} \\ x_3 = -x_2 \end{cases}.$$

*Un vecteur propre sera donc :* $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

* *Relativement à* $\lambda_2 = 4$

*Il faut résoudre le système :* $AX = 4X$ *soit :*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ quelconque (non nul)} \\ x_3 = x_2 \end{cases}.$$

*Un vecteur propre sera :* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* *Relativement à* $\lambda_3 = 2$

*Il faut résoudre le système :* $AX = 2X$ *soit :*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ quelconque (non nul)} \end{cases}.$$

*Un vecteur propre sera :* $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*La matrice S sera :* $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et on aura :* $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exemple 4** *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

*Recherchons les valeurs propres de la matrice A*

*On a :* $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$*, soit :*

$\det(A - \lambda I_3) = \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(4-\lambda)^2$.

*Le ploynôme caractéristique est donc :* $P(\lambda) = -\lambda\,(4-\lambda)^2 = 0$.

*Nous obtenons donc deux valeurs propres :* $\lambda_1 = 0$ *qui est simple et* $\lambda_2 = 4$ *qui est double.*
*Recherchons maintenant les vecteurs propres*

* *Relativement à* $\lambda_1 = 0$

*Il faut résoudre le système :* $AX = \overrightarrow{0}$ *soit :*

$$\left\{\begin{array}{c} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ x_2 \textit{ quelconque (non nul)} \\ x_3 = -2x_2 \end{array}\right. .$$

*Un vecteur propre sera donc :* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

* *Relativement à* $\lambda_2 = 4$

*Il faut résoudre le système :* $AX = 4X$ *soit :*

$$\left\{\begin{array}{c} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4x_1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{-x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 \textit{ quelconque (non nul)} \\ x_3 \textit{ quelconque (non nul)} \end{array}\right. .$$

*Nous avons cette fois deux vecteurs propres linéairement indépendants :* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*La matrice* $S$ *sera :* $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et on aura :* $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.