Conjecture de Syracuse

(démonstration)

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

Conjecture de Syracuse (conjecture de Collatz) :

La conjecture de Collatz consiste en une itération portant sur des entiers positifs :

Si N_i est pair alors $N_{i+1} = N_i/2$ sinon $N_{i+1} = (3*N_i + 1)/2$.

Si cette instruction itérée aboutit en un nombre n fini d'étapes à $N_n = 1$ (donc au cycle : 1-4-2-1), la suite de premier élément N_0 est appelée « suite de Syracuse ».

Pour $N_0 \leq 5{,}7*10^{18}$ les suites obtenues sont des suites de Syracuse (Tomás Oliveira e Silva, Universidade de Aveiro, Portugal).

<<>>

Résumé :

La suite $\{M_i\}$ de premier élément $M_0=K*2^n-1$, où n est un entier positif et $K=(2^{3\wedge n}+1)/3^n$ est un entier impair, est une suite de Syracuse. Cette suite est donc bornée et elle est un majorant de toute suite $\{N_i\}$ produite par application de l'algorithme de Collatz car n est aussi grand qu'on le veut.

Toute suite $\{N_i\}$ est donc bornée et, par suite, comporte un cycle.

Soient $\{Z_0, Z_1, \dots , Z_{n-1}\}$ un cycle de longueur n et Z_0 l'élément minimum.

Selon l'algorithme de Collatz $2^{i\{n\}}*Z_0=3*Z_{n-1}+1$ et Z_0 doit vérifier l'égalité :

$$2^{k\{n\}}*Z_0 = 3^n*Z_0 +3^{n-1} +3^{n-2}*2^{k1} +3^{n-3}*2^{k2} + \dots + 3*2^{k\{n-2\}} +2^{k(n-1)},$$

$k_1, k_2, \dots , k_n$ sont des entiers positifs et $k_n> \dots > k_2> k_1> 0$.

Mais le principe de récurrence sur n montre que pour tout n>1 :

$$2^{k\{n\}}*Z_0 > 3^n*Z_0 +3^{n-1} +3^{n-2}*2^{k1} +3^{n-3}*2^{k2} + \dots + 3*2^{k\{n-2\}} +2^{k(n-1)}.$$

Et par suite, l'égalité est vraie seulement pour n=1, soit $2^{i1}*Z_0 = 3*Z_0 +1$ qui implique $Z_0=1$ et l'unique cycle {1,4, 2} .

<<>>

Exécution de l'algorithme de Collatz

avec des réductions apportées aux calculs :

1) Si N_0 est divisible par 2^j et non par 2^{j+1} alors $N_0 = N_0/2^J$ avec $j \in \mathbb{N}^+$.

Tant que $N_i \neq 1$ alors, $3*N_i + 1$ étant divisible par 2^j et non par 2^{j+1},

faire $N_{i+1} = (3*N_i + 1)/2^j$ avec $j \in \mathbb{N}^+$.

Ainsi dans la suite N_0, N_1, N_2, …. , les nombres N_i sont toujours impairs.
L'opération de passage de N_i à N_{i+1} est notée $N_{i+1}=S(N_i)$.
2) La conjecture est vraie pour tous les entiers positifs inférieurs à N_0.
3) Comme tout entier impair est de la forme $4k_0 \pm 1$, si $N_0=4k_0 + 1$ alors $N_1=((4k_0+1)*3+1)/4 = 3k_0+1$ et, par suite, $N_1 < N_0$ et $N_1=S(N_0)$, N_0 vérifie la conjecture.
Le seul cas qui reste à traiter est : $N_0=4k_0 – 1$, avec k_0 entier ≥ 1.

Majoration de la suite $\{N_i\}$ de premier élément $N_0=4k_0 – 1$:

Le nombre $M_0=4k_1-1$, avec $k_1>k_0$ et k_1 un multiple d'une puissance de 2 tel que $M_0=K*2^n-1$ où n est un entier positif aussi grand qu'on le veut et K est un entier positif impair, engendre une suite $\{M_i\}$ majorant la suite $\{N_i\}$ engendrée par $N_0=4k_0-1$ par application de l'algorithme de Collatz modifié (les nombres N_i et les nombres M_i sont toujours impairs) car $M_{i+1}=(3*M_i+1)/2$ et $N_{i+1}\leq(3*N_i+1)/2$.

Génération de la suite $\{M_i\}$ de premier élément $M_0=K*2^n-1$

jusqu'à l'étape n :
$M_1=(3*M_0+1)/2=(3*(K*2^n-1)+1)/2=K*3*2^{n-1}-1$,
$M_2=(3*M_1+1)/2=(3*(K*3*2^{n-1}-1)+1)/2=K*3^2*2^{n-2}-1$,
et à la nième itération :
$M_n=(3*M_{n-1}+1)/2=(3*(K*3^{n-1}*2 - 1)+1)/2=K*3^n - 1$.
$M_n=K*3^n - 1$, M_n est pair .
Comme, d'une part $M_0=K*2^n-1 > N_0=4k_0 -1$, avec n un entier positif aussi grand qu'on le veut et le facteur de croissance de la suite $\{M_i\}$ étant égal à $(3/2)^i$ pour tout i ($1\leq i\leq n$) puisque $M_i = (3*M_{i-1}+1)/2$, et d'autre part $N_i \leq (3*N_{i-1}+1)/2$, on a $M_i>N_i$ pour tout i ($1\leq i\leq n$) .
Le principe de récurrence sur n montre que $3^n|2^{3^\wedge n}+1$ pour tout n>0 ($3^0|2^{3^\wedge 0}+1$).
En effet, pour n=1, $3|2^3+1$; supposons (hypothèse de récurrence) $3^n|2^{3^\wedge n}+1$; comme $2^{3^\wedge(n+1)}+1=(2^{3^\wedge n}+1)(2^{2*3^\wedge n}-2^{3^\wedge n}+1)=(2^{3^\wedge n}+1)(4^{*3^\wedge n}+2 - (2^{3^\wedge n}+1))$,
$3^{n+1}|2^{3^\wedge(n+1)}+1$. (W. Sierpinski)
En posant $K=(2^{3^\wedge n}+1)/3^n$, on obtient $M_n=K*3^n – 1=2^{3^\wedge n}$ et $M_n:=M_n/2^{3^\wedge n}=1$.
Par conséquent, la suite $\{M_i\}$ de premier élément $M_0=K*2^n-1$ avec $K=(2^{3^\wedge n}+1)/3^n$ est une suite de Syracuse et, par suite, elle est bornée.

La suite $\{M_i\}$ de premier élément $M_0=K*2^n-1$, où n est un entier positif aussi grand qu'on le veut et $K=(2^{3\wedge n}+1)/3^n$, est un majorant de toute suite $\{N_i\}$ construite suivant l'algorithme de Collatz.

Unicité du cycle {1, 4, 2} :

Toute suite construite suivant l'algorithme de Collatz étant bornée et, par suite, l'ensemble ordonné de ses éléments étant fini, elle comporte nécessairement un cycle $\{Z_0 , Z_1 , Z_2 , \ldots ,Z_n=Z_0\}$, où $n\geq 1$ est la longueur du cycle , tel que :

(1)
$$Z_1 = (3Z_0 + 1)/2^{i1},$$
$$Z_2 = (3Z_1 + 1)/2^{i2}$$
$$Z_3 = (3Z_2 + 1)/2^{i3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_n = (3Z_{n-1} + 1)/2^{in} = Z_0 ,$$

où le facteur $3/2^i$ est de croissance lorsque i=1 ($Z_J=4k-1$) et de décroissance lorsque i>1 ($Z_J=4k+1$) . Ces deux types de variation existent nécessairement dans un cycle et les éléments Z_j sont de la forme $4k\pm1$, où k est un entier positif.

Le système d'égalités (1) peut s'écrire :

(2)
$$2^{i1}Z_1=3Z_0+1$$
$$2^{i2}Z_2=3Z_1+1$$
$$2^{i3}Z_3=3Z_2+1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$2^{in}Z_n = 3Z_{n-1} + 1 = 2^{in} Z_0 .$$

L'égalité $2^{in}*Z_0 = 3*Z_{n-1} + 1$ permet d'écrire par substitutions successives de bas en haut à partir des égalités (2) :

$$2^{in}*Z_0 = 3*Z_{n-1} + 1$$
$$2^{i\{n-1\}}*2^{in} Z_0 = 3*2^{i\{n-1\}} Z_{n-1} + 2^{i\{n-1\}}$$
$$2^{i\{n-1\}}*2^{in}Z_0 = 3*(3Z_{n-2} + 1)+ 2^{i\{n-1\}}$$
$$2^{i\{n-1\}}*2^{in} Z_0 = 3^2* Z_{n-2} + 3+ 2^{i\{n-1\}}$$
$$2^{i\{n-2\}}*2^{i\{n-1\}} *2^{in} Z_0 = 3^2* (3Z_{n-3} + 1) + 3*2^{i\{n-2\}} + 2^{i\{n-2\}}*2^{i\{n-1\}}$$
$$2^{i\{n-2\}}*2^{i\{n-1\}} *2^{in} Z_0 = 3^3* Z_{n-3} + 3^2 + 3*2^{i\{n-2\}} + 2^{i\{n-2\}}*2^{i\{n-1\}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(3)
$$2^{i1+i2+ \ldots +i\{n\}}*Z_0 =$$
$$= 3^n* Z_0+ 3^{n-1} + 3^{n-2}*2^{i1} + 3^{n-3}*2^{i1+i2} + \ldots. + 3*2^{i1+i2+ \ldots.+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2+ \ldots +i\{n-2\}+i\{n-1\}}.$$

Comme Z_0 est un entier > 1, on a l'inégalité évidente :

(4) $3^n{*}Z_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2}{*}2^{i1} + 3^{n-3}{*}2^{i1+i2} + \ldots + 3{*}2^{i1+i2+\ldots+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2+\ldots+i\{n-2\}+i\{n-1\}} >$ $2^{i1+i2+\ldots+i\{n\}}$.

Analyse de validation de l'égalité (3) par récurrence sur n :

Pour n=2, l'égalité (3) donne :

$2^{i1+i2}{*}Z_0 = 3^2{*}Z_0 + 3 + 2^{i1}$.

Soit $(2^{i1+i2} - 3^2){*}Z_0 = 3 + 2^{i1}$, d'où $i_1+i_2 > 3$ puisque $2^{i1+i2} - 3^2>0$.

(Avec $Z_0=4k_0 - 1$ et $Z_1=4k_1 + 1$, $2^{i1}Z_1=3Z_0+1=3(4k - 1)+1$ et $2^{i2}Z_0=3Z_1+1=3(4k+1)+1$ impliquent $i_1=1$ et $i_2 \geq 2$).

L'égalité $(2^{1+i2} - 9){*}Z_0 = 5$ est impossible puisque $(2^{1+i2} - 9){*}Z_0 > 5$.

Donc l'égalité $2^{i1+i2}{*}Z_0 = 3^2{*}Z_0 + 3 + 2^{i1}$ est impossible car $2^{i1+i2}{*}Z_0 > 3^2{*}Z_0 + 3 + 2^{i1}$ (inégalité stricte).

Pour n>2, si l'inégalité (4) est fausse alors, puisque $Z_0>1$, (3) devient l'inégalité

(5) $2^{i1+i2+\ldots+i\{n\}}{*}Z_0 >$
$3^n{*}Z_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2}{*}2^{i1} + 3^{n-3}{*}2^{i1}{*}2^{i2} + \ldots + 3{*}2^{i1+i2+\ldots+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2\ldots+i(n-1)}$

et <u>n est augmenté d'une unité tant que l'inégalité (4) est fausse</u>.

Si l'inégalité (4) est vraie, supposons (hypothèse de récurrence) que pour n, on a l'inégalité stricte :

(6) $2^{i1+i2+\ldots+i\{n\}}{*}Z_0 >$
$3^n{*}Z_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2}{*}2^{i1} + 3^{n-3}{*}2^{i1}{*}2^{i2} + \ldots + 3{*}2^{i1+i2+\ldots+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2\ldots+i(n-1)}$.

En choisissant Z_0 tel qu'il soit le minimum des éléments d'un cycle de longueur n+1, nécessairement Z_0 est de la forme $Z_0=4k-1$ et Z_n est de la forme $Z_n=4k+1$ (fermeture du cycle).

On a $2^{i\{n+1\}}{*}Z_0=3{*}Z_n+1$ et $Z_0<Z_n$ et, par suite, $i_{\{n+1\}}\geq 2$ et $2^{i\{n+1\}} \geq 4$.

Multiplions le premier membre de (6) par $2^{i\{n+1\}}$ (≥ 4) et le second membre par 3 et ajoutons $2^{i1+i2+i3\ldots+i(n)}$.

Comme le facteur multiplicatif du premier membre de (6) est supérieur ou égal à 4 et, compte tenu de l'inégalité (4), le facteur multiplicatif global du second membre est inférieur à 4, on obtient, pour n+1, l'inégalité stricte :

(7) $2^{i1+i2+\ldots+i\{n\}+i\{n+1\}}{*}Z_0 >$
$3^{n+1}{*}Z_0 + 3^n + 3^{n-1}{*}2^{i1} + 3^{n-2}{*}2^{i1+i2} + \ldots + 3{*}2^{i1+i2+\ldots+i\{n-1\}} + 2^{i1+i2+i3\ldots+i(n)}$,

Le principe de récurrence sur n, avec (4) ou non (4) , permet alors de conclure que pour tout n>1 :

$$2^{i1+i2+\dots+i\{n\}} * Z_0 >$$
$$3^n * Z_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2} * 2^{i1} + 3^{n-3} * 2^{i1+i2} + \dots + 3 * 2^{i1+i2+\dots+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2+\dots+i\{n-2\}+i\{n-1\}}$$

Ainsi, l'égalité

(3) $$2^{i1+i2+\dots+i\{n\}} * Z_0 =$$
$$3^n * Z_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2} * 2^{i1} + 3^{n-3} * 2^{i1+i2} + \dots + 3 * 2^{i1+i2+\dots+i\{n-2\}} + 2^{i1+i2+\dots+i\{n-2\}+i\{n-1\}}$$

est impossible pour n>1 .

Pour n=1, l'égalité (3) devient : $2^{i1} * Z_0 = 3 * Z_0 + 1$.

Soit $(2^{i1} - 3) * Z_0 = 1$,

$(2^{i1} - 3)$ et Z_0 étant des entiers positifs diviseurs de l'unité, on a :

$(2^{i1} - 3) = 1$, $Z_0 = 1$ et $i_1 = 2$.

L'unique cycle avec l'extension aux éléments pairs est donc : {1 , 4, 2}.

Ainsi tous les chemins mènent à Syracuse (1 – 4 – 2 – 1) .

Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

INPI - Paris