

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

délivré par l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

ÉCOLE DOCTORALE : Systèmes

SPÉCIALITÉ : Automatique

par

CLÉMENT ROOS

**Contribution à la commande des systèmes saturés en
présence d'incertitudes et de variations paramétriques**

Application au pilotage de l'avion au sol

soutenue le 5 décembre 2007 devant le jury :

S.	TARBOURIECH	Présidente
J-M.	BIANNIC	Directeur de thèse
J.	DAAFOUZ	Rapporteur
F.	VILLAUMÉ	Examineur
D.J.	WALKER	Rapporteur

Résumé : Les méthodes d'analyse et de synthèse mises en œuvre dans le milieu industriel aéronautique reposent le plus souvent sur l'application de techniques linéaires à des modèles eux-mêmes linéarisés. Les exigences croissantes en termes de performance et de fiabilité opérationnelle nécessitent cependant d'élaborer des stratégies sans cesse plus complexes afin de remplir les objectifs imposés. Il existe donc un réel besoin de mettre au point de nouveaux outils capables de prendre en compte simultanément des non-linéarités et des variations paramétriques lors du processus de synthèse, mais également de démontrer que les résultats obtenus sur le plan théorique peuvent être appliqués à des problématiques réalistes. Dans ce contexte, les travaux menés au cours de cette thèse portent dans un premier temps sur le développement de méthodes d'analyse de robustesse et de synthèse de lois de commande robustes en présence d'incertitudes linéaires à temps variant (LTV) ou invariant (LTI). Ils montrent notamment que de nombreux systèmes non-linéaires peuvent être étudiés avec de tels outils. Ce n'est toutefois pas le cas des systèmes saturés, qui revêtent une importance pratique considérable, et pour lesquels des techniques de synthèse anti-windup sont élaborées dans un deuxième temps. Ces deux approches ne permettent évidemment pas une prise en compte directe de toutes les non-linéarités, mais l'objectif est tout autre. Il consiste à montrer qu'une utilisation judicieuse d'un nombre limité d'outils développés dans un cadre suffisamment général permet d'apporter des réponses pertinentes à de nombreuses problématiques ambitieuses auxquelles se trouve aujourd'hui confrontée l'industrie aéronautique. A titre d'exemple, une stratégie complète est proposée afin de contrôler la dynamique latérale d'un avion de transport civil lors de la phase de roulage au sol.

Mots clés : analyse de robustesse, synthèse robuste, incertitudes LTI/LTV, variations paramétriques, synthèse anti-windup dynamique, saturations, optimisation convexe, aéronautique, contrôle latéral de l'avion au sol.

Abstract: The majority of control laws implemented in the aerospace industry are still designed and analyzed using predominantly linear techniques applied to linearized models of the aircrafts' dynamics. Given the continuous increase in the demands on their performance and reliability, control law designers are highly motivated to explore the applicability of more powerful design and analysis tools allowing to take into account both nonlinearities and parametric variations. In this context, new robustness analysis and robust control synthesis methods are first developed for systems presenting both linear time varying (LTV) and time invariant (LTI) uncertainties. It is notably shown that several kinds of nonlinear systems can be analyzed using such methods. This is however not true for saturated plants that assume a significant practical importance, and for which dedicated anti-windup design techniques are elaborated in a second step. All types of non-linearities can obviously not be taken into account by these two approaches. Nevertheless, the main objective of this work consists in showing that a judicious use of a reduced set of tools developed in a quite general framework allows to address many challenging issues faced by the aerospace industry. As an example, a complete methodology is proposed to control the lateral behavior of an on-ground transport aircraft.

Keywords: robustness analysis, robust synthesis, LTI/LTV uncertainties, parametric variations, dynamic anti-windup synthesis, saturations, convex optimization, aeronautics, on-ground aircraft lateral control.

Remerciements

Un moment émouvant pour le doctorant est le jour où il entreprend d'écrire ses remerciements. Tout d'abord, cela signifie que la fin est proche, ce qui en soi est une très bonne nouvelle. C'est également l'occasion de verser une ultime larme nostalgique au moment de quitter l'insouciance étudiante pour entrer de plain-pied dans la vraie vie. Mais trêve d'apitoiements, venons-en aux faits! Ce manuscrit concrétise trois années de travail au cours desquelles j'ai acquis de nombreuses connaissances scientifiques et développé des méthodes de travail rigoureuses. Cela peut paraître un peu prétentieux, mais il faut bien essayer parfois de se donner un air sérieux, et il n'est jamais désagréable de se faire mousser quelque peu! Cependant, ma soudaine accession à la célébrité ne me fait pas oublier que de nombreuses personnes se sont impliquées d'une manière ou d'une autre dans la réalisation des travaux présentés ici et ne sont donc pas étrangères aux résultats obtenus. Des liens professionnels ou personnels forts se sont souvent tissés avec elles, et je tiens par ces quelques lignes à les remercier chaleureusement.

J'ai effectué ma thèse à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales au sein du département Commande des Systèmes et Dynamique du vol. Je remercie donc en premier lieu Patrick Fabiani, directeur du département, pour son accueil et la confiance qu'il m'a accordée tout au long de la thèse. J'ai pu mesurer à quel point le fait de disposer du soutien de sa hiérarchie était important et sécurisant.

Mes remerciements vont également à Caroline Bérard, directrice de l'Ecole Doctorale Systèmes, qui m'a fait découvrir l'automatique en tant que professeur à Supaero et a appuyé ma candidature, me permettant ainsi d'obtenir un financement du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Je tiens à remercier tout particulièrement Jean-Marc Biannic pour son investissement personnel tout au long de ces trois années, ses compétences théoriques mais également pratiques, et surtout la confiance qu'il m'a accordée alors que je n'étais qu'un jeune étudiant en recherche d'avenir. Merci Jean-Marc pour ton encadrement irréprochable, ta constante disponibilité et ta grande gentillesse. Tu as été mon professeur, mon directeur de thèse pour devenir aujourd'hui un collègue auprès duquel il me reste encore beaucoup de choses à apprendre. Je te dois en grande partie la réussite de ma thèse et mon embauche au DCSD.

Je remercie chaleureusement Jamal Daafouz, professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, et Daniel Walker, professeur à l'Université de Liverpool, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mes travaux, ainsi que Sophie Tarbouriech, directrice de recherche au LAAS-CNRS, pour avoir présidé mon jury. Je remercie également Fabrice Villaumé, ingénieur Airbus et spécialiste des lois de pilotage de l'avion au sol, qui a pris son rôle d'examineur très à cœur et a apporté un point de vue industriel tout à fait pertinent. J'ai été très honoré de soutenir mes travaux devant ces membres du jury qui ont tous témoigné un intérêt sincère envers mon travail. Leurs remarques et conseils avisés ouvrent des perspectives intéressantes en vue d'études futures.

De manière générale, merci à tous ceux avec qui j'ai travaillé durant mon stage de DEA ou ma thèse, que ce soit à l'ONERA (Christelle Cumer, Gilles Ferreres...), à Airbus ou ailleurs en Europe dans le cadre du GARTEUR (Group for Aeronautical Research and Technologies in Europe). Merci à tout le personnel de l'ONERA et de Supaero (édition, gardes, secrétariat, moyens techniques...) pour m'avoir facilité la tâche à maintes reprises. Merci aux amoureux de la montagne que j'ai cotoyés lors des sorties de l'AS. Merci notamment à Philippe Mouyon, à la fois professeur, compagnon de cordée et maintenant chef d'unité après avoir activement soutenu ma candidature.

Sur le plan personnel, je remercie mes parents, qui sont les premiers responsables de ma réussite. Je souhaite leur exprimer ici toute ma gratitude et j'espère qu'ils trouveront en ce manuscrit - qu'ils ont d'ailleurs lu et (presque!) compris - la concrétisation de longues années d'études pendant lesquelles ils m'ont toujours soutenu. Je remercie enfin l'ensemble de mes amis montagnards, grimpeurs, voyageurs, nageurs, coureurs, thésards, chercheurs, ingénieurs, alsaciens, grands, petits, chauves, chevelus, barbus, drôles et que sais-je encore, ainsi que toutes les personnes que j'ai rencontrées au détour d'un chemin, d'une falaise, d'un voyage, ou tout simplement au coin de la rue, et avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments. Pas de longue énumération, les gens qui ont compté pour moi se reconnaîtront ! Merci enfin à la montagne, rassurante ou inquiétante, souvent propice à la réflexion et source infinie de contemplation, toujours fidèle et jamais avare dans les émotions qu'elle procure, petit coin de paradis où rien d'autre ne compte que d'y être heureux.

Table des matières

Introduction	7
Contexte de la thèse	7
Organisation du manuscrit	8
Conseils de lecture	9
I Robustesse en présence d’incertitudes mixtes LTI/LTV	11
1 Quelques notions théoriques d’analyse de robustesse	13
1.1 Introduction à la μ -analyse	14
1.1.1 Incertitudes structurées	14
1.1.2 Valeur singulière structurée	15
1.1.3 Marge de robustesse	17
1.1.4 Performance robuste	17
1.2 Considérations algorithmiques	19
1.2.1 Un problème de dimension infinie	19
1.2.2 Méthodes de résolution	20
1.2.3 Technique d’élimination de fréquences	21
1.3 Eléments de μ -synthèse	22
1.3.1 Un problème non-convexe	22
1.3.2 Résolution par $(D, G) - K$ itération	23
1.4 Au-delà de la μ -analyse	23
1.4.1 Stabilité robuste en présence d’incertitudes LTV	23
1.4.2 Vers la prise en compte d’incertitudes mixtes LTI/LTV	25
2 Une approche fréquentielle pour l’analyse de robustesse LTI/LTV	29
2.1 Performance robuste en présence d’incertitudes LTI/LTV	31
2.1.1 Un problème de dimension infinie	31
2.1.2 Calcul d’un niveau de performance	32
2.1.3 Validation à l’aide d’une technique d’élimination de fréquences	33
2.1.4 Convergence de l’algorithme	34
2.1.5 Résolution sous-optimale	38
2.1.6 Détermination d’une marge de stabilité robuste	39
2.2 Extension à la synthèse de précommande robuste	39
2.2.1 Formulation du problème	40
2.2.2 Résolution pratique	41
2.3 Application à un modèle de missile	42
2.3.1 Description du modèle non-linéaire initial	42
2.3.2 Création des modèles linéarisés	43

2.3.3	Résultats sur le continuum de modèles LTI	44
2.3.4	Résultats sur le modèle quasi-LPV	46
3	Une approche état pour l'analyse de robustesse LTI/LTV	51
3.1	Semi-positivité réelle	53
3.2	Application à la μ -analyse	55
3.2.1	Calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ}	56
3.2.2	Performance robuste	57
3.2.3	Evaluation du conservatisme	58
3.2.4	Intérêt d'une approche état	59
3.3	Généralisation à l'analyse de robustesse LTI/LTV	60
3.4	Extension à la synthèse robuste LTI/LTV	60
3.4.1	Détermination d'un correcteur robuste	60
3.4.2	Aspects algorithmiques	63
3.5	Application à un modèle d'avion de combat	64
3.5.1	Modèle non-linéaire initial et modèle linéarisé	64
3.5.2	Analyse de robustesse	65
3.5.3	Synthèse robuste	66
II	Synthèse anti-windup dynamique	69
4	Introduction à l'analyse des systèmes saturés	71
4.1	Stabilité des systèmes non-linéaires	72
4.1.1	Existence d'un domaine de stabilité	72
4.1.2	Stabilité au sens de Lyapunov	73
4.1.3	Recherche de fonctions de Lyapunov	74
4.2	Représentation des non-linéarités de type saturation	75
4.2.1	Définition de la fonction saturation	76
4.2.2	Modélisation polytopique	77
4.2.3	Modélisation par non-linéarités de secteur	78
4.3	Analyse des systèmes saturés	79
4.3.1	Estimation du domaine de stabilité	79
4.3.2	Mesure du niveau de performance	81
4.4	Vers la prise en compte du phénomène de windup	83
4.4.1	Principe de la synthèse anti-windup	83
4.4.2	Etat de l'art	84
5	Synthèse anti-windup dynamique	89
5.1	Synthèse anti-windup d'ordre fixé	91
5.1.1	Interconnexion pour la synthèse anti-windup	91
5.1.2	Equations du système en boucle fermée	92
5.1.3	Formulation du problème de synthèse	94
5.1.4	Caractérisation convexe de la synthèse d'ordre plein	94
5.1.5	Algorithmes pour la synthèse d'ordre fixé	97
5.1.6	Application à un modèle d'avion de combat	98
5.2	Synthèse anti-windup à dynamique contrainte	101
5.2.1	Motivations et formulation du problème	101
5.2.2	Introduction d'une borne sur la dynamique du correcteur	102

5.2.3	Validation sur le modèle d'avion de combat	105
5.3	Extension aux systèmes à paramètres variants	107
5.3.1	Formulation du problème de synthèse	108
5.3.2	Calcul d'un niveau de performance	110
5.3.3	Synthèse anti-windup à paramètres variants	112
5.3.4	Application à un modèle de missile	114
III	Application au contrôle latéral d'un avion au sol	121
6	Modélisation LFT non-linéaire d'un avion au sol	123
6.1	Description du modèle non-linéaire initial	124
6.1.1	Architecture générale	124
6.1.2	Nécessité d'un modèle réduit	126
6.2	Construction d'un modèle latéral simplifié	127
6.2.1	Hypothèses simplificatrices	127
6.2.2	Equations latérales	128
6.2.3	Obtention d'un modèle LPV	130
6.3	Représentation des forces de friction	130
6.3.1	Modélisation initiale	130
6.3.2	Identification par inversion du modèle LPV	131
6.3.3	Approximation par des non-linéarités de type saturation	132
6.4	Mise sous forme LFT	133
6.4.1	Modèle aérodynamique	133
6.4.2	Forces de friction	134
6.4.3	Actionneur de la roulette avant	135
6.4.4	Création de l'interconnexion complète	136
6.5	Simulations temporelles et validation	136
6.5.1	Manœuvre basse vitesse	137
6.5.2	Manœuvre haute vitesse	138
7	Synthèse anti-windup appliquée au contrôle latéral d'un avion au sol	143
7.1	Formulation du problème de synthèse anti-windup	144
7.1.1	Objectifs de la synthèse	144
7.1.2	Structure du correcteur proposé	145
7.2	Synthèse anti-windup sur le modèle LFT simplifié	146
7.2.1	Représentation LFT en boucle ouverte de l'avion au sol	146
7.2.2	Boucle de pilotage	147
7.2.3	Boucle de guidage	148
7.3	Implantation sur le modèle non-linéaire complet	149
7.3.1	Estimation en ligne des niveaux de saturation	149
7.3.2	Intégration du correcteur LFT adaptatif	150
7.4	Simulations temporelles et validation	151
7.4.1	Intérêt d'une approche multidimensionnelle	151
7.4.2	Robustesse à une variation de la force verticale	152
7.4.3	Adaptation à l'état de la piste	152
7.4.4	Réalisation de manœuvres de référence	153

8	Robustesse du système de commande latéral d'un avion au sol	159
8.1	Formulation du problème d'analyse de robustesse	160
8.1.1	Prise en compte d'incertitudes LTI/LTV réelles	160
8.1.2	Obtention d'une représentation LFT linéaire de l'avion au sol	161
8.2	Analyse de stabilité robuste	162
8.2.1	Hypothèses préliminaires	162
8.2.2	Manceuvres réalisées sur les pistes de déroulement	163
8.2.3	Manceuvres réalisées sur la zone de stationnement	166
8.3	Robustesse en performance	167
8.3.1	Définition du niveau de performance	167
8.3.2	Sensibilité aux incertitudes	168
8.4	Evaluation du conservatisme	169
	Conclusion et perspectives	171
	Contributions personnelles	171
	Bilan et perspectives	172
	Annexe : quelques définitions et résultats techniques	173
	Transformations Fractionnaires Linéaires	173
	LFT supérieure et inférieure	173
	Produit de Redheffer	174
	Inégalités Matricielles Linéaires	174
	Quelques éléments historiques	174
	Définition formelle et formulation pratique	175
	Problèmes classiques et méthodes de résolution	175
	Complément de Schur	176
	Lemme de projection	177
	Lemme positif réel et lemme KYP	177
	\mathcal{S} -procédure	178
	Inégalités Matricielles Bilinéaires	179
	Liste des publications	183

Introduction

Contexte de la thèse

En dépit des avancées significatives réalisées dans le domaine de la commande non-linéaire au cours des dernières années, les méthodes d'analyse et de synthèse mises en œuvre dans le milieu industriel aéronautique reposent le plus souvent sur l'application de techniques linéaires à des modèles eux-mêmes linéarisés. Les exigences croissantes en termes de performance et de fiabilité opérationnelle nécessitent cependant d'élaborer des stratégies sans cesse plus complexes afin de remplir les objectifs imposés. Cette tendance motive aujourd'hui les automaticiens à se détourner quelque peu des techniques classiques au profit de nouvelles approches non-linéaires dont le potentiel encore inexploité apparaît particulièrement prometteur. De telles approches offrent en effet la perspective de pouvoir améliorer les critères optimisés lors de la synthèse de lois de commande de manière à mieux traduire le comportement par essence non-linéaire des systèmes étudiés. Elles permettraient également de réduire le temps ainsi que les efforts à consacrer afin de satisfaire un cahier des charges contraignant. Enfin, disposer de méthodes d'analyse non-linéaire contribuerait à réduire l'écart qui existe aujourd'hui entre le processus de synthèse proprement dit et la certification finale des commandes de vol, diminuant ainsi les coûts et les ressources nécessaires à la validation des lois de pilotage.

Il existe donc un réel besoin de mettre au point de nouveaux outils capables de prendre en compte simultanément des non-linéarités et des variations paramétriques lors du processus de synthèse, mais également de démontrer que les résultats obtenus sur le plan théorique peuvent être appliqués à des problématiques industrielles réalistes. C'est précisément dans ce cadre que s'inscrivent les travaux menés au cours de la thèse. Ils portent dans un premier temps sur le développement de méthodes d'analyse de robustesse et de synthèse de lois de commande robustes en présence de paramètres linéaires à temps variant (LTV) ou invariant (LTI). Si de telles méthodes sont naturellement adaptées à l'étude des systèmes linéaires, elles se révèlent également tout à fait pertinentes dans un contexte non-linéaire. En pratique, de nombreux paramètres interviennent en effet sous forme polynomiale ou rationnelle, par exemple lorsque l'on modélise le comportement d'un aéronef à partir des équations de la dynamique ou que l'on décrit les variations de ses coefficients aérodynamiques sur l'ensemble du domaine de vol. Dans de tels cas, il est souvent aisé de réécrire le problème sous forme LFT afin de se ramener à une représentation compatible avec les outils de robustesse évoqués ci-dessus. Les saturations et autres non-linéarités statiques sont elles aussi omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes. Une approche intuitive consiste à les modéliser par des gains équivalents afin de pouvoir cette fois encore se ramener au cas précédent, mais les résultats obtenus en pratique se révèlent le plus souvent conservatifs. Dans ce contexte, le développement de méthodes de synthèse anti-windup spécifiquement dédiées à la prise en compte de telles non-linéarités apparaît pleinement justifié et constitue la deuxième partie des travaux de thèse.

Toutes les catégories de non-linéarités rencontrées en pratique ne peuvent évidemment pas être prises en compte directement par l'une des deux approches évoquées ci-dessus. Mais l'objectif ici n'est pas de proposer une méthode différente pour chacune d'entre elles. Il consiste au contraire à montrer qu'un nombre limité d'outils s'appuyant sur le formalisme LFT et développés dans un contexte suffisamment général permet d'apporter des réponses pertinentes à de nombreuses problématiques ambitieuses auxquelles se trouve aujourd'hui confrontée l'industrie aéronautique. A titre d'exemple, l'automatisation de la phase de roulage d'un avion de transport civil représente l'un des enjeux majeurs des années à venir. Elle doit permettre de réduire la charge de travail du pilote, d'optimiser les trajectoires de l'avion sur la piste tout en renforçant la sécurité, et à plus grande échelle de réduire l'engorgement des aéroports. Il s'agit là d'un sujet difficile qui nécessite de tenir compte de nombreuses non-linéarités, notamment au niveau des forces de friction entre les roues et le sol, dont les caractéristiques dépendent de manière fortement non-linéaire de nombreux paramètres tels les angles de dérapage, la vitesse, ou encore l'état de la piste. Les travaux réalisés au cours de la thèse montrent qu'en dépit de la très forte complexité du problème, une technique de modélisation adéquate permet d'obtenir un modèle LFT représentatif du comportement de l'avion mais fortement simplifié, car dépendant uniquement de non-linéarités de type saturation, de paramètres variants et d'incertitudes, ce qui rend possible l'application directe des méthodes développées précédemment.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit se compose de trois parties. La première est consacrée à l'analyse de robustesse et à la synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV, tandis que la seconde se concentre sur la synthèse anti-windup dynamique. Les différents outils développés sont appliqués dans un troisième temps au contrôle latéral d'un avion au sol.

Le chapitre 1 présente les notions essentielles à la compréhension de la μ -analyse et de la μ -synthèse, qui permettent d'étudier des systèmes soumis à des incertitudes structurées LTI. La généralisation aux systèmes soumis également à des incertitudes LTV est alors détaillée, et l'accent est mis sur l'absence de méthode permettant de calculer une marge de stabilité ou un niveau de performance aussi efficacement que dans le cas LTI. Dans ce contexte, les chapitres 2 et 3 proposent respectivement une approche fréquentielle et une approche état afin de résoudre le problème d'analyse de robustesse mixte LTI/LTV. Lorsque cela est possible, les résultats sont généralisés aux problématiques de synthèse de correcteur et de précommande robustes.

L'objectif du chapitre 4 est de présenter l'ensemble des outils nécessaires à l'analyse des systèmes saturés et de dresser un rapide état de l'art. L'extension de ces techniques d'analyse à la synthèse de correcteurs est brièvement abordée, introduisant ainsi le chapitre 5 dans lequel sont proposées de nouvelles techniques de synthèse anti-windup dynamique. Plus précisément, une méthodologie complète permettant d'optimiser un correcteur d'ordre quelconque est mise au point. Les résultats obtenus sont ensuite généralisés aux systèmes variants et/ou incertains, faisant ainsi le lien avec les techniques d'analyse de robustesse développées précédemment.

Les trois derniers chapitres sont quant à eux consacrés à la validation de l'ensemble des outils théoriques élaborés dans les deux premières parties du manuscrit, qui sont ici appliqués au contrôle latéral d'un avion au sol. Le chapitre 6 décrit la démarche adoptée afin de construire une représentation LFT simplifiée de la dynamique latérale de l'avion à partir d'un modèle non-linéaire complet développé dans un contexte industriel. Cette

représentation met en évidence des saturations, mais également des incertitudes et des paramètres variants, ce qui suggère de définir une stratégie en deux étapes. Les incertitudes sont ignorées dans un premier temps et un correcteur anti-windup à paramètres variants est synthétisé au chapitre 7 à l'aide des outils proposés dans le chapitre 5. Les saturations sont alors converties en gains variants, ce qui permet d'appliquer au chapitre 8 les techniques d'analyse de robustesse LTI/LTV développées dans les chapitres 2 et 3, et de valider ainsi le schéma de commande proposé malgré la présence de paramètres incertains.

Conseils de lecture

Bien que faisant partie intégrante d'un document dont la structure et la cohérence se veulent résolument globales, chaque chapitre a été rendu le plus indépendant possible afin d'en faciliter la lecture. Sur la première page sont ainsi présentés un bref résumé de la problématique, une liste de mots clés ainsi que les publications personnelles associées. Les références bibliographiques et les notations spécifiques sont quant à elles regroupées dans les dernières pages.

En outre, le manuscrit se veut aussi concis que possible afin de ne pas rendre sa lecture rébarbative, et seules les contributions personnelles sont exposées dans le détail. Les résultats essentiels à la compréhension des méthodes proposées sont brièvement rappelés dans le chapitre introductif de chacune des deux premières parties, tandis que les autres travaux connexes sont simplement mentionnés dans la bibliographie. Si le lecteur n'est pas familier avec l'une des notions manipulées dans les chapitres 2, 3 et 5, il doit pouvoir trouver les explications souhaitées dans les chapitres 1 et 4, ainsi qu'en annexe. Enfin, plusieurs petites applications réalistes sont proposées tout au long du manuscrit afin de valider les techniques proposées et de faciliter leur compréhension.

Première partie

Analyse de robustesse en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV

Chapitre 1

QUELQUES NOTIONS THÉORIQUES D'ANALYSE DE ROBUSTESSE

Résumé : La μ -analyse consiste à étudier la robustesse d'un système LTI soumis à des incertitudes structurées LTI. Ce chapitre introductif présente les notions essentielles à la compréhension de cette théorie et insiste sur les aspects algorithmiques. La généralisation aux systèmes soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV est détaillée dans un deuxième temps, et l'accent est mis sur l'absence de méthode permettant de calculer une marge de stabilité ou un niveau de performance aussi efficacement que dans le cas LTI. Ce constat justifie le développement des nouvelles méthodes d'analyse de robustesse et de synthèse robuste exposées dans les chapitres 2 et 3.

Mots clés : analyse de stabilité robuste, mesure de performance robuste, μ -analyse, incertitudes structurées LTI, valeur singulière structurée, marge de robustesse, μ -synthèse, incertitudes mixtes LTI/LTV.

Sommaire

1.1	Introduction à la μ-analyse	14
1.1.1	Incertitudes structurées	14
1.1.2	Valeur singulière structurée	15
1.1.3	Marge de robustesse	17
1.1.4	Performance robuste	17
1.2	Considérations algorithmiques	19
1.2.1	Un problème de dimension infinie	19
1.2.2	Méthodes de résolution	20
1.2.3	Technique d'élimination de fréquences	21
1.3	Éléments de μ-synthèse	22
1.3.1	Un problème non-convexe	22
1.3.2	Résolution par $(D, G) - K$ itération	23
1.4	Au-delà de la μ-analyse	23
1.4.1	Stabilité robuste en présence d'incertitudes LTV	23
1.4.2	Vers la prise en compte d'incertitudes mixtes LTI/LTV	25

La μ -analyse est un outil d'analyse puissant qui permet de s'assurer de la stabilité ou de la robustesse en performance d'un système LTI soumis à des incertitudes structurées LTI telles que des incertitudes paramétriques, des dynamiques négligées, voire des retards. Introduite par [Doyle, 1982], cette théorie a été largement développée depuis pour devenir une technique mature applicable à des problématiques industrielles ambitieuses.

L'objectif de ce chapitre introductif est de présenter la μ -analyse et de donner un aperçu de son domaine d'application, mais également de ses limites. Il ne s'agit pas ici de réaliser une étude bibliographique exhaustive, mais plutôt d'insister sur les résultats et les propriétés utiles à la compréhension des chapitres suivants.

Le chapitre est organisé autour de quatre grands axes. Le paragraphe 1.1 introduit la μ -analyse dans le prolongement de l'approche H_∞ . Les notions de valeur singulière structurée et de marge de robustesse sont définies et différentes conditions de stabilité et de performance robustes sont présentées. Le paragraphe 1.2 est quant à lui consacré au calcul pratique de la marge de robustesse et une place importante est accordée à des considérations algorithmiques. Quelques éléments de μ -synthèse sont ensuite rappelés dans le paragraphe 1.3. Enfin, l'extension des techniques de μ -analyse aux incertitudes mixtes LTI/LTV est abordée dans le paragraphe 1.4, qui insiste notamment sur le manque de solutions pratiques proposées dans la littérature. Ce dernier paragraphe permet de faire le lien avec les chapitres 2 et 3, où sont proposées de nouvelles méthodes d'analyse de robustesse et de synthèse robuste LTI/LTV.

1.1 Introduction à la μ -analyse

1.1.1 Incertitudes structurées

On considère l'interconnexion représentée sur la figure 1.1, où $M(s)$ désigne un système linéaire stationnaire stable.

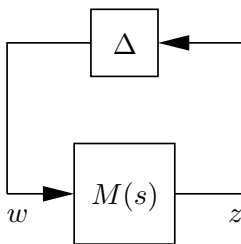


Figure 1.1 Interconnexion standard pour l'analyse de stabilité robuste.

Dans l'approche H_∞ classique, l'écart entre un système réel et son modèle $M(s)$ est assimilé à une incertitude dynamique non structurée $\Delta(s)$ bornée en gain mais de phase aléatoire, et localisée en un seul point de la boucle. Le théorème suivant fournit alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste.

Théorème 1.1.1 (théorème des petits gains, version non structurée) *Soit $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable. L'interconnexion de la figure 1.1 est stable pour toute incertitude LTI stable $\Delta(s)$ vérifiant $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ si et seulement si $\|M(s)\|_\infty \leq 1$.*

Ce cas de figure est malheureusement peu représentatif de la majorité des problèmes. D'une part, les incertitudes sur le modèle dynamique d'un système peuvent intervenir en

plusieurs points distincts de la boucle. D'autre part, elles portent souvent sur des paramètres physiques qui affectent le système de manière très structurée. Assimiler ce type d'incertitudes à une erreur dynamique globale bornée en gain peut donc se révéler très conservatif du point de vue de la robustesse, car on cherche à stabiliser une famille beaucoup trop vaste de systèmes.

La μ -analyse permet d'ajouter une information de structure afin de décrire plus fidèlement la nature et la localisation de l'incertitude. L'opérateur monolithique $\Delta(s)$ de l'approche H_∞ est remplacé par un opérateur bloc-diagonal :

$$\Delta(s) = \text{diag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_r I_{k_r}, \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s)) \quad (1.1)$$

où les δ_i sont des scalaires réels correspondant à des incertitudes paramétriques, tandis que les $\Delta_j(s)$ désignent des matrices de transfert stables sans structure particulière généralement représentatives de dynamiques négligées. On associe à l'incertitude $\Delta(s)$ décrite par la relation (1.1) la structure :

$$\Delta = \left\{ \text{diag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_r I_{k_r}, \Delta_1, \dots, \Delta_q), \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{l_j \times l_j} \right\} \quad (1.2)$$

de telle sorte que $\Delta(j\omega) \in \Delta \subset \mathbb{C}^{p \times p} \forall \omega \in \mathbb{R}$, avec $p = \sum_{i=1}^r k_i + \sum_{j=1}^q l_j$. On note alors $B(\Delta) = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$ et de manière générale $kB(\Delta) = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq k\}$.

Notation : Afin d'alléger les notations, on écrira désormais $\Delta(s) \in \mathcal{X}$ pour indiquer que l'opérateur $\Delta(s)$ vérifie la relation $\Delta(j\omega) \in \mathcal{X} \forall \omega \in \mathbb{R}$, où \mathcal{X} désigne un ensemble quelconque.

1.1.2 Valeur singulière structurée

On se place à une pulsation ω donnée et on note $M = M(j\omega) \in \mathbb{C}^{p \times p}$. On cherche alors à déterminer la taille de la plus petite perturbation Δ qui amène une valeur propre de M sur l'axe imaginaire, *i.e.* qui déstabilise le système à la pulsation ω . Dans le cas non structuré, qui correspond à $\Delta = \mathbb{C}^{p \times p}$, on peut montrer que la plus petite valeur de k pour laquelle il existe une incertitude $\Delta \in kB(\Delta)$ telle que $\det(I - M\Delta) = 0$ est $\bar{\sigma}(M)^{-1}$. Dans le cas d'une structure Δ quelconque, la notion de plus grande valeur singulière est remplacée par celle de valeur singulière structurée, introduite initialement par [Doyle, 1982; Safonov, 1982] dans le but d'étudier la robustesse de systèmes soumis à des incertitudes structurées complexes, puis généralisée par [Fan *et al.*, 1991] afin de prendre également en compte des incertitudes paramétriques réelles.

Définition 1.1.2 (valeur singulière structurée μ_Δ) Soient M une matrice complexe et Δ une structure donnée. S'il n'existe pas d'incertitude $\Delta \in \Delta$ qui rend la matrice $I - \Delta M$ singulière, alors la valeur singulière structurée est définie par $\mu_\Delta(M) = 0$. Sinon :

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min \{k \in \mathbb{R}_+ : \exists \Delta \in kB(\Delta), \det(I - \Delta M) = 0\}} \quad (1.3)$$

Une présentation détaillée de μ_Δ et de ses propriétés est proposée dans [Packard et Doyle, 1993]. L'une d'entre elles se révélera particulièrement utile dans les chapitres 2 et 3.

Proposition 1.1.3 Soient M une matrice complexe et Δ une structure donnée. On a :

$$\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(M^*) \quad (1.4)$$

Le calcul exact de $\mu_{\Delta}(M)$ est NP-difficile dans le cas général [Braatz *et al.*, 1994], mais il existe des algorithmes en temps polynomial permettant de calculer une borne supérieure avec une bonne précision. On définit pour cela deux ensembles de matrices de scaling :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{TI}} &= \{D \in \mathbb{C}^{p \times p}, D = D^* > 0 : \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, D\Delta = \Delta D\} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{TI}} &= \{G \in \mathbb{C}^{p \times p}, G = G^* : \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, G\Delta = \Delta^* G\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

En utilisant la description (1.2) de la structure $\mathbf{\Delta}$, on montre aisément que :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{TI}} &= \{diag(D_1, \dots, D_r, d_1 I_{l_1}, \dots, d_q I_{l_q}) \in \mathbb{C}^{p \times p}, D_i = D_i^* > 0, d_i > 0\} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{TI}} &= \{diag(G_1, \dots, G_r, 0_{l_1}, \dots, 0_{l_q}) \in \mathbb{C}^{p \times p}, G_i = G_i^*\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

On introduit alors la borne supérieure de la valeur singulière structurée μ_{Δ} proposée par [Fan *et al.*, 1991; Young *et al.*, 1995].

Proposition 1.1.4 (borne supérieure de μ_{Δ}) Soient M une matrice complexe et $\mathbf{\Delta}$ une structure donnée. Soit β un scalaire positif. S'il existe des matrices de scaling $D \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $G \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ qui vérifient la relation :

$$M^*DM + j(GM - M^*G) \leq \beta^2 D \quad (1.7)$$

ou l'une des deux inégalités ci-dessous, avec $\tilde{D} = D^{1/2}$ et $\tilde{G} = \beta^{-1}D^{-1/2}GD^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \left(\left(\frac{\tilde{D}M\tilde{D}^{-1}}{\beta} - j\tilde{G} \right) (I + \tilde{G}^2)^{-\frac{1}{2}} \right) &\leq 1 \\ \bar{\sigma} \left((I + \tilde{G}^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{D}^{-1}M^*\tilde{D}}{\beta} + j\tilde{G} \right) \right) &\leq 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

ou encore l'inégalité suivante, avec $\hat{D} = P$ et $\hat{G} = V^*\tilde{G}V$, la matrice hermitienne définie positive P et la matrice unitaire V étant issues de la décomposition polaire $\tilde{D} = VP$:

$$\bar{\sigma} \left((I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\hat{D}M\hat{D}^{-1}}{\beta} - j\hat{G} \right) (I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} \right) \leq 1 \quad (1.9)$$

alors $\mu_{\Delta}(M) \leq \beta$.

Remarque 1.1.5 Les ensembles des matrices de scaling admissibles \tilde{D} et \tilde{G} associées à la formulation (1.8) seront désormais notés $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{TI}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{TI}}$.

Remarque 1.1.6 La formulation (1.8) est plus pertinente que la formulation (1.7) en termes de complexité numérique. C'est d'ailleurs cette approche qui est utilisée par défaut dans la routine `mussv.m` de la *Robust Control Toolbox* pour Matlab [Balas *et al.*, 2007].

D'autres formulations moins conservatives ont été proposées, notamment par [Fu et Barabanov, 1997], mais elles sont peu utilisées, car le conservatisme introduit par la proposition 1.1.4 est le plus souvent très raisonnable en pratique [Ferrerres, 1999]. L'écart entre $\mu_{\Delta}(M)$ et sa borne supérieure est même nul lorsque $2r + q \leq 3$ [Meinsma *et al.*, 1997]. Il peut néanmoins devenir arbitrairement grand en présence d'incertitudes réelles répétées [Sznaier et Parrilo, 1999].

Une approche intuitive permettant d'évaluer cet écart consiste à calculer une borne inférieure de $\mu_{\Delta}(M)$. [Young et Doyle, 1997] propose un algorithme en temps polynomial,

qui possède de bonnes propriétés de convergence en présence d'incertitudes mixtes réelles et complexes. Dans le cas purement réel, [Ferrerres et Biannic, 2001] offre une alternative intéressante.

Une borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M)$ donne donc une garantie - généralement pessimiste - de robustesse, alors qu'une borne inférieure fournit une perturbation déstabilisante et permet de mesurer l'écart avec la borne supérieure.

Remarque 1.1.7 *Il existe des méthodes en temps exponentiel permettant d'obtenir des bornes de $\mu_{\Delta}(M)$ moins conservatives, proposées notamment par [De Gaston et Safonov, 1988] pour la borne supérieure et [Dailey, 1990] pour la borne inférieure. Ces deux approches sont cependant limitées aux incertitudes paramétriques réelles non répétées et ne permettent généralement pas de considérer un nombre élevé d'incertitudes.*

1.1.3 Marge de robustesse

Le théorème ci-dessous propose une condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste en présence d'incertitudes structurées. Il généralise ainsi le théorème 1.1.1, car il permet de prendre en compte des informations sur la structure de l'opérateur $\Delta(s)$ grâce à l'utilisation de la valeur singulière structurée μ_{Δ} introduite au paragraphe 1.1.2.

Théorème 1.1.8 (théorème des petits gains, version structurée) *Soit $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable. L'interconnexion de la figure 1.1 est stable pour toute incertitude LTI stable $\Delta(s) \in B(\Delta)$ si et seulement si :*

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq 1 \quad (1.10)$$

La notion de marge de robustesse découle naturellement de cette caractérisation de la stabilité robuste. Elle correspond à la plus grande valeur de k qui garantit la stabilité pour tout opérateur $\Delta(s)$ de structure (1.2) vérifiant les contraintes $-k \leq \delta_i \leq k$ et $\|\Delta_j(s)\|_{\infty} \leq k$.

Définition 1.1.9 (marge de robustesse) *La marge de robustesse k_{max} d'un système linéaire stationnaire stable $M(s)$ est définie par :*

$$k_{max} = \frac{1}{\max_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(M(j\omega))} \quad (1.11)$$

La stabilité de l'interconnexion de la figure 1.1 est donc garantie pour toute incertitude LTI stable $\Delta(s) \in k_{max}B(\Delta)$.

Le calcul de la marge de robustesse repose directement sur celui de μ_{Δ} . Plus précisément, la détermination d'une borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ sur \mathbb{R} fournit une borne inférieure de la marge de robustesse, et donc une garantie de stabilité robuste.

1.1.4 Performance robuste

Une condition analogue à celle du théorème 1.1.8 peut être obtenue afin de caractériser la performance robuste. On considère maintenant l'interconnexion de la figure 1.2, où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable et $\Delta(s) \in \Delta$ une incertitude LTI stable. Le problème de performance robuste consiste à calculer la plus grande valeur de la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'entrée de référence y_r et la sortie y en présence d'incertitudes structurées $\Delta(s) \in B(\Delta)$, *i.e.* la plus petite valeur de γ telle que :

$$\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} = \|\mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s))\|_{\infty} \leq \gamma \quad \forall \Delta(s) \in B(\Delta) \quad (1.12)$$

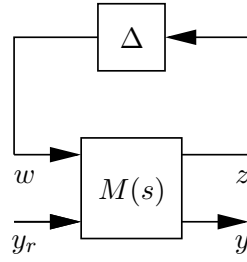


Figure 1.2 Interconnexion standard pour l'analyse de performance robuste.

On introduit pour cela un opérateur fictif non structuré $\Delta_P(s)$ afin de se ramener à un problème de stabilité robuste augmenté. Plus précisément, on applique le théorème 1.1.1 au système $\mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s))$: l'interconnexion $\mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s)), \Delta_P(s))$ est stable pour tout opérateur $\Delta_P(s) \in B(\mathbb{C}^{m \times m})$ si et seulement si $\|\mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s))\|_\infty \leq 1$. En combinant cette condition avec la contrainte d'existence de la LFT $\mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s))$ pour tout $\Delta(s) \in B(\Delta)$, on obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 1.1.10 (test de performance robuste) Soit $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable. L'interconnexion de la figure 1.2 vérifie :

$$\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq 1$$

pour toute incertitude LTI stable $\Delta(s) \in B(\Delta)$ si et seulement si :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_a}(M(j\omega)) \leq 1 \quad (1.13)$$

où Δ_a représente la structure augmentée :

$$\Delta_a = \{\text{diag}(\Delta, \Delta_P) : \Delta \in \Delta, \Delta_P \in \mathbb{C}^{m \times m}\}$$

Ce résultat permet de déterminer si l'inégalité (1.12) est vérifiée pour $\gamma = 1$, mais non de calculer la valeur minimale de γ . Pour résoudre le problème de performance robuste dans toute sa généralité, on revient momentanément à l'interconnexion de la figure 1.1 et on scinde le bloc $\Delta(s) \in \Delta$ en deux parties $\Delta_1(s) \in \Delta_1$ et $\Delta_2(s) \in \Delta_2$. On introduit alors la notion de valeur singulière structurée dissymétrique [Fan et Tits, 1992], qui pour une pulsation donnée correspond à l'inverse de la taille de la plus petite perturbation $\Delta_2 \in \Delta_2$ qui déstabilise le système lorsque Δ_1 est maintenue dans la boule unité $B(\Delta_1)$.

Définition 1.1.11 (valeur singulière structurée dissymétrique ν_Δ) Soient M une matrice complexe et $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$ une structure donnée. S'il n'existe pas d'incertitude $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2) \in \Delta$ avec $\Delta_1 \in B(\Delta_1)$ qui rend la matrice $I - \Delta M$ singulière, alors la valeur singulière structurée dissymétrique est définie par $\nu_\Delta(M) = 0$. Sinon :

$$\nu_\Delta(M) = \frac{1}{\min\{k \in \mathbb{R}_+ : \exists \Delta = \text{diag}(\Delta_1, k\Delta_2), \Delta_i \in B(\Delta_i), \det(I - \Delta M) = 0\}} \quad (1.14)$$

De la même manière que pour la valeur singulière structurée classique, le calcul exact de ν_Δ est NP-difficile, mais il est possible de calculer en temps polynomial une borne supérieure inspirée de celle de μ_Δ .

Proposition 1.1.12 (borne supérieure de ν_{Δ}) Soient M une matrice complexe et $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$ une structure donnée. Soient γ un scalaire positif et $\mathcal{L}_{\gamma} = \text{diag}(I_p, \gamma^2 I_m)$. S'il existe des matrices de scaling $\mathcal{D} = \text{diag}(D_1, D_2) \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $\mathcal{G} = \text{diag}(G_1, G_2) \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ qui vérifient la relation :

$$M^* \mathcal{D} M + j(\mathcal{G} M - M^* \mathcal{G}) \leq \mathcal{L}_{\gamma} \mathcal{D} \quad (1.15)$$

alors $\nu_{\Delta}(M) \leq \gamma$.

Le problème de performance robuste, qui consiste à reboucler l'interconnexion de la figure 1.2 par un opérateur fictif non structuré $\Delta_P(s)$ dont on cherche à maximiser la taille, est donc équivalent à un problème de valeur singulière structurée dissymétrique avec $\Delta_1(s) \leftarrow \Delta(s)$ et $\Delta_2(s) \leftarrow \Delta_P(s)$. Le théorème 1.1.10 peut alors être généralisé en faisant intervenir ν_{Δ} plutôt que μ_{Δ} .

Théorème 1.1.13 (calcul de performance robuste) Soit $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable. L'interconnexion de la figure 1.2 vérifie :

$$\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma$$

pour toute incertitude LTI stable $\Delta(s) \in B(\Delta)$ si et seulement si :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \nu_{\Delta_{\mathbf{a}}}(M(j\omega)) \leq \gamma \quad (1.16)$$

où $\Delta_{\mathbf{a}}$ représente la structure augmentée :

$$\Delta_{\mathbf{a}} = \{ \text{diag}(\Delta, \Delta_P) : \Delta \in \Delta, \Delta_P \in \mathbb{C}^{m \times m} \}$$

Dans le cas du problème de performance robuste présenté ici, les matrices de scaling associées au bloc complexe plein Δ_P sont simplement $D_2 = I_m$ et $G_2 = 0_m$.

1.2 Considérations algorithmiques

1.2.1 Un problème de dimension infinie

Le calcul exact de la valeur singulière structurée n'étant le plus souvent pas envisageable, on reformule la version structurée du théorème des petits gains afin de faire intervenir la borne supérieure de μ_{Δ} introduite dans la proposition 1.1.4, ce qui conduit à la condition suffisante de stabilité robuste suivante.

Proposition 1.2.1 Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et Δ une structure donnée. Soit β un scalaire positif. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ il existe des matrices de scaling $D(\omega) \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $G(\omega) \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ telles que :

$$M^*(j\omega) D(\omega) M(j\omega) + j(G(\omega) M(j\omega) - M^*(j\omega) G(\omega)) \leq \beta^2 D(\omega) \quad (1.17)$$

ou des matrices de scaling $\tilde{D}(\omega) \in \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{TI}}$ et $\tilde{G}(\omega) \in \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{TI}}$ telles que :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\frac{\tilde{D}(\omega) M(j\omega) \tilde{D}(\omega)^{-1}}{\beta} - j\tilde{G}(\omega) \right) \left(I + \tilde{G}(\omega)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \quad (1.18)$$

alors $\max_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq \beta$ et l'interconnexion de la figure 1.1 est stable pour toute incertitude $\Delta(s) \in \frac{1}{\beta} B(\Delta)$.

Le problème posé par la proposition 1.2.1 consiste à minimiser la valeur de β sous la contrainte LMI (1.17) ou (1.18), qui doit être vérifiée pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un problème d'optimisation convexe en $D(\omega)$ et $G(\omega)$, mais présentant une infinité d'équations et d'inconnues.

Remarque 1.2.2 *On peut se contenter de résoudre ce problème sur \mathbb{R}_+ . En effet, $D(\omega)$ et $G(\omega)$ vérifient l'inégalité (1.17) pour une pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ donnée si et seulement si $\overline{D(\omega)}$ et $-\overline{G(\omega)}$ vérifient cette même inégalité pour $-\omega$.*

1.2.2 Méthodes de résolution

Une technique classique de résolution consiste à calculer une borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ sur un maillage fréquentiel, et non sur \mathbb{R} tout entier. Cette méthode est très simple mais présente des inconvénients majeurs. Le temps de calcul augmente en effet proportionnellement à la taille du maillage et peut rapidement devenir prohibitif si l'on prend en compte un nombre important de fréquences. D'autre part, quelle que soit la finesse du maillage, rien ne garantit que l'on ne laisse pas de côté une fréquence critique correspondant à la valeur maximale de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$. Cette remarque est particulièrement vraie dans le cas des systèmes flexibles, pour lesquels la fonction $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ présente généralement des pics très marqués mais néanmoins très étroits. Il y a donc un risque de surestimer la marge de robustesse du système considéré, ce qui n'est évidemment pas souhaitable.

De nombreux travaux ont été menés pour remédier à ce problème et éviter une résolution discontinue sur un maillage. L'une des premières idées a été de considérer la pulsation comme une incertitude réelle répétée, *i.e.* de travailler avec un bloc d'incertitudes augmenté de la forme $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\omega I_n, \Delta)$, où n représente l'ordre du système $M(s)$ [Sideris, 1992]. Une telle approche se révèle cependant inapplicable dans le cas de systèmes d'ordre n élevé, en raison du nombre important de variables d'optimisation constituant les matrices de scaling D et G associées au bloc ωI_n . D'autres approches ont été proposées depuis, notamment par [Ferrerres et Fromion, 1997], qui font appel à la valeur singulière structurée dissymétrique, et par [Ly *et al.*, 1998], qui utilisent une approche par multiplieurs.

Plus récemment, [Biannic et Ferreres, 2005] ont mis au point un algorithme efficace, dont l'idée centrale consiste à calculer des matrices de scaling sous-optimales valables à deux fréquences différentes, puis à déterminer l'ensemble des fréquences pour lesquelles ces matrices restent valables. Cela permet d'obtenir à faible coût une borne supérieure de μ_{Δ} sur un ensemble d'intervalles fréquentiels. Le continuum de fréquences initial est donc scindé en un ensemble d'intervalles qui sont peu à peu éliminés au fur et à mesure qu'une borne supérieure de μ_{Δ} est déterminée sur chacun d'entre eux. Le détail de cet algorithme est donné ci-dessous.

Algorithme 1.2.3

1. Choisir un maillage fréquentiel initial $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ de petite taille. Poser $\beta_{max} = 0$.
2. Construire l'ensemble d'intervalles $\mathcal{I} = \{\Omega_k = [\omega_k, \omega_{k+1}], k = 1, \dots, N - 1\}$ associé au maillage.
3. Sélectionner un intervalle $\Omega_k \in \mathcal{I}$. Calculer un triplet $(\beta_k, \hat{D}_k, \hat{G}_k)$ tel que l'inégalité (1.9) soit vérifiée pour $M = (M(j\omega_k) + M(j\omega_{k+1}))/2$. Augmenter alors la valeur de β_k jusqu'à atteindre une valeur $\hat{\beta}_k$ telle que le triplet $(\hat{\beta}_k, \hat{D}_k, \hat{G}_k)$ vérifie l'inégalité (1.9) pour $M = M(j\omega_k)$ et pour $M = M(j\omega_{k+1})$.

4. Si $\hat{\beta}_k > (1 + \epsilon)\beta_k$, où $\epsilon > 0$ représente une tolérance donnée, ajouter la pulsation $(\omega_k + \omega_{k+1})/2$ au maillage et retourner à l'étape 2. Sinon, réaliser l'opération $\beta_{max} \leftarrow \max(\beta_{max}, \hat{\beta}_k)$ et passer à l'étape 5.
5. Calculer l'ensemble \mathcal{J} des intervalles fréquentiels pour lesquels le triplet $(\hat{\beta}_k, \hat{D}_k, \hat{G}_k)$ vérifie l'inégalité (1.9) en utilisant la technique d'élimination de fréquences détaillée au paragraphe 1.2.3. Mettre à jour \mathcal{I} en supprimant tous les intervalles de \mathcal{J} , i.e. effectuer l'opération $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$. Si $\mathcal{I} \neq \emptyset$, retourner à l'étape 3. Sinon, interrompre l'algorithme.

Cet algorithme est présenté en détail dans [Biannic et Ferreres, 2005; Ferreres *et al.*, 2003] et fait partie intégrante de la Skew Mu Toolbox pour Matlab [Ferreres et Biannic, 2004]. Sa convergence est assurée et il garantit que la borne supérieure β_{max} de μ_{Δ} obtenue est bien valable sur \mathbb{R} tout entier : il n'est donc pas possible de passer à côté d'une fréquence critique.

Une méthode voisine a été proposée par [Lawrence *et al.*, 2000], qui repose quant à elle sur la détermination de matrices de scaling optimales permettant de calculer la valeur exacte de la borne supérieure de μ_{Δ} de [Fan *et al.*, 1991], et non une valeur sous-optimale comme c'est le cas dans [Biannic et Ferreres, 2005]. Cependant, et contrairement à la technique décrite ci-dessus, une telle approche peut se révéler médiocre d'un point de vue numérique. D'autre part, le conservatisme introduit dans l'algorithme 1.2.3 par les matrices de scaling sous-optimales demeure très faible si une valeur suffisamment petite de ϵ est choisie à l'étape 4, ce qui contribue à en faire une méthode attractive.

1.2.3 Technique d'élimination de fréquences

La pertinence de l'algorithme 1.2.3 repose sur la capacité à déterminer rapidement à l'étape 5 l'ensemble des pulsations ω pour lesquelles un triplet $(\beta, \hat{D}, \hat{G})$ donné vérifie l'inégalité (1.9) pour $M = M(j\omega)$. L'objectif de ce paragraphe est de détailler ce point précis, qui sera ensuite exploité au chapitre 2.

Soient (A, B, C, D) une représentation d'état de $M(s)$ et ω_0 une pulsation donnée. Soient \hat{D} et \hat{G} des matrices de scaling et β un réel positif qui vérifient l'inégalité (1.9) pour $M = M(j\omega_0)$. On pose alors :

$$H(\omega_0) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega_0} \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} D & \frac{C}{\sqrt{j}} \\ \frac{B}{\sqrt{j}} & -jA \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & I \\ -I & -I \end{bmatrix} \right)$$

où \mathcal{R} représente le produit de Redheffer (voir annexe), et on définit la matrice $\mathcal{H}(\omega_0)$:

$$\mathcal{H}(\omega_0) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{22}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{H}_{21} \\ \tilde{H}_{12}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{H}_{11} \\ \tilde{H}_{11}^* & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{21}^* \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

avec :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \frac{H_{11}}{\beta} \hat{D}^{-1} - j\hat{G} & \hat{D} \frac{H_{12}}{\beta} \\ \frac{H_{21}}{\beta} \hat{D}^{-1} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Lemme 1.2.4 Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et ω_0 une pulsation donnée. Soit $(\beta, \hat{D}, \hat{G})$ un triplet vérifiant l'inégalité (1.9) pour $M = M(j\omega_0)$. Soient η_1, \dots, η_q les valeurs propres réelles de la matrice $\mathcal{H}(\omega_0)$ définie par la relation (1.19). Pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$, il existe $i \in [1, p]$ tel que :

$$\sigma_i \left((I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\hat{D}M(j\omega)\hat{D}^{-1}}{\beta} - j\hat{G} \right) (I + \hat{G}^2)^{-\frac{1}{4}} \right) = 1$$

si et seulement si il existe $j \in [1, q]$ tel que $\omega = \hat{\omega}_j = \omega_0 + \frac{1}{\eta_j}$.

L'ensemble \mathcal{J} des intervalles fréquentiels pour lesquels un triplet $(\beta, \hat{D}, \hat{G})$ donné vérifie l'inégalité (1.9) peut donc être déterminé de la manière suivante :

1. Initialiser $\mathcal{J} = \emptyset$.
2. Calculer les pulsations critiques positives $\hat{\omega}_j$ définies par le lemme 1.2.4 et les classer par ordre croissant. Poser $\hat{\omega}_0 = 0$ et $\hat{\omega}_{q+1} = +\infty$.
3. Pour chaque valeur de $j \in [0, q]$, choisir une pulsation quelconque $\omega_j \in [\hat{\omega}_j, \hat{\omega}_{j+1}]$. D'après le lemme 1.2.4, si l'inégalité (1.9) est satisfaite en ω_j , alors elle l'est également en tout point de $[\hat{\omega}_j, \hat{\omega}_{j+1}]$. Dans ce cas, ajouter l'intervalle $[\hat{\omega}_j, \hat{\omega}_{j+1}]$ à l'ensemble \mathcal{J} .

Cette approche utilise la formulation $\bar{\sigma}$ de la borne supérieure de μ_{Δ} . Il est également possible de calculer les pulsations critiques à l'aide de la méthode de [Parrilo, 1999] qui s'appuie quant à elle sur la formulation LMI de la borne supérieure de μ_{Δ} .

1.3 Eléments de μ -synthèse

1.3.1 Un problème non-convexe

La μ -synthèse est une généralisation de la synthèse H_{∞} au cas où l'opérateur $\Delta(s)$ est structuré. Le problème standard de μ -synthèse peut s'énoncer de la manière suivante : étant donnée l'interconnexion de la figure 1.3, déterminer un correcteur $K(s)$ qui stabilise le système en boucle ouverte $P(s)$ en présence d'incertitudes structurées $\Delta(s) \in B(\Delta)$.

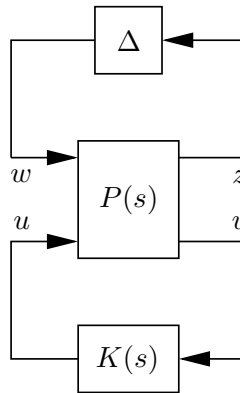


Figure 1.3 Interconnexion standard pour la synthèse robuste.

D'après le théorème 1.1.8, la stabilité de la boucle fermée est garantie pour tout opérateur $\Delta(s) \in B(\Delta)$ si et seulement si $K(s)$ vérifie :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(\mathcal{F}_l(P(s), K(s))) \leq 1$$

Comme dans le cas de l'analyse de robustesse, on remplace μ_{Δ} par sa borne supérieure, ce qui conduit à la condition suffisante suivante :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \min_{\substack{\tilde{D}(\omega) \in \tilde{\mathbf{D}}_{\text{TI}} \\ \tilde{G}(\omega) \in \tilde{\mathbf{G}}_{\text{TI}}} \bar{\sigma} \left(\left(\tilde{D}(\omega) \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \tilde{D}(\omega)^{-1} - j\tilde{G}(\omega) \right) \left(I + \tilde{G}(\omega)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \quad (1.20)$$

1.3.2 Résolution par $(D, G) - K$ itération

La condition (1.20) n'est pas convexe et il n'existe pas d'algorithme permettant de vérifier directement si elle est satisfaite. Cependant, la convexité est restaurée dès que l'on fixe le correcteur $K(s)$ ou les matrices de scaling $\tilde{D}(\omega)$ et $\tilde{G}(\omega)$, ce qui suggère une résolution itérative. Cette heuristique a été proposée par [Doyle, 1985] dans le cas d'incertitudes complexes sous le nom de $D - K$ itération.

Algorithme 1.3.1 ($D - K$ itération)

1. Initialiser l'algorithme par $\tilde{D}(s) = I$.
2. Intégrer la fonction $\tilde{D}(s)$ dans le système $P(s)$ pour obtenir le système augmenté :

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} \tilde{D}(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} \tilde{D}(s)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

et résoudre en $K(s)$ le problème H_{∞} suivant :

$$\min_{K(s)} \|\mathcal{F}_l(P_a(s), K(s))\|_{\infty}$$

3. Fixer $K(s)$ et résoudre en \tilde{D} sur un maillage fréquentiel $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ les problèmes convexes :

$$\min_{\tilde{D} \in \tilde{\mathbf{D}}_{\text{TI}}} \bar{\sigma} \left(\tilde{D} \mathcal{F}_l(P(j\omega_i), K(j\omega_i)) \tilde{D}^{-1} \right)$$

Soient $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_N$ les valeurs optimales ainsi obtenues. Construire une fonction rationnelle $\tilde{D}(s)$ qui interpole les \tilde{D}_i sur le maillage.

4. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à convergence.

Soit α_{opt} la valeur optimale obtenue par cet algorithme. Si $\alpha_{opt} \leq 1$, le correcteur $K(s)$ calculé répond aux exigences de stabilité robuste. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de conclure quant à la faisabilité du problème.

L'algorithme 1.3.1 a été généralisé en $(D, G) - K$ itération afin de prendre en compte des incertitudes réelles par [Young, 1996]. Une alternative à la $(D, G) - K$ itération est proposée au chapitre 3, ainsi qu'une discussion sur les avantages et inconvénients de chacune des deux approches.

1.4 Au-delà de la μ -analyse

1.4.1 Stabilité robuste en présence d'incertitudes LTV

La μ -analyse est reconnue comme un outil efficace d'analyse de robustesse, mais son domaine d'application reste limité car elle ne permet de prendre en compte que des incertitudes LTI. Cependant, de nombreux problèmes pratiques nécessitent de considérer également des incertitudes LTV :

- pour représenter des paramètres variants : évolution de la masse et du centrage d'un aéronef lors du largage d'une charge, ou de l'angle d'incidence et du nombre de Mach lors de la modification du point de vol (voir chapitres 2 et 3),
- pour modéliser des non-linéarités : représentation de saturations ou de zones mortes par des gains équivalents (voir chapitre 8).

L'extension des techniques de μ -analyse aux incertitudes LTV a donc été logiquement étudiée, et des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité robuste peuvent être énoncées. On revient pour cela à l'interconnexion de la figure 1.1. $M(s)$ désigne toujours un système linéaire stationnaire stable, mais est maintenant soumis à des incertitudes structurées LTV, *i.e.* rebouclé par un opérateur :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}_2^p &\rightarrow \mathcal{L}_2^p \\ (t, z) &\rightarrow w \end{aligned} \quad (1.21)$$

qui vérifie $\Delta(t, \bullet) \in \mathbf{\Delta} \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Notation : On écrira indifféremment $\Delta(t)$ pour désigner l'opérateur LTV structuré $\Delta : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}_2^p \rightarrow \mathcal{L}_2^p$ ou sa représentation matricielle $\Delta(t, \bullet) \in \mathbf{\Delta}$ à l'instant t .

En suivant la même démarche que dans le cas LTI, la robustesse d'un système en présence d'incertitudes LTV est alors évaluée en optimisant des matrices de scaling. On définit pour cela deux nouveaux ensembles :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}} &= \{D \in \mathbb{R}^{p \times p}, D = D^T > 0 : \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, D\Delta = \Delta D\} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{T}\mathbf{V}} &= \{G \in j\mathbb{R}^{p \times p}, G = G^* : \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, G\Delta = \Delta^*G\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

que l'on peut également exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}} &= \{diag(D_1, \dots, D_r, d_1 I_{l_1}, \dots, d_q I_{l_q}) \in \mathbb{R}^{p \times p}, D_i = D_i^T > 0, d_i > 0\} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{T}\mathbf{V}} &= \{diag(G_1, \dots, G_r, 0_{l_1}, \dots, 0_{l_q}) \in j\mathbb{R}^{p \times p}, G_i = G_i^*\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

et qui permettent de formuler des conditions de stabilité robuste [Shamma, 1994; Meinsma et al., 2000].

Proposition 1.4.1 Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et $\mathbf{\Delta}$ une structure donnée. L'interconnexion de la figure 1.1 est stable pour toute incertitude $\Delta(t) \in B(\mathbf{\Delta})$ si et seulement si il existe des matrices de scaling $D \in \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $G \in \mathbf{G}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ telles que pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$:

$$M^*(j\omega)DM(j\omega) + j(GM(j\omega) - M^*(j\omega)G) \leq D \quad (1.24)$$

ou des matrices de scaling $\tilde{D} \in \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $\tilde{G} \in \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ telles que pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\bar{\sigma} \left(\left(\tilde{D}M(j\omega)\tilde{D}^{-1} - j\tilde{G} \right) \left(I + \tilde{G}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \quad (1.25)$$

Remarque 1.4.2 Les ensembles $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ sont définis à partir des ensembles $\mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ de la même manière qu’au paragraphe 1.1.2.

Remarque 1.4.3 Comme dans le cas LTI, on peut se contenter de résoudre ce problème sur \mathbb{R}_+ . En effet, les matrices D et G vérifient l’inégalité (1.24) pour une pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ donnée si et seulement si elles vérifient cette même inégalité pour $-\omega$. A partir de maintenant, on se limitera donc toujours à $\omega \in \mathbb{R}_+$, et ce quelles que soient les incertitudes considérées.

La caractérisation de la proposition 1.4.1 est similaire à celle de la proposition 1.2.1, mais présente toutefois deux différences majeures :

- Les matrices de scaling ne dépendent pas de la fréquence et restent donc constantes sur \mathbb{R} tout entier. De plus, leurs domaines de définition sont réduits par rapport au cas LTI, puisque D est réelle et G imaginaire pure.
- Les conditions (1.24) et (1.25) sont non seulement suffisantes, mais également nécessaires, et ce quel que soit le nombre de blocs qui constituent la structure des incertitudes LTV. Ce résultat contraste avec le cas LTI, dans lequel les conditions de stabilité (1.17) et (1.18) deviennent conservatives dès que la structure (1.2) vérifie $2r + q > 3$.

D’autres conditions ont également été proposées, notamment par [Megretski et Treil, 1993].

Remarque 1.4.4 Lors de la définition de l’opérateur $\Delta(t)$, aucune hypothèse n’est faite sur la vitesse de variation des incertitudes, ce qui signifie que l’on évalue ici la robustesse du système $M(s)$ en présence d’incertitudes à variations arbitrairement rapides. Le cas des incertitudes LTV à vitesse de variation bornée a également fait l’objet de nombreuses études [Poolla et Tikku, 1995; Chou et Tits, 1995; Jonsson et Rantzer, 1996] mais n’est pas détaillé ici.

1.4.2 Vers la prise en compte d’incertitudes mixtes LTI/LTV

La similitude entre les propositions 1.2.1 et 1.4.1 suggère de combiner les deux classes de matrices de scaling afin d’évaluer la marge de robustesse d’un système soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV. Dans ce cas, le bloc Δ de la figure 1.1 s’écrit sous la forme $\Delta = \text{diag}(\Delta_{\mathbf{T}\mathbf{I}}(s), \Delta_{\mathbf{T}\mathbf{V}}(t))$. On note respectivement $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{I}}$ et $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ les structures correspondant aux incertitudes LTI et LTV, *i.e.* $\Delta_{\mathbf{T}\mathbf{I}}(s) \in \mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{I}}$ et $\Delta_{\mathbf{T}\mathbf{V}}(t) \in \mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$. Les matrices de scaling associées à cette structure $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{I}}, \mathbf{\Delta}_{\mathbf{T}\mathbf{V}})$ sont alors de la forme $D(\omega) = \text{diag}(D_{\mathbf{T}\mathbf{I}}(\omega), D_{\mathbf{T}\mathbf{V}}) \in \mathbf{D}$ avec $D_{\mathbf{T}\mathbf{I}}(\omega) \in \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{I}}$ pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$, $D_{\mathbf{T}\mathbf{V}} \in \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{I}}, \mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}})$. Les matrices $G(\omega)$ sont définies de la même manière.

Cette approche est intuitive mais se heurte à d’importantes difficultés d’ordre algorithmique et il existe peu de méthodes permettant la détermination pratique d’une marge de robustesse pour un système soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV. La plupart d’entre elles proposent une résolution sur un maillage fréquentiel [Lind *et al.*, 1995; Sparks *et al.*, 1996; Paganini, 1996], mais les arguments avancés au paragraphe 1.2.1 montrent qu’elles ne peuvent pas apporter une solution satisfaisante. L’approche de [Bianic et Ferreres, 2005] est quant à elle pertinente dans le cas LTI mais n’est pas applicable dans le cas mixte LTI/LTV, car elle nécessite de pouvoir déterminer les matrices de scaling indépendamment à chaque fréquence, ce qui n’est plus possible ici en raison des matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV.

Conclusion

La μ -analyse est aujourd'hui une technique bien mature et il existe des algorithmes performants qui ont démontré leur efficacité sur des applications réalistes. La généralisation de cette approche aux systèmes soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV est quant à elle plus contrastée : si les travaux théoriques portant sur l'obtention de conditions de stabilité robuste ont été menés à terme, il n'en est pas de même sur le plan pratique. En effet, il n'existe pas de méthode permettant de calculer une marge de stabilité robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV aussi efficacement que dans le cas purement LTI. Dans ce contexte, la première contribution des travaux de thèse consiste à apporter une solution à ce problème :

- le chapitre 2 propose une approche fréquentielle qui exploite la technique d'élimination de fréquences détaillée au paragraphe 1.2.3 et généralise en quelque sorte l'approche de [Biannic et Ferreres, 2005],
- le chapitre 3 propose une approche état fondée sur la notion de semi-positivité réelle qui exploite une formulation généralisée du lemme positif réel.

Lorsque cela est possible, ces deux approches sont généralisées aux problématiques de synthèse de correcteur et de précommande robustes.

Notations

LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Ensemble des matrices complexes de taille $m \times n$
I_m	Matrice identité de taille $m \times m$
0_m	Matrice nulle de taille $m \times m$
$\bar{\sigma}(M)$	Plus grande valeur singulière de la matrice M
\overline{M}	Conjuguée de la matrice M
M^T	Transposée de la matrice M
M^*	Transconjuguée de la matrice M
$\mathcal{F}_u(M, N)$	LFT supérieure (voir annexe)
$\mathcal{F}_l(M, N)$	LFT inférieure (voir annexe)
$\mathcal{R}(M, N)$	Produit de Redheffer (voir annexe)
\mathcal{L}_2^p	Ensemble des signaux d'énergie finie de dimension p
δ_i, Δ_j	Incertaince paramétrique, bloc complexe plein

Références

[Balas *et al.*, 2007] G. Balas, R. Chiang, A. Packard et M. Safonov. *Robust Control Toolbox user's guide*. The MathWorks, Inc., 2007.

- [Biannic et Ferreres, 2005] J.-M. Biannic et G. Ferreres. Efficient computation of a guaranteed robustness margin. Dans *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, Juillet 2005.
- [Braatz *et al.*, 1994] R.P. Braatz, P.M. Young, J.C. Doyle et M. Morari. Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5): 1000–1002, 1994.
- [Chou et Tits, 1995] Y.S. Chou et A. Tits. On robust stability under slowly-varying memoryless uncertainty. Dans *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4321–4326, New Orleans, USA, Décembre 1995.
- [Dailey, 1990] R.L. Dailey. A new algorithm for the real structured singular value. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3036–3040, San Diego, USA, Mai 1990.
- [De Gaston et Safonov, 1988] R.R.E. De Gaston et M.G. Safonov. Exact calculation of the multiloop stability margin. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(2): 156–171, 1988.
- [Doyle, 1982] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6): 242–250, 1982.
- [Doyle, 1985] J.C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. Dans *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 260–265, Fort Lauderdale, USA, Décembre 1985.
- [Fan *et al.*, 1991] M.K.H. Fan, A.L. Tits et J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1): 25–38, 1991.
- [Fan et Tits, 1992] M.K.H. Fan et A.L. Tits. A measure of worst-case H_∞ performance and of largest acceptable uncertainty. *Systems and Control Letters*, 18(6): 409–421, 1992.
- [Ferreres *et al.*, 2003] G. Ferreres, J.-F. Magni et J.-M. Biannic. Robustness analysis of flexible structures: practical algorithms. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(8): 715–733, 2003.
- [Ferreres et Biannic, 2001] G. Ferreres et J.-M. Biannic. Reliable computation of the robustness margin for a flexible aircraft. *Control Engineering Practice*, 9(12): 1267–1278, 2001.
- [Ferreres et Biannic, 2004] G. Ferreres et J.-M. Biannic. A Skew Mu Toolbox (SMT) for robustness analysis. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Biannic/mypage.html>*, 2004.
- [Ferreres et Fromion, 1997] G. Ferreres et V. Fromion. Computation of the robustness margin with the skewed μ tool. *Systems and Control Letters*, 32(4): 193–202, 1997.
- [Ferreres, 1999] G. Ferreres. *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications*. Springer Verlag, 1999.
- [Fu et Barabanov, 1997] M. Fu et N.E. Barabanov. Improved upper bounds for the mixed structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(10): 1447–1452, 1997.
- [Jonsson et Rantzer, 1996] U. Jonsson et A. Rantzer. Systems with uncertain parameters - time-variations with bounded derivatives. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10): 969–982, 1996.
- [Lawrence *et al.*, 2000] C.T. Lawrence, A.L. Tits et P. Van Dooren. A fast algorithm for the computation of an upper bound on the μ -norm. *Automatica*, 36(3): 449–456, 2000.

- [Lind *et al.*, 1995] R. Lind, G.J. Balas et A. Packard. Robustness analysis with linear time-invariant and time-varying real uncertainty. Dans *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 132–140, Baltimore, USA, Août 1995.
- [Ly *et al.*, 1998] J.H. Ly, R.Y. Chiang, K.C. Goh et M.G. Safonov. LMI multiplier Km/μ analysis of the Cassini spacecraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(2): 155–168, 1998.
- [Megretski et Treil, 1993] A. Megretski et S. Treil. Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 3(3): 310–319, 1993.
- [Meinsma *et al.*, 1997] G. Meinsma, Y. Shrivastava et M. Fu. A dual formulation of mixed μ and on the losslessness of (D,G) scaling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7): 1032–1036, 1997.
- [Meinsma *et al.*, 2000] G. Meinsma, T. Iwasaki et M. Fu. When is (D,G) -scaling both necessary and sufficient. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(9): 1755–1759, 2000.
- [Packard et Doyle, 1993] A. Packard et J. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1): 71–109, 1993.
- [Paganini, 1996] F. Paganini. Robust stability under mixed time varying, time invariant and parametric uncertainty. *Automatica*, 32(10): 1381–1392, 1996.
- [Parrilo, 1999] P.A. Parrilo. On the numerical solution of LMIs derived from the KYP lemma. Dans *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2334–2338, Phoenix, USA, Décembre 1999.
- [Poolla et Tikku, 1995] K. Poolla et A. Tikku. Robust performance against time-varying structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9): 1589–1602, 1995.
- [Safonov, 1982] M.G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6): 251–256, 1982.
- [Shamma, 1994] J.S. Shamma. Robust stability with time-varying structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4): 714–724, 1994.
- [Sideris, 1992] A. Sideris. Elimination of frequency search from robustness tests. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10): 1635–1640, 1992.
- [Sparks *et al.*, 1996] A.G. Sparks, P.A. Blue et S.S. Banda. An LMI formulation of robustness analysis for systems with time-varying and LTI uncertainty. Dans *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, San Diego, USA, Juillet 1996.
- [Sznaier et Parrilo, 1999] M. Sznaier et P. Parrilo. On the gap between μ and its upper bound for systems with repeated uncertainty blocks. Dans *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4511–4516, Phoenix, USA, Décembre 1999.
- [Young *et al.*, 1995] P.M. Young, M.P. Newlin et J.C. Doyle. Computing bounds for the mixed μ problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(6): 573–590, 1995.
- [Young et Doyle, 1997] P.M. Young et J.C. Doyle. A lower bound for the mixed μ problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(1): 123–128, 1997.
- [Young, 1996] P.M. Young. Controller design with real parametric uncertainties. *International Journal of Control*, 65(3): 469–509, 1996.

Chapitre 2

UNE APPROCHE FRÉQUENTIELLE POUR L'ANALYSE DE ROBUSTESSE LTI/LTV

Résumé : Une approche fréquentielle est proposée pour analyser la robustesse d'un système soumis à des incertitudes mixtes LTI et LTV à variations arbitrairement rapides. Un algorithme permettant de calculer le minimum global de ce problème d'optimisation de dimension infinie est proposé et sa convergence est démontrée. Une technique sous-optimale mais plus attractive du point de vue de la complexité numérique est également présentée. Enfin, la méthode est généralisée en vue de la synthèse d'une précommande robuste et son application à un modèle de missile se révèle concluante.

Mots clés : élimination de fréquences, approche fréquentielle, analyse de robustesse, synthèse de précommande robuste, incertitudes mixtes LTI/LTV, optimisation convexe.

Sommaire

2.1	Performance robuste en présence d'incertitudes LTI/LTV	31
2.1.1	Un problème de dimension infinie	31
2.1.2	Calcul d'un niveau de performance	32
2.1.3	Validation à l'aide d'une technique d'élimination de fréquences	33
2.1.4	Convergence de l'algorithme	34
2.1.5	Résolution sous-optimale	38
2.1.6	Détermination d'une marge de stabilité robuste	39
2.2	Extension à la synthèse de précommande robuste	39
2.2.1	Formulation du problème	40
2.2.2	Résolution pratique	41
2.3	Application à un modèle de missile	42
2.3.1	Description du modèle non-linéaire initial	42
2.3.2	Création des modèles linéarisés	43
2.3.3	Résultats sur le continuum de modèles LTI	44
2.3.4	Résultats sur le modèle quasi-LPV	46

Bibliographie

- [1] G. Ferreres et C. Roos. Efficient convex design of robust feedforward controllers. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6460-6465, Séville, Espagne, décembre 2005.
- [2] G. Ferreres et C. Roos. Robust feedforward design in the presence of LTI/LTV uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(14) : 1278-1293, 2007.

Disposer d'outils pour analyser la robustesse d'un système soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV présente un intérêt pratique considérable. Cela permet en effet d'étudier toute une gamme de systèmes non-linéaires dont les non-linéarités peuvent être modélisées par des paramètres variant dans le temps (voir chapitre 8). Le problème qui en résulte est cependant plus difficile à résoudre que dans le cas LTI : les matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV ne permettent en effet plus de résoudre le problème indépendamment à chaque fréquence, comme c'est généralement le cas en μ -analyse.

La principale contribution de ce chapitre est de proposer une approche pratique pour analyser les propriétés de robustesse d'un système soumis à des incertitudes mixtes LTI et LTV à variations arbitrairement rapides. Pour cela, un premier algorithme est introduit, qui consiste à résoudre ce problème de dimension infinie sur un maillage fréquentiel à l'aide d'un solveur LMI, puis à valider le résultat obtenu sur \mathbb{R}_+ tout entier en utilisant une technique d'élimination de fréquences [Biannic et Ferreres, 2005; Ferreres *et al.*, 2003]. Il est ainsi possible de déterminer une marge de robustesse ou un niveau de performance fiable sans risquer de manquer une fréquence critique, et ce même dans le cas d'un système flexible.

Cette optimisation LMI peut cependant se révéler très coûteuse en temps de calcul car le nombre de variables augmente rapidement avec la taille du maillage. Une solution sous-optimale mais bien plus attractive du point de vue de la complexité numérique est alors proposée. Elle consiste à déterminer les matrices de scaling fréquentielles $D_{TI}(\omega)$ et $G_{TI}(\omega)$ associées aux incertitudes LTI indépendamment en chaque point du maillage en utilisant la formulation $\bar{\sigma}$ de la borne supérieure de μ_{Δ} [Fan *et al.*, 1991; Young *et al.*, 1995], puis à calculer les matrices de scaling constantes D_{TV} et G_{TV} associées aux incertitudes LTV à l'aide de la formulation LMI de cette même borne.

Ces résultats d'analyse sont ensuite adaptés afin d'obtenir une formulation convexe du problème de synthèse de précommande robuste [Giusto et Paganini, 1999] et de pouvoir appliquer efficacement les algorithmes précédents. Dans une large mesure, l'ordre n_H et la structure de la précommande $H(s)$ obtenue peuvent être choisis librement. La seule contrainte est de poser $H(s) = \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i(s)$, où les filtres $H_i(s)$ sont fixés, tandis que les θ_i désignent les paramètres d'optimisation.

Les différents algorithmes proposés sont finalement mis en œuvre sur un modèle réaliste de missile. Les propriétés de robustesse sont évaluées et une précommande robuste est synthétisée en considérant successivement un continuum de modèles LTI et un modèle quasi-LPV, tous deux représentatifs du modèle non-linéaire initial. Les résultats sont concluants, et permettent notamment de mettre en évidence le faible conservatisme de l'approche sous-optimale ainsi que le gain offert par une utilisation combinée des deux algorithmes en termes de temps de calcul.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Le problème d'analyse de robustesse LTI/LTV considéré est énoncé au paragraphe 2.1 et l'approche fréquentielle permettant de le résoudre est exposée. L'extension de la méthode à la synthèse de précommande robuste est alors détaillée au paragraphe 2.2. Le paragraphe 2.3 est finalement consacré à la validation de la méthode sur le modèle de missile.

Note importante : Ce chapitre est volontairement centré sur les résultats obtenus au cours de la thèse. Le contexte, la description des problèmes considérés, ainsi que les résultats classiques que l'on peut trouver dans la littérature ne sont rappelés que très brièvement. Une introduction à l'analyse de robustesse en général, et à la μ -analyse en particulier, est proposée au chapitre 1. Elle constitue pour le lecteur qui n'est pas familier de ces

techniques un bon préalable à la lecture du présent chapitre. Il en est de même des prérequis mathématiques et autres lemmes techniques, qui sont détaillés en annexe.

2.1 Performance robuste en présence d'incertitudes LTI/LTV

Les paragraphes 2.1.1 à 2.1.5 sont consacrés au problème de performance robuste. Plusieurs algorithmes permettant de calculer le minimum global de ce problème d'optimisation de dimension infinie sont proposés. L'adaptation de la méthode à la détermination d'une marge de stabilité robuste est quant à elle détaillée au paragraphe 2.1.6.

2.1.1 Un problème de dimension infinie

On considère l'interconnexion de la figure 2.1 (b), où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable. Le problème de performance robuste consiste à minimiser la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'entrée de référence y_r et la sortie y en présence d'incertitudes structurées $\Delta = \text{diag}(\Delta_{TI}(s), \Delta_{TV}(t)) \in \mathbf{\Delta}$, où $\Delta_{TI}(s) \in \mathbf{\Delta}_{TI}$ et $\Delta_{TV}(t) \in \mathbf{\Delta}_{TV}$ contiennent respectivement des incertitudes LTI et LTV à variations arbitrairement rapides. On cherche donc à déterminer la plus petite valeur de γ telle que :

$$\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma \quad \forall \Delta \in B(\mathbf{\Delta}) \quad (2.1)$$

où $B(\mathbf{\Delta})$ représente la boule unité des incertitudes de structure $\mathbf{\Delta}$ (voir chapitre 1).

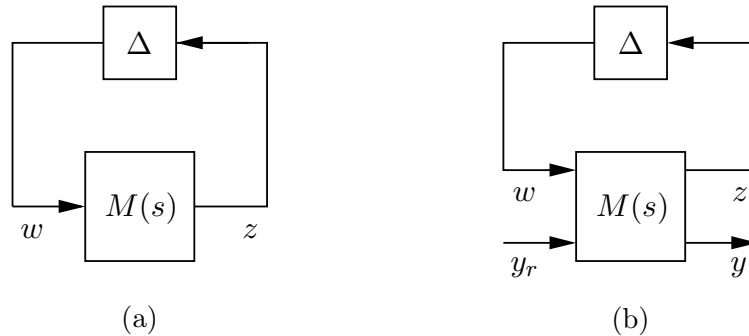


Figure 2.1 Interconnexions pour l'analyse de stabilité (a) et de performance (b) robustes.

Notations : L'ordre du système $M(s)$ est noté n , et les transferts $T_{y_r \rightarrow y}$ et $T_{w \rightarrow z}$ sont respectivement de taille $m \times m$ et $p \times p$. De plus, $\mathbf{\Delta}_{TI} \subset \mathbb{C}^{p_I \times p_I}$ et $\mathbf{\Delta}_{TV} \subset \mathbb{C}^{p_V \times p_V}$, de sorte que $p = p_I + p_V$.

La proposition ci-dessous fournit alors une condition suffisante pour que l'inégalité (2.1) soit satisfaite.

Proposition 2.1.1 Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et $\mathbf{\Delta}$ une structure donnée. Soit γ un scalaire positif. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ il existe des matrices de scaling $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D_{TI}(\omega), D_{TV}, I_m)$ et $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G_{TI}(\omega), G_{TV}, 0_m)$ avec $D_{TI}(\omega) \in \mathbf{D}_{TI}$, $D_{TV} \in \mathbf{D}_{TV}$, $G_{TI}(\omega) \in \mathbf{G}_{TI}$ et $G_{TV} \in \mathbf{G}_{TV}$ telles que :

$$M_\gamma^*(j\omega)\mathcal{D}(\omega)M_\gamma(j\omega) + j(\mathcal{G}(\omega)M_\gamma(j\omega) - M_\gamma^*(j\omega)\mathcal{G}(\omega)) \leq \mathcal{D}(\omega) \quad (2.2)$$

avec $M_\gamma(j\omega) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I_m \end{bmatrix} M(j\omega)$, alors $\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma$ pour tout opérateur $\Delta \in B(\mathbf{\Delta})$.

Remarque 2.1.2 *La définition précise des ensembles de matrices de scaling $\mathbf{D}_{TI}, \mathbf{D}_{TV}, \mathbf{G}_{TI}$ et \mathbf{G}_{TV} associés à la structure d'incertitude Δ est présentée au chapitre 1.*

Le problème d'optimisation de la proposition 2.1.1 est convexe mais présente une infinité d'équations et d'inconnues. On note γ_{opt} la valeur minimale de γ qui vérifie l'inégalité (2.2) pour tout pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$.

2.1.2 Calcul d'un niveau de performance

La méthode proposée par [Biannic et Ferreres, 2005] permet de résoudre de manière efficace ce problème de performance robuste lorsque l'on ne considère que des incertitudes LTI, mais elle n'est pas applicable dans le cas mixte LTI/LTV. Elle nécessite en effet de pouvoir calculer des matrices de scaling indépendamment à chaque fréquence, ce qui n'est plus possible ici en raison des matrices D_{TV} et G_{TV} associées aux incertitudes LTV qui doivent être constantes sur \mathbb{R}_+ . Au vu de cette difficulté, on peut envisager deux approches afin de calculer la valeur de γ_{opt} :

- aborder directement le problème de la proposition 2.1.1 dans le domaine fréquentiel malgré sa dimension infinie et la difficulté liée aux matrices D_{TV} et G_{TV} ,
- se ramener à une caractérisation d'état de dimension finie en utilisant de façon judicieuse une formulation généralisée du lemme KYP.

On se concentre ici sur la première approche, la seconde étant présentée en détail dans le chapitre 3. Plus précisément, la méthode proposée repose sur la résolution d'un problème de dimension finie sur un maillage fréquentiel, comme c'est généralement le cas en μ -analyse. La différence réside dans la nécessité de regrouper en une unique LMI les contraintes (2.2) évaluées en chaque point du maillage, de manière à prendre en compte le caractère constant des matrices de scaling D_{TV} et G_{TV} .

L'application directe d'un tel algorithme n'est cependant pas satisfaisante. En effet, seule une borne inférieure de γ_{opt} est obtenue car le problème est moins contraint sur le maillage que sur \mathbb{R}_+ . De plus, il n'est pas possible de garantir que l'on ne manque pas une fréquence critique. Enfin, la complexité numérique devient rapidement dissuasive si l'on choisit un maillage trop fin.

L'efficacité de la méthode de [Biannic et Ferreres, 2005] repose sur la technique d'élimination de fréquences présentée au paragraphe 1.2.3. Dans le cas mixte LTI/LTV considéré ici, l'idée consiste à reformuler le problème afin qu'il devienne compatible avec l'utilisation de cette technique. On introduit dans ce contexte l'algorithme suivant, qui permet de calculer le minimum global γ_{opt} du problème d'optimisation de la proposition 2.1.1 avec le degré de précision souhaité.

Algorithme 2.1.3 (calcul d'un niveau de performance - méthode optimale)

1. Choisir un maillage fréquentiel initial $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ de petite taille.
2. Résoudre le problème d'optimisation de la proposition 2.1.1 sur le maillage, i.e. minimiser γ sous la contrainte (2.2) par rapport aux matrices de scaling fréquentielles $D_{TI}(\omega_i), G_{TI}(\omega_i)$ et aux matrices de scaling constantes D_{TV}, G_{TV} . Soit $\gamma_{LB, N}$ la valeur obtenue.
3. Poser $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB, N}$, où $\epsilon > 0$ représente la précision souhaitée. Pour les valeurs de D_{TV} et G_{TV} calculées à l'étape 2, vérifier si l'inégalité (2.2) est satisfaite pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ à l'aide de la technique d'élimination de fréquences décrite au paragraphe 1.2.3. Si tel est le cas, interrompre l'algorithme, car γ est une borne supérieure de γ_{opt} et l'écart avec la borne inférieure $\gamma_{LB, N}$ est inférieur à ϵ . Sinon,

déterminer une pulsation $\tilde{\omega}$ pour laquelle l'inégalité (2.2) n'est pas vérifiée. Ajouter $\tilde{\omega}$ au maillage et retourner à l'étape 2.

Tous les inconvénients liés à une résolution classique sur un maillage sont ainsi levés :

- on obtient un encadrement de γ_{opt} et pas seulement une borne inférieure,
- l'utilisation de la technique d'élimination de fréquences permet de garantir que l'on ne manque pas une fréquence critique,
- l'algorithme 2.1.3 permet dans une certaine mesure de minimiser la taille du maillage fréquentiel et donc de maîtriser le temps de calcul.

Remarque 2.1.4 Un paramètre $\alpha > 0$ est également introduit afin de relâcher les contraintes entre les phases d'optimisation et de validation qui sont réalisées respectivement pour $\Delta \in (1 + \alpha)B(\Delta)$ et $\Delta \in B(\Delta)$. Cela permet de garantir la convergence de l'algorithme et de réduire le nombre d'itérations (voir paragraphe 2.1.3).

2.1.3 Validation à l'aide d'une technique d'élimination de fréquences

L'étape 2 de l'algorithme 2.1.3 consiste à minimiser un objectif linéaire sous des contraintes elles-mêmes linéaires, ce qui peut être réalisé aisément à l'aide d'un solveur LMI [Balas et al., 2007]. Une fois cette optimisation terminée, on sait qu'il existe des matrices $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$ qui vérifient l'inégalité (2.2) en chaque point du maillage fréquentiel $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ pour $\gamma = \gamma_{LB, N}$. Les matrices D_{TV} et G_{TV} étant fixées, le problème posé à l'étape 3 consiste alors à vérifier s'il existe des matrices $D_{TI}(\omega)$ et $G_{TI}(\omega)$ qui vérifient cette même inégalité sur \mathbb{R}_+ tout entier et pour $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB, N}$. L'objectif de ce paragraphe est de détailler comment ce problème peut être reformulé afin d'être résolu efficacement à l'aide de la technique d'élimination de fréquences.

Proposition 2.1.5 Soient $\tilde{D}_{TV} = D_{TV}^{1/2} \in \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{TV}}$ et $\tilde{G}_{TV} = D_{TV}^{-1/2} G_{TV} D_{TV}^{-1/2} \in \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{TV}}$. Soit :

$$F(j\omega) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{TV} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} M_\gamma(j\omega) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{TV}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{TV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (I + \tilde{G}_{TV}^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Les deux problèmes suivants sont équivalents :

1. Existe-t-il $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$ des matrices $D_{TI}(\omega) \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $G_{TI}(\omega) \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ qui vérifient l'inégalité (2.2) avec $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D_{TI}(\omega), D_{TV}, I_m)$, $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G_{TI}(\omega), G_{TV}, 0_m)$ et $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB, N}$?
2. Existe-t-il $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$ des matrices $\tilde{D}_{TI}(\omega) \in \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{TI}}$ et $\tilde{G}_{TI}(\omega) \in \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{TI}}$ telles que :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\tilde{D}_{TI}(\omega) F(j\omega) \tilde{D}_{TI}^{-1}(\omega) - j \tilde{G}_{TI}(\omega) \right) \left(I + \tilde{G}_{TI}^2(\omega) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \quad (2.3)$$

est vérifiée avec $\tilde{D}_{TI}(\omega) = \text{diag}(\tilde{D}_{TI}(\omega), I_{p_V}, I_m)$, $\tilde{G}_{TI}(\omega) = \text{diag}(\tilde{G}_{TI}(\omega), 0_{p_V}, 0_m)$ et $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB, N}$?

Preuve : D'après les résultats établis au chapitre 1, il existe des matrices $\mathcal{D}(\omega)$ et $\mathcal{G}(\omega)$ qui vérifient l'inégalité (2.2) si et seulement si il existe des matrices $\tilde{\mathcal{D}}(\omega) = \mathcal{D}^{1/2}(\omega)$ et $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \mathcal{D}^{-1/2}(\omega)\mathcal{G}(\omega)\mathcal{D}^{-1/2}(\omega)$ telles que :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\tilde{\mathcal{D}}(\omega)M_\gamma(j\omega)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega) - j\tilde{\mathcal{G}}(\omega) \right) \left(I + \tilde{\mathcal{G}}^2(\omega) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathcal{D}}(\omega)M_\gamma(j\omega)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega) - j\tilde{\mathcal{G}}(\omega) \right) \left(I + \tilde{\mathcal{G}}^2(\omega) \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ \left(\tilde{\mathcal{D}}_{TI}(\omega)F(j\omega)\tilde{\mathcal{D}}_{TI}^{-1}(\omega) - j\tilde{\mathcal{G}}_{TI}(\omega) \right) \left(I + \tilde{\mathcal{G}}_{TI}^2(\omega) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le second problème énoncé dans la proposition 2.1.5 revient à vérifier si :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}_+} \mu_{\Delta_c}(F(j\omega)) \leq 1$$

où la structure Δ_c est définie par :

$$\Delta_c = \left\{ \text{diag}(\Delta_{TI}, \Delta) : \Delta_{TI} \in \Delta_{\mathbf{TI}}, \Delta \in \mathbb{C}^{(pv+m) \times (pv+m)} \right\}$$

On peut alors appliquer directement la technique d'élimination de fréquences en remplaçant la valeur exacte de μ_{Δ_c} par la borne supérieure de [Fan *et al.*, 1991; Young *et al.*, 1995], ce qui conduit à l'algorithme ci-dessous.

1. Poser $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+$.
2. Choisir une pulsation $\omega_0 \in \mathcal{I}$.
3. Si la borne supérieure de $\mu_{\Delta_c}(F(j\omega_0))$ est supérieure à 1, interrompre l'algorithme, car $\tilde{\omega} = \omega_0$ est une pulsation critique pour laquelle le test (2.3) n'est pas vérifié. Sinon, appliquer la technique d'élimination de fréquences du paragraphe 1.2.3 afin de déterminer l'ensemble \mathcal{J} des intervalles pour lesquels les matrices de scaling $\tilde{D}_{TI}(\omega_0)$ et $\tilde{G}_{TI}(\omega_0)$ calculées à la pulsation ω_0 vérifient l'inégalité (2.3). Effectuer l'opération $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$. Si $\mathcal{I} \neq \emptyset$, retourner à l'étape 2. Sinon, interrompre l'algorithme.

L'idée est donc d'éliminer l'ensemble du domaine fréquentiel \mathbb{R}_+ en ne considérant qu'un nombre réduit de pulsations ω_0 .

2.1.4 Convergence de l'algorithme

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que si le maillage fréquentiel est suffisamment fin, la validation par élimination de fréquences est nécessairement couronnée de succès, *i.e.* l'inégalité (2.2) est satisfaite pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ avec $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB,N}$. Il est alors possible de prouver que l'algorithme 2.1.3 converge en un nombre fini d'itérations en suivant la même démarche que dans [Ferrerres et Puyou, 2005]. Cette deuxième étape n'est pas détaillée ici.

Cas des matrices de scaling \mathcal{D}

Pour une meilleure lisibilité, la convergence de l'algorithme 2.1.3 est d'abord prouvée dans le cas où $\mathcal{G} = 0$. Le résultat principal est énoncé ci-dessous.

Proposition 2.1.6 *Soit l'interconnexion de la figure 2.1 (b) avec :*

$$M_{\gamma,\alpha}(s) = \begin{bmatrix} (1 + \alpha)I_p & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I_m \end{bmatrix} M(s)$$

Soit $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ un maillage fréquentiel de l'intervalle $[0, \tilde{\omega}]$ avec $\omega_1 = 0$ et $\omega_N = \tilde{\omega}$. Soient $\mathcal{D}(\omega_i)$ des matrices de scaling telles que pour tout $i \in [1, N]$:

$$M_{\gamma_{LB}, \alpha}^*(j\omega_i) \mathcal{D}(\omega_i) M_{\gamma_{LB}, \alpha}(j\omega_i) \leq \mathcal{D}(\omega_i) \quad (2.4)$$

avec $d_1 I \leq \mathcal{D}(\omega_i) \leq d_2 I$. Soient $\gamma = (1 + \epsilon)\gamma_{LB}$ et $0 < \nu < \min(\epsilon, \alpha)$. Soit ρ le degré de stabilité de $M_{\gamma, 0}(s)$, i.e. la partie réelle de chaque pôle s_j de $M_{\gamma, 0}(s)$ vérifie $\Re(s_j) < -\rho$. Soit L un réel positif tel que :

$$\sup_{\Re(s) \geq -\rho} \bar{\sigma}(M_{\gamma, 0}(s)) \leq L$$

Si le maillage fréquentiel vérifie :

$$\max_{i \in [2, N]} |\omega_i - \omega_{i-1}| \leq \frac{2\xi\rho}{\sqrt{4 - \xi^2}} \quad \text{avec} \quad \xi = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \frac{\nu}{L(1 + \nu)}$$

alors pour tout $i \in [2, N - 1]$, l'inégalité :

$$M_{\gamma, 0}^*(j\omega) \mathcal{D}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega) \leq \mathcal{D}(\omega_i) \quad (2.5)$$

est satisfaite pour toute pulsation $\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_{i+1}]$.

La condition $4 - \xi^2 > 0$ peut être garantie en choisissant une valeur suffisamment petite de ν . Sous les hypothèses de la proposition 2.1.6, on peut donc trouver pour toute pulsation ω une matrice de scaling $\tilde{\mathcal{D}}(\omega)$ telle que $M_{\gamma}^*(j\omega) \tilde{\mathcal{D}}(\omega) M_{\gamma}(j\omega) \leq \tilde{\mathcal{D}}(\omega)$, ce qui signifie que la validation par élimination de fréquences s'est terminée avec succès et que γ est un niveau de performance garanti. Pour démontrer ce résultat, on utilise une formulation $\bar{\sigma}$ plutôt qu'une formulation LMI (voir chapitre 1). Plus précisément, on montre pour une valeur donnée de i que si l'inégalité :

$$\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma_{LB}, \alpha}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq 1 \quad (2.6)$$

est vérifiée avec $\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) = \mathcal{D}^{1/2}(\omega_i)$, alors $\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq 1 \quad \forall \omega \in [\omega_{i-1}, \omega_{i+1}]$.

Lemme 2.1.7 *Si l'inégalité (2.6) est vérifiée, alors :*

$$\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq \frac{1}{1 + \nu} < 1$$

Preuve : En raison de la structure diagonale par blocs de $\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)$, on a :

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) &= \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) \begin{bmatrix} \frac{1 + \nu}{1 + \alpha} I & 0 \\ 0 & \frac{1 + \nu}{1 + \epsilon} I \end{bmatrix} M_{\gamma_{LB}, \alpha}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 + \nu}{1 + \alpha} I & 0 \\ 0 & \frac{1 + \nu}{1 + \epsilon} I \end{bmatrix} \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma_{LB}, \alpha}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) \end{aligned}$$

D'après la définition de ν , la relation (2.6) implique que :

$$\bar{\sigma}((1 + \nu)\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(j\omega_i)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq \bar{\sigma}\left(\begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{1+\alpha}I & 0 \\ 0 & \frac{1+\nu}{1+\epsilon}I \end{bmatrix}\right)\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma_{LB},\alpha}(j\omega_i)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq 1 \quad \blacksquare$$

Lemme 2.1.8 Soit $J(s)$ une matrice de transfert telle que $J(j\omega_i) = 0$. Soit ρ le degré de stabilité de $J(s)$. Soit N un réel positif tel que $\sup_{\Re(s) \geq -\rho} \bar{\sigma}(J(s)) \leq N$. On a :

$$\sup_{\omega \in [\omega_i - \delta, \omega_i + \delta]} \bar{\sigma}(J(j\omega)) \leq \frac{\delta}{\sqrt{4\rho^2 + \delta^2}} N \quad (2.7)$$

Soit $J(s) = \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(s)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) - \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(j\omega_i)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)$, de telle sorte que $J(j\omega_i) = 0$. Soit $\Delta\omega = \max_k |\omega_k - \omega_{k-1}|$. On a :

$$\sup_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_{i+1}]} \bar{\sigma}(J(j\omega)) \leq \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{4\rho^2 + \Delta\omega^2}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} L \quad (2.8)$$

Preuve : La première partie du lemme s'appuie sur la théorie de Nevanlinna-Pick et est extraite de [Ferrerres et Puyou, 2005]. D'autre part, si $\Re(s) \geq -\rho$, on a :

$$\bar{\sigma}(J(s)) \leq \bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(s)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) + \bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(j\omega_i)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq 2\frac{\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i))}{\underline{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i))} L$$

La relation (2.8) est alors obtenue en appliquant (2.7) avec $N = 2\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}L$ et $\delta = \Delta\omega$. \blacksquare

Preuve de la proposition 2.1.6 : En notant que $\bar{\sigma}(A) \leq \bar{\sigma}(A-B) + \bar{\sigma}(B)$ et en appliquant les lemmes 2.1.7 et 2.1.8, on a pour toute pulsation $\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_{i+1}]$:

$$\bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)M_{\gamma,0}(j\omega)\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i)) \leq \eta$$

avec :

$$\eta = \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{4\rho^2 + \Delta\omega^2}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} L + \frac{1}{1 + \nu}$$

$\eta = 1$ correspond à :

$$\Delta\omega = \frac{2\xi\rho}{\sqrt{4 - \xi^2}} \quad \text{avec} \quad \xi = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \frac{\nu}{L(1 + \nu)} \quad \blacksquare$$

Cas des matrices de scaling \mathcal{D} et \mathcal{G}

On considère maintenant le cas où $\mathcal{G} \neq 0$. Afin de ne pas alourdir le manuscrit, seule la généralisation du lemme 2.1.7, qui représente l'élément central de la démonstration, est présentée. Pour cela, on réécrit au préalable l'inégalité :

$$M_{\gamma_{LB},\alpha}^*(j\omega_i)\mathcal{D}(\omega_i)M_{\gamma_{LB},\alpha}(j\omega_i) + j(\mathcal{G}(\omega_i)M_{\gamma_{LB},\alpha}(j\omega_i) - M_{\gamma_{LB},\alpha}^*(j\omega_i)\mathcal{G}(\omega_i)) \leq \mathcal{D}(\omega_i)$$

sous la forme :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma_{LB}, \alpha}(j\omega_i) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) - j\tilde{\mathcal{G}}(\omega_i) \right) \left(I + \tilde{\mathcal{G}}^2(\omega_i) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \quad (2.9)$$

avec $\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i) = \mathcal{D}^{1/2}(\omega_i)$ et $\tilde{\mathcal{G}}(\omega_i) = \mathcal{D}^{-1/2}(\omega_i) \mathcal{G}(\omega_i) \mathcal{D}^{-1/2}(\omega_i)$.

Lemme 2.1.9 Si l'inégalité (2.9) est vérifiée avec $\mathcal{D}(\omega_i) \geq d_1 I$ et $\bar{\sigma}(\mathcal{G}(\omega_i)) \leq g$, alors :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\hat{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) \hat{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) - j\hat{\mathcal{G}}(\omega_i) \right) \left(I + \hat{\mathcal{G}}^2(\omega_i) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq \sqrt{\frac{1 + g^2/d_1^2}{(1 + \nu)^2 + g^2/d_1^2}} < 1$$

avec $\hat{\mathcal{D}}(\omega_i) = S^{-1} \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i)$, $\hat{\mathcal{G}}(\omega_i) = S \tilde{\mathcal{G}}(\omega_i)$ et $S = \begin{bmatrix} (1 + \alpha)^{-1} I_p & 0 \\ 0 & (1 + \epsilon)^{-1} I_m \end{bmatrix}$.

Preuve : A l'aide de la relation $M_{\gamma, 0}(s) = S M_{\gamma_{LB}, \alpha}(s)$, l'inégalité (2.9) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{A}(\omega_i) \leq S^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq \frac{1}{(1 + \nu)^2} \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \quad (2.10)$$

avec $\check{\mathcal{D}}(\omega_i) = S^{-2} \mathcal{D}(\omega_i)$, $\check{\mathcal{G}}(\omega_i) = \mathcal{G}(\omega_i) S^{-1}$ et :

$$\mathcal{A}(\omega_i) = M_{\gamma, 0}^*(j\omega_i) \check{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) + j \left(\check{\mathcal{G}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) - M_{\gamma, 0}^*(j\omega_i) \check{\mathcal{G}}(\omega_i) \right)$$

On pose alors $1/(1 + \nu)^2 = \xi^2 - \mu^2$, de telle sorte que $\xi > 1/(1 + \nu)$, et on suppose de plus que $\xi < 1$. L'inégalité (2.10) implique alors que :

$$\mathcal{A}(\omega_i) - \xi^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq -\mu^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq -\mu^2 d_1 (1 + \nu)^2 I$$

D'autre part, avec $\hat{\mathcal{D}}(\omega_i) = \check{\mathcal{D}}^{1/2}(\omega_i)$ et $\hat{\mathcal{G}}(\omega_i) = \check{\mathcal{D}}^{-1/2}(\omega_i) \check{\mathcal{G}}(\omega_i) \check{\mathcal{D}}^{-1/2}(\omega_i)$, on a :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\hat{\mathcal{D}}(\omega_i) M_{\gamma, 0}(j\omega_i) \hat{\mathcal{D}}^{-1}(\omega_i) - j\hat{\mathcal{G}}(\omega_i) \right) \left(I + \hat{\mathcal{G}}^2(\omega_i) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq \xi \quad (2.11)$$

si et seulement si $\mathcal{A}(\omega_i) - \xi^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq -(1 - \xi^2) \mathcal{B}(\omega_i)$ avec $\mathcal{B}(\omega_i) = \mathcal{G}(\omega_i) \mathcal{D}^{-1}(\omega_i) \mathcal{G}(\omega_i) \leq \frac{g^2}{d_1} I$, car $\mathcal{D}(\omega_i) \geq d_1 I$ et $\bar{\sigma}(\mathcal{G}(\omega_i)) \leq g$. Ainsi, $\mathcal{A}(\omega_i) - \xi^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq -(1 - \xi^2) \frac{g^2}{d_1} I$ implique que l'inégalité (2.11) est vérifiée car :

$$\mathcal{A}(\omega_i) - \xi^2 \check{\mathcal{D}}(\omega_i) \leq -(1 - \xi^2) \frac{g^2}{d_1} I \leq -(1 - \xi^2) \mathcal{B}(\omega_i)$$

Par conséquent, (2.10) implique (2.11) lorsque l'on choisit $\mu^2 d_1 (1 + \nu)^2 = (1 - \xi^2) g^2 / d_1$. Comme $1/(1 + \nu)^2 + \mu^2 = \xi^2$, on obtient finalement :

$$\xi^2 = \frac{1 + g^2/d_1^2}{(1 + \nu)^2 + g^2/d_1^2} < 1 \quad \blacksquare$$

2.1.5 Résolution sous-optimale

L'optimisation LMI réalisée à l'étape 2 de l'algorithme 2.1.3 peut se révéler très coûteuse en termes de temps de calcul. Le nombre de variables augmente en effet avec la taille du maillage en raison des matrices de scaling fréquentielles $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$. De plus, la présence des matrices constantes D_{TV} et G_{TV} ne permet pas de résoudre le problème indépendamment à chaque fréquence et les contraintes (2.2) en chaque point du maillage doivent donc être regroupées en une unique LMI. Une solution sous-optimale mais bien plus attractive du point de vue de la complexité numérique consiste à procéder en deux temps. Les matrices $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$ sont d'abord déterminées en chaque point du maillage en utilisant la formulation $\bar{\sigma}$ de la borne supérieure de μ_{Δ} . Les matrices constantes D_{TV} et G_{TV} sont alors calculées à l'aide de la formulation LMI de cette même borne.

Algorithme 2.1.10 (calcul d'un niveau de performance - méthode sous-optimale)

1. Identique à l'algorithme 2.1.3.
- 2a. Fixer les matrices de scaling D_{TV} et G_{TV} . En chaque point du maillage, minimiser γ sous la contrainte (2.2) par rapport aux matrices de scaling $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$. Ces optimisations sont réalisées par transformation de la formulation LMI (2.2) en une formulation $\bar{\sigma}$, puis par détermination de la valeur minimale de γ par dichotomie.
- 2b. Fixer les matrices de scaling $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$ et résoudre le problème d'optimisation de la proposition 2.1.1 sur le maillage, i.e. minimiser γ sous la contrainte (2.2) par rapport aux matrices de scaling constantes D_{TV} et G_{TV} . Soit $\gamma_{N_{min}}$ la valeur obtenue. Si $\gamma_{N_{min}} < (1 + \eta)\gamma_N$, où γ_N représente la valeur de γ au début de l'étape 2a et $\eta > 0$ un seuil donné, poser $\gamma_N = \gamma_{N_{min}}$ et retourner à l'étape 2a afin de poursuivre le processus de minimisation de γ . Sinon, poser $\gamma_N = \gamma_{N_{min}}$ et passer à l'étape 3.
3. Identique à l'algorithme 2.1.3.

Remarque 2.1.11 Les valeurs initiales de D_{TV} et G_{TV} peuvent être choisies de manière arbitraire, par exemple $D_{TV} = I_{p_V}$ et $G_{TV} = 0_{p_V}$. Une autre solution consiste à exécuter au préalable une itération de l'algorithme 2.1.3.

Remarque 2.1.12 Diminuer la valeur de η revient à augmenter le nombre d'itérations entre les étapes 2a et 2b, et donc à réduire le conservatisme de la valeur finale de γ_N . Ce paramètre permet ainsi de réaliser un compromis entre la complexité numérique de l'algorithme et la précision de la borne supérieure de γ_{opt} obtenue à la fin de l'étape 3.

Contrairement à l'algorithme 2.1.3, rien ne permet ici d'affirmer que la valeur de γ_N obtenue à la fin de l'étape 2b est bien une borne inférieure de γ_{opt} , et il n'est donc pas possible d'évaluer à l'étape 3 l'écart entre γ_{opt} et sa borne supérieure. Cependant, les algorithmes 2.1.3 et 2.1.10 peuvent être combinés de manière efficace afin de déterminer des bornes de γ_{opt} avec la précision souhaitée tout en réduisant significativement le temps de calcul par rapport à l'application directe de l'algorithme 2.1.3.

Algorithme 2.1.13 (calcul d'un niveau de performance - heuristique)

1. Exécuter l'algorithme 2.1.10 afin de déterminer une borne supérieure γ_{UB} de γ_{opt} .
2. Exécuter l'algorithme 2.1.3 afin de calculer une borne inférieure γ_{LB} de γ_{opt} et l'interrompre dès que $\gamma_{LB} > (1 - \xi)\gamma_{UB}$, où $\xi > 0$ représente la précision désirée.

Remarque 2.1.14 *L'algorithme 2.1.3 exécuté à l'étape 2 peut être initialisé avec le maillage fréquentiel et les valeurs de D_{TV} et G_{TV} obtenus à la fin de l'étape 1. Afin de minimiser le temps de calcul, il est de plus possible de réduire préalablement la taille de ce maillage en ne conservant que les pulsations critiques correspondant aux plus grandes valeurs de la borne supérieure de μ_{Δ} .*

2.1.6 Détermination d'une marge de stabilité robuste

On considère maintenant l'interconnexion de la figure 2.1 (a), où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable. On cherche à déterminer une marge de stabilité en présence d'incertitudes structurées $\Delta = \text{diag}(\Delta_{TI}(s), \Delta_{TV}(t)) \in \mathbf{\Delta}$, où $\Delta_{TI}(s) \in \mathbf{\Delta}_{TI}$ et $\Delta_{TV}(t) \in \mathbf{\Delta}_{TV}$ contiennent respectivement des incertitudes LTI et LTV à variations arbitrairement rapides. Dans ce contexte, la proposition ci-dessous donne une condition suffisante de stabilité robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV.

Proposition 2.1.15 *Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et $\mathbf{\Delta}$ une structure donnée. Soit β un scalaire positif. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ il existe des matrices de scaling $D(\omega) = \text{diag}(D_{TI}(\omega), D_{TV})$ et $G(\omega) = \text{diag}(G_{TI}(\omega), G_{TV})$ avec $D_{TI}(\omega) \in \mathbf{D}_{TI}$, $D_{TV} \in \mathbf{D}_{TV}$, $G_{TI}(\omega) \in \mathbf{G}_{TI}$ et $G_{TV} \in \mathbf{G}_{TV}$ telles que :*

$$M^*(j\omega)D(\omega)M(j\omega) + j(G(\omega)M(j\omega) - M^*(j\omega)G(\omega)) \leq \beta^2 D(\omega) \quad (2.12)$$

alors l'interconnexion de la figure 2.1 (a) est stable pour tout opérateur $\Delta \in \frac{1}{\beta} B(\mathbf{\Delta})$.

Comme dans le cas de la performance, le problème d'optimisation de la proposition 2.1.15 est convexe mais présente une infinité d'équations et d'inconnues. On note β_{opt} la valeur minimale de β qui vérifie l'inégalité (2.12) pour tout pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$. L'inverse de β_{opt} constitue donc une marge de robustesse. Les algorithmes proposés aux paragraphes 2.1.2 et 2.1.5 peuvent alors être adaptés aisément afin de résoudre ce problème de stabilité robuste. Le test réalisé à l'aide de la technique d'élimination de fréquences s'énonce notamment de la manière suivante.

Test de robustesse : Soient $\tilde{D}_{TV} = D_{TV}^{1/2} \in \tilde{\mathbf{D}}_{TV}$, $\tilde{G}_{TV} = D_{TV}^{-1/2} G_{TV} D_{TV}^{-1/2} \in \tilde{\mathbf{G}}_{TV}$ et :

$$F'(j\omega) = \left(\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{D}_{TV} \end{array} \right] \frac{M(j\omega)}{\beta} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{D}_{TV}^{-1} \end{array} \right] - j \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{G}_{TV} \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & (I + \tilde{G}_{TV}^2)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

Existe-t-il $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$ des matrices $\tilde{D}_{TI}(\omega) \in \tilde{\mathbf{D}}_{TI}$ et $\tilde{G}_{TI}(\omega) \in \tilde{\mathbf{G}}_{TI}$ qui vérifient :

$$\bar{\sigma} \left(\left(\tilde{D}_{TI}(\omega) F'(j\omega) \tilde{D}_{TI}^{-1}(\omega) - j \tilde{G}_{TI}(\omega) \right) \left(I + \tilde{G}_{TI}^2(\omega) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1$$

avec $\tilde{D}_{TI}(\omega) = \text{diag}(\tilde{D}_{TI}(\omega), I_{p_V})$, $\tilde{G}_{TI}(\omega) = \text{diag}(\tilde{G}_{TI}(\omega), 0_{p_V})$ et $\beta = (1 + \epsilon)\beta_{LB,N}$?

2.2 Extension à la synthèse de précommande robuste

La synthèse d'une loi de commande pour un système dynamique est généralement réalisée en deux temps. Un correcteur est d'abord déterminé afin de garantir une bonne stabilité en boucle fermée, tout en étant robuste aux incertitudes de modèle et aux perturbations non mesurées qui agissent sur le système. Une précommande est ensuite calculée

afin d'améliorer le suivi d'un modèle de référence ou la réjection de perturbations mesurées malgré la présence de ces mêmes incertitudes.

On s'intéresse ici à cette deuxième étape lorsque le système est soumis à des incertitudes structurées LTI/LTV. La synthèse d'une précommande $H(s)$ qui minimise une borne supérieure de la performance H_∞/\mathcal{L}_2 en présence de telles incertitudes admet une formulation convexe lorsque la dynamique de $H(s)$ est fixée. Il s'agit cependant d'un problème difficile à résoudre, qui présente une infinité de contraintes et de variables d'optimisation.

Peu de méthodes existent dans la littérature qui permettent de synthétiser une précommande robuste et l'une des premières contributions importantes est l'œuvre de [Giusto et Paganini, 1999]. Dans le cas d'incertitudes LTV, une approche état est proposée. Dans le cas d'incertitudes LTI, une heuristique intéressante du point de vue de la complexité numérique et ne nécessitant pas de décomposer $H(s)$ sur une base de filtres est introduite. Des valeurs de $H(j\omega_i)$, $D_{TI}(\omega_i)$ et $G_{TI}(\omega_i)$ sont calculées indépendamment en chaque point d'un maillage fréquentiel. Une méthode d'interpolation construit alors une représentation $H(s)$ à partir de la réponse fréquentielle $H(j\omega_i)$. Cette approche présente néanmoins plusieurs inconvénients. Aucune condition de stabilité n'est imposée sur la réponse fréquentielle $H(j\omega_i)$. De plus, la dynamique de $H(s)$ doit être fixée lors de l'étape d'interpolation, ce qui peut s'avérer délicat. Il n'est donc pas possible de garantir que la réponse fréquentielle de $H(s)$ reste proche de la réponse optimale calculée sur le maillage, et la performance de la précommande ainsi obtenue peut s'avérer médiocre. Enfin, on notera que les méthodes proposées par [Giusto et Paganini, 1999] ne sont pas applicables au cas mixte LTI/LTV. D'autres approches ont été proposées depuis par [Cerone *et al.*, 2002; Devasia, 2002; Faanes et Skogestad, 2004; Mammam *et al.*, 2001; Wik *et al.*, 2003; Campa *et al.*, 2004], mais elles ne permettent pas non plus de prendre en compte simultanément ces deux catégories d'incertitudes.

La démarche proposée ici consiste à adapter la proposition 2.1.1 afin de pouvoir exploiter et généraliser les outils d'analyse de robustesse LTI/LTV développés au paragraphe 2.1.

2.2.1 Formulation du problème

Soit l'interconnexion de la figure 2.2. On cherche à déterminer une précommande $H(s)$ qui minimise la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'entrée de référence y_r et la sortie y en présence d'incertitudes structurées $\Delta = \text{diag}(\Delta_{TI}(s), \Delta_{TV}(t)) \in \mathbf{\Delta}$, où $\Delta_{TI}(s) \in \mathbf{D}_{TI}$ et $\Delta_{TV}(t) \in \mathbf{D}_{TV}$ contiennent respectivement des incertitudes structurées LTI et LTV à variations arbitrairement rapides.

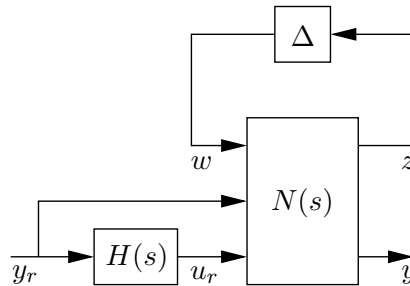


Figure 2.2 Interconnexion pour la synthèse de précommande robuste.

On transforme tout d'abord ce schéma de synthèse afin de se ramener à l'interconnexion

standard de la figure 2.1 (b). Ainsi, en notant :

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \end{bmatrix}$$

on obtient :

$$M = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} + N_{13}H \\ N_{21} & N_{22} + N_{23}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

et la proposition 2.1.1 peut alors être appliquée au système $M(s)$. Cependant, le problème de synthèse de précommande considéré ici est plus complexe que le problème de performance traité précédemment, car l'inégalité (2.2) n'est plus convexe.

2.2.2 Résolution pratique

Afin de se ramener à une formulation convexe puis d'appliquer les algorithmes mis au point dans le paragraphe 2.1, on pose :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i(s) \quad (2.14)$$

où les filtres $H_i(s)$ sont fixés, tandis que les réels θ_i désignent les paramètres d'optimisation. La base orthonormale de filtres proposée par [Akçay et Ninness, 1999] est choisie afin de réduire les problèmes numériques :

$$H_i(s) = \frac{\sqrt{2\Re(a_i)}}{s + a_i} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{s - \bar{a}_k}{s + a_k} \quad (2.15)$$

La seule contrainte consiste donc à fixer les pôles $-a_k$, *i.e.* à imposer la dynamique de $H(s)$. L'ordre n_H de la précommande peut quant à lui être choisi librement. La proposition 2.1.1 est alors reformulée de la manière suivante.

Proposition 2.2.1 *Soit l'interconnexion de la figure 2.2 avec $N(s)$ un système linéaire stationnaire stable et $H(s) = \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i(s)$. Soit γ un scalaire positif. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ il existe des paramètres réels θ_i ainsi que des matrices de scaling $D(\omega) = \text{diag}(D_{TI}(\omega), D_{TV})$ et $G(\omega) = \text{diag}(G_{TI}(\omega), G_{TV})$ avec $D_{TI}(\omega) \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$, $D_{TV} \in \mathbf{D}_{\mathbf{TV}}$, $G_{TI}(\omega) \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ et $G_{TV} \in \mathbf{G}_{\mathbf{TV}}$ tels que :*

$$\begin{bmatrix} D - N_{11}DN_{11}^* + j(N_{11}G - GN_{11}^*) & -(N_{11}D + jG)N_{21}^* & N_{12} + N_{13} \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i \\ \star & \gamma I - N_{21}DN_{21}^* & N_{22} + N_{23} \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i \\ \star & \star & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.16)$$

où la dépendance vis-à-vis de la pulsation ω est omise afin d'alléger les notations, alors $\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i_{\mathcal{L}_2}} \leq \gamma$ pour tout opérateur $\Delta \in B(\Delta)$.

Preuve : D'après la propriété 1.1.3, l'inégalité (2.2) peut être remplacée par :

$$M_\gamma(j\omega)\mathcal{D}(\omega)M_\gamma^*(j\omega) + j(\mathcal{G}(\omega)M_\gamma^*(j\omega) - M_\gamma(j\omega)\mathcal{G}(\omega)) \leq \mathcal{D}(\omega) \quad (2.17)$$

avec $M_\gamma(j\omega) = M(j\omega) \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I_m \end{bmatrix}$. Cette dernière inégalité s'écrit sous la forme :

$$-Q + SS^* \leq 0 \quad (2.18)$$

où $Q = - \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} M_{11}^* & M_{21}^* \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} GM_{11}^* - M_{11}G & GM_{21}^* \\ -M_{21}G & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et $S = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix}$.

On applique alors le complément de Schur à la relation (2.18), qui est équivalente à (2.16) en multipliant chaque terme par γ puis en changeant γD en D et γG en G . ■

L'application de la proposition 1.1.3 est l'étape clé qui permet de montrer l'équivalence entre les inégalités (2.2) et (2.16), et donc de rendre le problème convexe. On peut alors mettre en œuvre les algorithmes détaillés dans les paragraphes précédents. La seule différence concerne l'étape 2 qui consiste désormais à résoudre le problème d'optimisation de la proposition 2.2.1 non seulement par rapport aux matrices de scaling fréquentielles $D_{TI}(\omega), G_{TI}(\omega)$ et constantes D_{TV}, G_{TV} , mais également par rapport aux paramètres θ_i de la précommande $H(s)$.

Remarque 2.2.2 Une méthode de synthèse permettant de prendre en compte des incertitudes mixtes LTI/LTV a récemment été proposée par [Scorletti et Fromion, 2006], dont l'avantage est de ne pas contraindre a priori la dynamique de la précommande. Cependant, les matrices de scaling considérées sont restreintes à un ensemble de matrices de transfert rationnelles d'ordre et de dénominateur fixés, et l'ordre de la précommande obtenue est au moins égal à celui du système en boucle fermée $N(s)$.

2.3 Application à un modèle de missile

L'objectif est maintenant d'appliquer la méthode proposée dans ce chapitre à un exemple réaliste de missile. Le modèle non-linéaire initial est décrit au paragraphe 2.3.1. Il est linéarisé au paragraphe 2.3.2, d'abord sous la forme d'un continuum de modèles LTI correspondant à des points d'équilibre, puis d'un modèle quasi-LPV. Un correcteur robuste est ensuite synthétisé, ce qui permet d'obtenir des systèmes en boucle fermée $N(s)$ compatibles avec l'interconnexion de la figure 2.2. Les paragraphes 2.3.3 et 2.3.4 détaillent alors l'analyse de stabilité et de performance ainsi que la synthèse de précommande réalisées sur chacun de ces deux modèles linéarisés.

2.3.1 Description du modèle non-linéaire initial

Le modèle non-linéaire initial du missile est extrait de [Reichert, 1992]. Son comportement en boucle ouverte est décrit par les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = q + K_1 M C_z(\alpha, M, u_c) \cos(\alpha) \\ \dot{q} = K_2 M^2 C_m(\alpha, M, u_c) \end{cases} \quad (2.19)$$

Seul le mouvement longitudinal est considéré ici. Le vecteur d'état $x = [\alpha \ q]^T$ est donc constitué de l'angle d'incidence α et de la vitesse de tangage q , et on suppose qu'il est

entièrement mesuré. La commande u_c correspond à l'angle de braquage de l'empennage arrière, tandis que M désigne le nombre de Mach et que K_1, K_2 sont des constantes. Les coefficients aérodynamiques C_z et C_m sont quant à eux modélisés par des fonctions polynomiales :

$$\begin{aligned} C_z(\alpha, M, u_c) &= z_3 \alpha^3 + z_2 \alpha^2 + z_1 (2 - (1/3)M) \alpha + z_0 u_c \\ C_m(\alpha, M, u_c) &= m_3 \alpha^3 + m_2 \alpha^2 + m_1 (-7 + (8/3)M) \alpha + m_0 u_c \end{aligned}$$

faisant intervenir des coefficients constants z_i et m_j . On considère enfin des angles d'incidence inférieurs à 20 deg, ce qui permet de remplacer la fonction trigonométrique $\cos(\alpha)$ dans l'équation (2.19) par son approximation polynomiale $1 - \alpha^2/2$.

2.3.2 Création des modèles linéarisés

Ces équations d'état non-linéaires en boucle ouverte $\dot{x} = f(x, u_c)$ sont mises sous forme LFT $x = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta)u_c$ à l'aide de la LFR Toolbox [Magni, 2006]. On construit ainsi deux représentations linéarisées :

- un continuum de modèles LTI correspondant à des points d'équilibre,
- un modèle quasi-LPV.

Dans le premier cas, les équations (2.19) sont linéarisées par rapport à x et u_c , et la condition d'équilibre $\dot{\alpha} = 0, \dot{q} = 0$ est introduite. Un point d'équilibre est paramétré par les valeurs de $\alpha = 10 + 10\delta_1$ et $M = 3 + \delta_2$, de telle sorte que $\delta_1 \in [-1, 1]$ et $\delta_2 \in [-1, 1]$ correspondent respectivement à $\alpha \in [0, 20 \text{ deg}]$ et $M \in [2, 4]$, *i.e.* au domaine de validité du modèle. Cette première linéarisation permet ainsi d'obtenir une représentation LFT dont le bloc Δ contient des incertitudes structurées LTI associées aux variations de l'angle d'incidence et du Mach :

$$\Delta = \Delta_{TI} = \text{diag}(\delta_1 I_4, \delta_2 I_6)$$

Le modèle quasi-LPV est quant à lui obtenu directement à partir de la représentation d'état non-linéaire initiale. Plus précisément, les relations $\alpha = 10 + 10\delta_1$ et $M = 3 + \delta_2$ sont injectées dans les équations (2.19), de telle sorte que le bloc Δ est cette fois-ci constitué de paramètres LTV répétés :

$$\Delta = \Delta_{TV}(t) = \text{diag}(\delta_1(t)I_4, \delta_2(t)I_6)$$

Il est également possible d'introduire des incertitudes paramétriques LTI δ_3 à δ_{10} sur les coefficients z_i et m_j . Par exemple, poser $z_3 = z_{30} (1 + 0.05\delta_3)$ avec $\delta_3 \in [-1, 1]$ revient à prendre en compte une incertitude de $\pm 5\%$ sur z_3 autour de la valeur nominale z_{30} . Ainsi, le bloc Δ regroupe désormais au sein d'une structure unique des paramètres LTV et des incertitudes LTI :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{TV}(t), \Delta_{TI}) = \text{diag}(\delta_1(t)I_4, \delta_2(t)I_6, \delta_3, \delta_4 I_2, \delta_5 I_2, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10})$$

Un actionneur linéaire du second ordre :

$$A(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2}$$

avec $\xi_a = 0.7$ et $\omega_a = 150 \text{ rad/s}$ vient compléter le modèle en boucle ouverte, puis un correcteur robuste :

$$u = K \left[\alpha - \alpha_r \int (\alpha - \alpha_r) q \right]^T$$

où α_r représente l'angle d'incidence de référence, est synthétisé à l'aide d'une méthode de stabilité quadratique [Biannic *et al.*, 2006]. Le comportement désiré du missile est représenté par un modèle de référence :

$$G_0(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0s + \omega_0^2}$$

avec $\xi_0 = 0.6$ et $\omega_0 = 4$ rad/s. Des gabarits fréquentiels sont finalement introduits par l'intermédiaire de filtres du premier ordre $W_1(s) = \frac{s+1}{s+0.01}$ and $W_2(s) = \frac{0.5s}{s+100}$. Le système en boucle fermée $N(s)$ ainsi obtenu est donc d'ordre 9. Il est représenté sur la figure 2.3 et est compatible avec l'interconnexion de la figure 2.2.

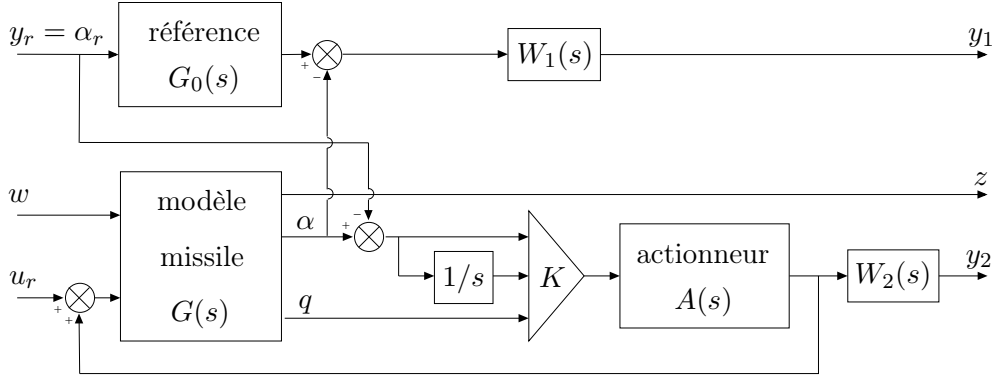


Figure 2.3 Structure du système en boucle fermée.

La performance robuste est définie par la fonction de transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ dont on cherche à minimiser la norme \mathcal{L}_2 -induite. y_r correspond à l'angle d'incidence de référence α_r . Le signal $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ est quant à lui constitué de la différence y_1 entre l'angle d'incidence désiré et l'angle effectif (pour améliorer le suivi du modèle de référence) et de la vitesse de débattement y_2 de la gouverne (pour limiter les sollicitations à l'actionneur).

2.3.3 Résultats sur le continuum de modèles LTI

On vérifie en premier lieu que la stabilité robuste du système en boucle fermée $N(s)$ décrit au paragraphe précédent est bien garantie pour tout opérateur $\Delta \in B(\Delta)$. On réalise donc un test de robustesse à l'aide de l'algorithme optimal 2.1.3 ou de l'algorithme sous-optimal 2.1.10 en choisissant à l'étape 3 une valeur de β égale à 1. Le résultat est positif et le temps de calcul extrêmement faible, comme indiqué dans le tableau 2.1. On réalise alors une analyse complète de robustesse qui révèle que :

- la stabilité robuste est préservée pour tout opérateur $\Delta \in 1.416B(\Delta)$,
- la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ est inférieure à 1.894.

Les résultats regroupés dans le tableau 2.1 attestent de la pertinence de la méthode proposée ainsi que des bonnes propriétés de convergence des algorithmes associés :

- les écarts entre les bornes inférieures et supérieures de β_{opt} et γ_{opt} obtenues à l'aide de l'algorithme optimal 2.1.3 sont très faibles,
- les bornes supérieures de β_{opt} et γ_{opt} obtenues à l'aide de l'algorithme optimal 2.1.3 et de l'algorithme sous optimal 2.1.10 sont presque identiques.

		Algorithme optimal	Algorithme sous-optimal
Stabilité robuste	Valeur de β_{UB}	1	1
	Temps de calcul	5 s	5 s
Marge de robustesse	Valeur de β_{LB}	0.700	-
	Valeur de β_{UB}	0.706	0.709
	Temps de calcul	642 s	24 s
Analyse de performance	Valeur de γ_{LB}	1.837	-
	Valeur de γ_{UB}	1.894	1.894
	Temps de calcul	19 s	18 s

Tableau 2.1 Résultats obtenus sur le continuum de modèles LTI (analyse de robustesse).

On cherche maintenant à synthétiser une précommande dont les quatre pôles sont fixés respectivement à -1, -5, -10 et -15. Le maillage fréquentiel initial est restreint à une unique pulsation, à savoir 5 rad/s.

On applique tout d'abord l'algorithme 2.1.3 avec une tolérance $\epsilon = 0.05$ entre les bornes inférieure et supérieure de γ_{opt} . Quatre itérations sont nécessaires pour atteindre la précision souhaitée, et le maillage fréquentiel final est 5, 2.50, 0.45 et 118.22 rad/s. La borne inférieure de γ_{opt} calculée sur ce maillage est $\gamma_{LB} = 0.881$ tandis que la borne supérieure garantie sur \mathbb{R} tout entier est $\gamma_{UB} = 0.904$. L'écart entre les deux est de l'ordre de 2.5 % pour un temps de calcul de 450 s.

L'algorithme 2.1.10 est appliqué dans un deuxième temps. Comme on pouvait s'y attendre, il se révèle bien plus attractif du point de vue de la complexité numérique, puisque le temps de calcul n'est que de 79 s pour un total de quatre itérations également. Le maillage fréquentiel final est 5, 2.50, 113.38 et 8.40 rad/s, et la borne supérieure obtenue est $\gamma_{UB} = 0.917$. Ce résultat est de plus presque non-conservatif, puisque l'écart entre les bornes supérieures optimale et sous-optimale est inférieur à 2 %. De plus, la valeur de γ_N augmente naturellement d'une itération à l'autre, comme le montre la figure 2.4, ce qui illustre les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme.

L'heuristique 2.1.13 est enfin appliquée. La borne supérieure déterminée avec l'algorithme sous-optimal est $\gamma_{UB} = 0.917$. La borne inférieure obtenue après une itération de l'algorithme optimal est $\gamma_{LB} = 0.873$. Cette heuristique se révèle donc très pertinente car la différence entre les bornes inférieure et supérieure n'est que de 5 % pour un temps de calcul de 251 s très inférieur à celui de l'algorithme 2.1.3. Tous les résultats liés à la synthèse d'une précommande robuste sont regroupés dans le tableau 2.2.

		Algorithme optimal	Algorithme sous-optimal	Heuristique
Synthèse de précommande	Valeur de γ_{LB}	0.881	-	0.873
	Valeur de γ_{UB}	0.904	0.917	0.917
	Temps de calcul	450 s	79 s	79 s + 172 s

Tableau 2.2 Résultats obtenus sur le continuum de modèles LTI (synthèse de précommande).

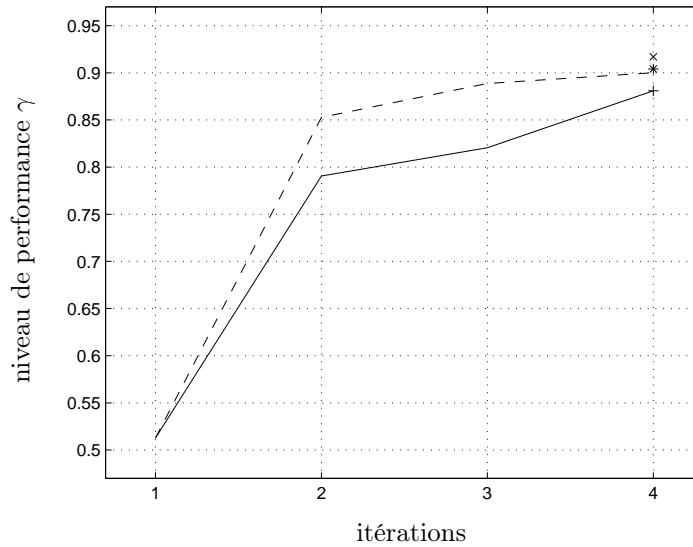


Figure 2.4 Evolution de γ_N au fil des itérations (algorithmes 2.1.3 en trait continu et 2.1.10 en pointillés). Le signe + correspond à la valeur finale de γ_{LB} (algorithme 2.1.3), tandis que les signes * et \times représentent les valeurs finales de γ_{UB} (algorithmes 2.1.3 et 2.1.10 respectivement).

La valeur de γ_{UB} indiquée dans le tableau 2.2 et correspondant à l'analyse de performance a été calculée sans précommande, *i.e.* avec $H(s) = 0$. L'introduction d'une précommande constituée de quatre filtres $H_i(s)$ a donc permis de réduire cette valeur de 1.894 à 0.904. Le gain est supérieur à 50%, ce qui démontre sur cet exemple réaliste l'efficacité de la méthode proposée.

2.3.4 Résultats sur le modèle quasi-LPV

Une démarche similaire à celle présentée au paragraphe 2.3.3 est menée dans le cas du modèle quasi-LPV, et les résultats obtenus par l'application des différents algorithmes sont regroupés dans les tableaux 2.3 et 2.4. On constate que l'introduction d'une précommande constituée de quatre filtres $H_i(s)$ permet de réduire la valeur de γ_{UB} de 3.013 à 1.651, soit un gain de presque 50%.

		Algorithme optimal	Algorithme sous-optimal
Stabilité robuste	Valeur de β_{UB}	1	1
	Temps de calcul	22 s	18 s
Marge de robustesse	Valeur de β_{LB}	0.790	-
	Valeur de β_{UB}	0.809	0.818
	Temps de calcul	112 s	70 s
Analyse de performance	Valeur de γ_{LB}	2.976	-
	Valeur de γ_{UB}	3.013	3.044
	Temps de calcul	296 s	261 s

Tableau 2.3 Résultats obtenus sur le modèle quasi-LPV (analyse de robustesse).

		Algorithme optimal	Algorithme sous-optimal	Heuristique
Synthèse de précommande	Valeur de γ_{LB}	1.629	-	1.627
	Valeur de γ_{UB}	1.651	1.664	1.664
	Temps de calcul	730 s	469 s	469 s + 169 s

Tableau 2.4 Résultats obtenus sur le modèle quasi-LPV (synthèse de précommande).

Conclusion

La principale contribution de ce chapitre est de proposer une approche pratique pour l'analyse de robustesse en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV. Ce problème de dimension infinie est plus difficile à résoudre que dans un contexte classique de μ -analyse en raison des matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV. Un algorithme optimal est proposé, dont la convergence est prouvée. Il consiste à résoudre dans un premier temps le problème sur un maillage fréquentiel, puis à valider le résultat obtenu sur \mathbb{R}_+ tout entier à l'aide d'une technique d'élimination de fréquences. Il est ainsi possible de déterminer une marge de robustesse ou un niveau de performance fiable sans risquer de manquer une fréquence critique, et ce même dans le cas d'un système flexible. Un algorithme sous-optimal permettant de réduire considérablement la complexité numérique du problème est également introduit, ainsi qu'une heuristique combinant efficacement ces deux algorithmes. Les résultats d'analyse sont ensuite généralisés à la synthèse de précommande robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV. L'application de ces différents algorithmes à un modèle réaliste de missile se révèle finalement concluante. Elle permet en effet de montrer le faible conservatisme de l'approche sous-optimale ainsi que le gain offert par l'approche combinée en termes de temps de calcul.

Notations

KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Ensemble des matrices complexes de taille $m \times n$
\bar{z}	Conjugué du nombre complexe z
$\Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
I_m	Matrice identité de taille $m \times m$
0_m	Matrice nulle de taille $m \times m$
$\bar{\sigma}(M)$	Plus grande valeur singulière de la matrice M
$\underline{\sigma}(M)$	Plus petite valeur singulière de la matrice M
M^T	Transposée de la matrice M

M^*	Transconjuguée de la matrice M
$M \leq N$	$M - N$ semi-définie négative (avec M et N hermitiennes)
$\mathcal{F}_u(M, N)$	LFT supérieure (voir annexe)

Dans un souci de concision, la partie triangulaire inférieure stricte d'une matrice hermitienne est généralement représentée à l'aide de symboles \star .

Références

- [Akcaý et Ninness, 1999] H. Akcaý et B. Ninness. Orthonormal basis functions for continuous-time systems and Lp convergence. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 12(3): 295–305, 1999.
- [Balas *et al.*, 2007] G. Balas, R. Chiang, A. Packard et M. Safonov. *Robust Control Toolbox user's guide*. The MathWorks, Inc., 2007.
- [Biannic *et al.*, 2006] J-M. Biannic, C. Roos et A. Knauf. Design and robustness analysis of fighter aircraft flight control laws. *European Journal of Control*, 12(1): 71–85, 2006.
- [Biannic et Ferreres, 2005] J-M. Biannic et G. Ferreres. Efficient computation of a guaranteed robustness margin. Dans *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, Juillet 2005.
- [Campa *et al.*, 2004] G. Campa, M.L. Fravolini, M.R. Napolitano, M.G. Perhinschi et M. Battipede. A stochastically optimal feedforward and feedback technique for flight control systems of high performance aircrafts. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1713–1718, Boston, USA, Juin 2004.
- [Cerone *et al.*, 2002] V. Cerone, M. Milanese et D. Regruto. Robust feedforward design from data via approximate inverse SM identification. Dans *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4664–4669, Las Vegas, USA, Décembre 2002.
- [Devasia, 2002] S. Devasia. Should model-based inverse inputs be used as feedforward under plant uncertainty? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11): 1865–1871, 2002.
- [Faanes et Skogestad, 2004] A. Faanes et S. Skogestad. Feedforward control under the presence of uncertainty. *European Journal of Control*, 10: 30–46, 2004.
- [Fan *et al.*, 1991] M.K.H. Fan, A.L. Tits et J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1): 25–38, 1991.
- [Ferreres *et al.*, 2003] G. Ferreres, J-F. Magni et J-M. Biannic. Robustness analysis of flexible structures: practical algorithms. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(8): 715–733, 2003.
- [Ferreres et Puyou, 2005] G. Ferreres et G. Puyou. Feasibility of H_∞ design specifications: an interpolation method. *International Journal of Control*, 78(12): 927–936, 2005.
- [Ferreres et Roos, 2005] G. Ferreres et C. Roos. Efficient convex design of robust feedforward controllers. Dans *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6460–6465, Séville, Espagne, Décembre 2005.
- [Ferreres et Roos, 2007] G. Ferreres et C. Roos. Robust feedforward design in the presence of LTI/LTV uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(14): 1278–1293, 2007.
- [Giusto et Paganini, 1999] A. Giusto et F. Paganini. Robust synthesis of feedforward compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(8): 1578–1582, 1999.

- [Magni, 2006] J-F. Magni. Linear Fractional Representation Toolbox (version 2.0) for use with Matlab. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Magni/>*, 2006.
- [Mammar *et al.*, 2001] S. Mammar, D. Koenig et L. Nouveliere. Combination of feedforward and feedback H_∞ control for speed scheduled vehicle automatic steering. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 684–689, Arlington, USA, Juin 2001.
- [Reichert, 1992] R.T. Reichert. Dynamic scheduling of modern robust control autopilot design for missiles. *IEEE Control System Magazine*, 12(5): 35–42, 1992.
- [Scorletti et Fromion, 2006] G. Scorletti et V. Fromion. Further results on the design of robust H_∞ feedforward controllers and filters. Dans *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3560–3565, San Diego, USA, Décembre 2006.
- [Wik *et al.*, 2003] T. Wik, C.M. Fransson et B. Lennartsson. Feedforward feedback controller design for uncertain systems. Dans *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5328–5334, Maui, USA, Décembre 2003.
- [Young *et al.*, 1995] P.M. Young, M.P. Newlin et J.C. Doyle. Computing bounds for the mixed μ problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(6): 573–590, 1995.

Chapitre 3

UNE APPROCHE ÉTAT POUR L'ANALYSE DE ROBUSTESSE LTI/LTV

Résumé : La notion de semi-positivité réelle pour un système à données complexes est définie et caractérisée à l'aide d'une version généralisée du lemme KYP. Elle se révèle particulièrement pertinente dans un contexte d'analyse de robustesse, car elle permet d'obtenir une formulation d'état convexe et de dimension finie d'une borne supérieure de μ_{Δ} . De plus, la généralisation à l'analyse de robustesse et à la synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV est quasi immédiate, ce qui n'est pas le cas des approches fréquentielles classiques. L'application de la méthode à un modèle d'avion de combat donne des résultats pertinents et peu conservatifs.

Mots clés : semi-positivité réelle, lemme KYP généralisé, approche état, analyse de robustesse, synthèse robuste, incertitudes mixtes LTI/LTV, optimisation convexe.

Sommaire

3.1	Semi-positivité réelle	53
3.2	Application à la μ-analyse	55
3.2.1	Calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ}	56
3.2.2	Performance robuste	57
3.2.3	Evaluation du conservatisme	58
3.2.4	Intérêt d'une approche état	59
3.3	Généralisation à l'analyse de robustesse LTI/LTV	60
3.4	Extension à la synthèse robuste LTI/LTV	60
3.4.1	Détermination d'un correcteur robuste	60
3.4.2	Aspects algorithmiques	63
3.5	Application à un modèle d'avion de combat	64
3.5.1	Modèle non-linéaire initial et modèle linéarisé	64
3.5.2	Analyse de robustesse	65
3.5.3	Synthèse robuste	66

Bibliographie

- [1] C. Roos et J-M Biannic. On robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties. *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, juillet 2006.
- [2] C. Roos et J-M Biannic. A positivity approach to robust controllers analysis and synthesis versus mixed LTI/LTV uncertainties. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3661-3666, Minneapolis, USA, juin 2006.

Depuis de nombreuses années, le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) est considéré comme l'un des outils les plus pertinents pour l'analyse des systèmes dynamiques et la synthèse de correcteurs. La formulation classique de ce lemme établit une équivalence entre un ensemble infini de contraintes fréquentielles d'un côté et une inégalité matricielle linéaire (LMI) faisant intervenir les matrices d'état du système considéré de l'autre. Ainsi, il est par exemple possible de vérifier qu'une fonction de transfert est positive réelle sur l'axe imaginaire tout entier en résolvant un problème d'optimisation convexe constitué d'une unique contrainte LMI. Ce cas particulier est connu sous le nom de lemme positif réel. De manière générale, le lemme KYP a joué un rôle important dans le développement de nombreuses techniques de commande robuste, telles que l'analyse de robustesse à l'aide de multiplieurs [Balakrishnan, 1994], ou de manière plus générale l'approche IQC [Megretski et Rantzer, 1997].

La version classique du lemme KYP permet de vérifier qu'une propriété donnée est satisfaite pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$. Plus récemment, une généralisation a été proposée par [Iwasaki et Hara, 2005], qui permet de considérer un intervalle quelconque éventuellement borné. Dans le prolongement de ces travaux, ce chapitre s'intéresse plus particulièrement à l'ensemble des pulsations positives et introduit la notion associée de semi-positivité réelle pour des systèmes à données complexes, *i.e.* dont les matrices d'état sont complexes. Cette dernière se révèle particulièrement pertinente lorsqu'elle est appliquée dans un contexte d'analyse de robustesse. On montre en effet ici que la caractérisation fréquentielle de la borne supérieure de μ_{Δ} proposée par [Fan *et al.*, 1991; Young *et al.*, 1995] peut être reformulée comme un test de semi-positivité réelle, à condition de considérer des matrices de scaling D et G complexes, mais constantes sur \mathbb{R}_+ .

Plusieurs applications réalistes indiquent que le conservatisme introduit par le choix de matrices de scaling constantes sur \mathbb{R}_+ demeure très faible. Par contre, si l'on mène un raisonnement analogue en utilisant la formulation classique du lemme KYP, et donc la notion de positivité réelle, les matrices de scaling D et G doivent non seulement être choisies constantes sur \mathbb{R} tout entier, mais également être respectivement réelle et imaginaire pure. Les résultats obtenus sont alors nettement plus conservatifs.

L'introduction de la notion de semi-positivité réelle est donc ici particulièrement judicieuse, car on obtient une caractérisation d'état convexe et de dimension finie d'une borne supérieure de μ_{Δ} que l'on peut résoudre sans difficulté, tout en prenant bien en compte le caractère invariant des incertitudes. De plus, la généralisation de la méthode à l'analyse de robustesse et à la synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV est quasi immédiate, ce qui n'est pas le cas des approches fréquentielles classiques : les matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV ne permettent en effet plus comme dans le cas LTI de résoudre le problème indépendamment à chaque fréquence.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. La notion de semi-positivité réelle est introduite au paragraphe 3.1, de même qu'une généralisation du lemme positif réel. Ce résultat est appliqué à la μ -analyse au paragraphe 3.2. Une nouvelle caractérisation convexe d'une borne supérieure de μ_{Δ} est obtenue, dont le conservatisme est évalué d'un point de vue théorique mais également pratique. L'approche proposée est alors étendue dans les paragraphes 3.3 et 3.4 aux problèmes d'analyse de robustesse et de synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV. Le paragraphe 3.5 est finalement consacré à la validation de la méthode sur un modèle d'avion de combat.

Note importante : Ce chapitre est volontairement centré sur les résultats obtenus au cours de la thèse. Le contexte, la description des problèmes considérés, ainsi que les résultats classiques que l'on peut trouver dans la littérature ne sont rappelés que très brièvement. Une introduction à l'analyse de robustesse en général, et à la μ -analyse en particulier, est proposée au chapitre 1. Elle constitue pour le lecteur qui n'est pas familier de ces techniques un bon préalable à la lecture du présent chapitre. Il en est de même des prérequis mathématiques et autres lemmes techniques, qui sont détaillés dans en annexe.

3.1 Semi-positivité réelle

On rappelle dans un premier temps la définition de la positivité réelle pour un système à données réelles.

Définition 3.1.1 (positivité réelle) Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Le système à données réelles (Σ_r) défini par la matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D_0$ est positif réel si :

$$G(j\omega) + G(j\omega)^* \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Le lemme positif réel fournit alors une caractérisation sous forme d'inégalité linéaire matricielle de la notion de positivité réelle.

Proposition 3.1.2 (lemme positif réel) Soit (Σ_r) un système à données réelles dont la paire (A, B) est gouvernable. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $G(j\omega) + G(j\omega)^* \geq 0$ pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant $\det(j\omega I - A) \neq 0$
2. il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D_0 - D_0^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.2)$$

Preuve : voir [Rantzer, 1996]. ■

On introduit maintenant la notion de semi-positivité réelle, sur laquelle repose la technique d'analyse de robustesse présentée au paragraphe 3.2.

Définition 3.1.3 (semi-positivité réelle) Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{p \times p}$. Le système à données complexes (Σ_c) défini par la matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D_0$ est semi-positif réel si :

$$G(j\omega) + G(j\omega)^* \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.3)$$

Remarque 3.1.4 Parler de semi-positivité réelle n'est pertinent que dans le cas de systèmes à données complexes. Les notions de semi-positivité réelle et de positivité réelle sont en effet équivalentes pour des systèmes à données réelles, car on a alors $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$.

De la même manière que pour la positivité réelle, il est possible d'obtenir une caractérisation sous forme d'inégalité linéaire matricielle de la semi-positivité réelle d'un système à données complexes.

Proposition 3.1.5 (lemme semi-positif réel) Soit (Σ_c) un système à données complexes dont la paire (A, B) est gouvernable. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $G(j\omega) + G(j\omega)^* \geq 0$ pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\det(j\omega I - A) \neq 0$
2. il existe une matrice $Z = R + jS \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $R = R^*$ et $S = S^* \geq 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^*Z + Z^*A & Z^*B - C^* \\ B^*Z - C & -D_0 - D_0^* \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.4)$$

La preuve de ce résultat nécessite l'introduction préalable du lemme technique ci-dessous.

Lemme 3.1.6 Soient $w \in \mathbb{C}^n$ et $z \in \mathbb{C}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tel que $w = \delta z$
2. $w^*Sz + z^*Sw \geq 0 \quad \forall S = S^* \geq 0$ (3.5)

$$w^*Rz - z^*Rw = 0 \quad \forall R = R^* \quad (3.6)$$

Preuve : L'implication 1. \Rightarrow 2. est triviale. Pour montrer la réciproque, on note $w = [w_1 \dots w_n]^T$, $z = [z_1 \dots z_n]^T$, et on définit $R_{\alpha, k} = R_{\alpha, k}^*$ de la manière suivante :

$$R_{\alpha, k}(q, m) = \begin{cases} \alpha & \text{si } (q, m) = (1, k) \text{ ou } (k, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On applique alors (3.6) avec $\begin{cases} \alpha = 1 \\ k \in [1, n] \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha = j \\ k \in [2, n] \end{cases}$. En combinant les équations obtenues, on montre que $\overline{w_1}/\overline{z_1} = w_k/z_k$ pour tout $k \in [1, n]$. Il existe donc $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $w = \delta z$. La relation (3.5) permet finalement de montrer que $\delta \in \mathbb{R}_+$. ■

Preuve de la proposition 3.1.5 : On commence par écrire $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D_0$ sous forme LFT de la manière suivante :

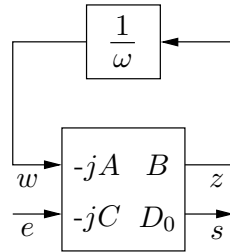


Figure 3.1 Représentation LFT de $G(j\omega)$.

On a donc $s = G(j\omega)e = -jCw + D_0e$ et la semi-positivité réelle de G est équivalente à :

$$\xi^* \begin{bmatrix} 0 & jC^* \\ -jC & D_0 + D_0^* \end{bmatrix} \xi \geq 0 \quad \forall \xi = \begin{bmatrix} w \\ e \end{bmatrix}, \quad w = \frac{1}{\omega}z, \quad \omega \in \mathbb{R}_+$$

En notant alors que $z = -jAw + Be$ et en appliquant le lemme 3.1.6, la relation $w = \frac{1}{\omega}z$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ peut être réécrite sous la forme :

$$\xi^* \begin{bmatrix} (R - jS)A + A^*(R + jS) & (S + jR)B \\ B^*(S - jR) & 0 \end{bmatrix} \xi \geq 0 \quad \forall R = R^*, \forall S = S^* \geq 0$$

En supposant finalement que la paire (A, B) est gouvernable, on applique la \mathcal{S} -procédure qui est ici non-conservative [Iwasaki *et al.*, 2000], ce qui conduit à l'égalité (3.4). ■

Remarque 3.1.7 *Le lemme semi-positif réel peut également être obtenu à partir du théorème 4 de [Iwasaki et Hara, 2005], qui fait partie intégrante d'une étude générale sur le lemme KYP.*

Remarque 3.1.8 *Le lecteur peu familier des techniques utilisées ici pourra se reporter à l'annexe pour une introduction à la \mathcal{S} -procédure et au lemme KYP.*

3.2 Application à la μ -analyse

Le calcul d'une borne supérieure de la valeur singulière structurée μ_{Δ} pour un système LTI soumis à des incertitudes structurées LTI - et donc d'une marge de robustesse - est un problème convexe, mais qui présente une infinité d'équations et d'inconnues. Une première méthode de résolution consiste à aborder directement ce problème de dimension infinie dans le domaine fréquentiel. Elle est présentée au chapitre 1 puis généralisée au chapitre 2 dans le cas d'incertitudes mixtes LTI/LTV.

Une autre alternative est de se ramener à un problème de dimension finie. Dans cette optique, la technique la plus intuitive repose sur le calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ} sur un maillage fréquentiel et non sur \mathbb{R}_+ tout entier. Toutefois, rien ne garantit que l'on ne manque pas une fréquence critique, et ce quelle que soit la finesse du maillage (voir paragraphe 1.2.2). Une méthode plus pertinente consiste à exploiter le lemme semi-positif réel présenté au paragraphe 3.1, et donc d'opter pour une approche état.

Dans ce contexte, les problèmes de stabilité et de performance robustes sont reformulés respectivement dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2. Le paragraphe 3.2.3 propose quant à lui une évaluation de la méthode en termes de conservatisme et de complexité algorithmique, puis le paragraphe 3.2.4 insiste sur les arguments qui justifient le développement d'une telle approche.

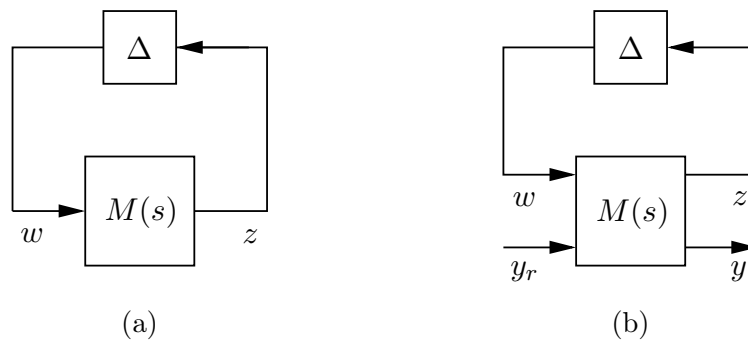


Figure 3.2 *Interconnexions pour l'analyse de stabilité (a) et de performance (b) robustes.*

Notations : *L'ordre du système $M(s)$ est noté n , et les transferts $T_{y_r \rightarrow y}$ et $T_w \rightarrow z$ sont respectivement de taille $m \times m$ et $p \times p$.*

3.2.1 Calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ}

On considère l'interconnexion de la figure 3.2 (a), où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable et $\Delta(s) \in \mathbf{\Delta}$ une incertitude LTI structurée stable. On cherche à calculer une borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ sur \mathbb{R}_+ afin d'obtenir une marge de robustesse, *i.e.* une garantie de stabilité robuste.

La caractérisation fréquentielle classique de la borne supérieure de μ_{Δ} proposée par [Fan *et al.*, 1991; Young *et al.*, 1995] est tout d'abord rappelée ci-dessous. Comme indiqué précédemment, elle implique la résolution d'un problème d'optimisation constitué d'un nombre infini de contraintes et d'inconnues.

Proposition 3.2.1 *Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et $\mathbf{\Delta}$ une structure donnée. Soit β un scalaire positif. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ il existe des matrices de scaling $D(\omega) \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $G(\omega) \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ telles que :*

$$M^*(j\omega)D(\omega)M(j\omega) + j(G(\omega)M(j\omega) - M^*(j\omega)G(\omega)) \leq \beta^2 D(\omega) \quad (3.7)$$

alors $\max_{\omega \in \mathbb{R}_+} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq \beta$.

Remarque 3.2.2 *La définition précise des ensembles de matrices de scaling $\mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$ associés à la structure d'incertitude $\mathbf{\Delta}$ est présentée au chapitre 1.*

L'étape clé permettant de se ramener à un problème de dimension finie consiste à prendre en compte une condition supplémentaire sur les matrices D et G .

Hypothèse 3.2.3 *Les matrices de scaling D et G sont constantes sur \mathbb{R}_+ , *i.e.* $D(\omega) = D$ et $G(\omega) = G$ pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$.*

On peut alors énoncer le résultat central de ce chapitre, qui propose une formulation d'état du problème d'optimisation de la proposition 3.2.1 lorsque l'hypothèse 3.2.3 est vérifiée. L'infinité de contraintes fréquentielles (3.7) est remplacée par l'inégalité linéaire matricielle (3.8), ce qui rend possible le calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ} en résolvant un problème présentant une unique contrainte et un nombre fini de variables d'optimisation.

Proposition 3.2.4 *Soit $M(s) = C(sI - A)^{-1}B + D_0$ un système linéaire stationnaire stable. Soit β un scalaire positif. S'il existe des matrices de scaling $D \in \mathbf{D}_{\mathbf{TI}}$ et $G \in \mathbf{G}_{\mathbf{TI}}$, ainsi qu'une matrice $Z = R + jS \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $R = R^*$ et $S = S^* \geq 0$, telles que :*

$$\begin{bmatrix} A^*Z + Z^*A & Z^*B - jC^*G & C^*D \\ B^*Z + jGC & -\beta^2 D + j(GD_0 - D_0^*G) & D_0^*D \\ DC & DD_0 & -D \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.8)$$

alors $\max_{\omega \in \mathbb{R}_+} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq \beta$.

Preuve : Par application du complément de Schur, l'inégalité (3.7) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \beta^2 D(\omega) - j(G(\omega)M(j\omega) - M^*(j\omega)G(\omega)) & M^*(j\omega)D(\omega) \\ D(\omega)M(j\omega) & D(\omega) \end{bmatrix} \geq 0$$

En supposant que les matrices de scaling D et G sont constantes pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$, cette inégalité est à son tour équivalente à la semi-positivité réelle de :

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2 D}{2} - jGM(s) & 0 \\ DM(s) & \frac{D}{2} \end{bmatrix}$$

dont une représentation d'état est donnée par :

$$F(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline -jGC & \beta^2 \frac{D}{2} - jGD_0 & 0 \\ DC & DD_0 & \frac{D}{2} \end{array} \right] \quad (3.9)$$

Le lemme semi-positif réel (proposition 3.1.5) est alors appliqué à $F(s)$. \blacksquare

Le problème posé par la proposition 3.2.4 consiste à minimiser la valeur de β sous la contrainte (3.8) par rapport aux matrices de scaling D, G et à la matrice de type Lyapunov Z . Il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisé, qui peut être résolu aisément à l'aide d'un solveur LMI [Balas *et al.*, 2007]. Soit β_{opt} la valeur minimale de β vérifiant (3.8). L'interconnexion de la figure 3.2 (a) reste stable pour tout opérateur $\Delta(s) \in \frac{1}{\beta_{opt}}B(\Delta)$, où $B(\Delta)$ représente la boule unité des incertitudes de structure Δ , et $\frac{1}{\beta_{opt}}$ est donc une marge de robustesse garantie.

3.2.2 Performance robuste

On considère maintenant l'interconnexion de la figure 3.2 (b), où $M(s)$ représente toujours un système linéaire stationnaire stable. Le problème de performance robuste consiste à calculer la plus grande valeur de la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'entrée de référence y_r et la sortie y en présence d'incertitudes structurées LTI stables $\Delta(s) \in B(\Delta)$, *i.e.* la plus petite valeur de γ telle que :

$$\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma \quad \forall \Delta(s) \in B(\Delta) \quad (3.10)$$

La proposition ci-dessous donne alors une condition suffisante pour que l'inégalité (3.10) soit satisfaite.

Proposition 3.2.5 *Soient $M(s)$ un système linéaire stationnaire stable et Δ une structure donnée. Soient γ un scalaire positif et $\mathcal{I}_\gamma = \text{diag}(I_p, \gamma^2 I_m)$. Si pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+$ il existe des matrices de scaling $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D(\omega), I_m)$ et $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G(\omega), 0_m)$ avec $D(\omega) \in \mathbf{D}_{\text{TI}}$ et $G(\omega) \in \mathbf{G}_{\text{TI}}$ telles que :*

$$M^*(j\omega)\mathcal{D}(\omega)M(j\omega) + j(\mathcal{G}(\omega)M(j\omega) - M^*(j\omega)\mathcal{G}(\omega)) \leq \mathcal{I}_\gamma\mathcal{D}(\omega) \quad (3.11)$$

alors $\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma$ pour tout opérateur $\Delta(s) \in B(\Delta)$.

On suppose maintenant que l'hypothèse 3.2.3 est vérifiée, *i.e.* que les matrices \mathcal{D} et \mathcal{G} sont constantes $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$. De la même manière que précédemment, le lemme semi-positif réel peut être appliqué afin d'obtenir une caractérisation d'état d'une borne supérieure de γ .

Proposition 3.2.6 *Soit $M(s) = C(sI - A)^{-1}B + D_0$ un système linéaire stationnaire stable. Soient γ un scalaire positif et $\mathcal{I}_\gamma = \text{diag}(I_p, \gamma^2 I_m)$. S'il existe des matrices de scaling $\mathcal{D} = \text{diag}(D, I_m)$ et $\mathcal{G} = \text{diag}(G, 0_m)$ avec $D \in \mathbf{D}_{\text{TI}}$ et $G \in \mathbf{G}_{\text{TI}}$, ainsi qu'une matrice $Z = R + jS \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $R = R^*$ et $S = S^* \geq 0$, telles que :*

$$\left[\begin{array}{ccc} A^*Z + Z^*A & Z^*B - jC^*\mathcal{G} & C^*\mathcal{D} \\ B^*Z + j\mathcal{G}C & -\mathcal{I}_\gamma\mathcal{D} + j(\mathcal{G}D_0 - D_0^*\mathcal{G}) & D_0^*\mathcal{D} \\ DC & DD_0 & -\mathcal{D} \end{array} \right] \leq 0 \quad (3.12)$$

alors $\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma$ pour tout opérateur $\Delta(s) \in B(\Delta)$.

Le problème posé par la proposition 3.2.6 consiste à minimiser la valeur de γ sous la contrainte linéaire (3.12) par rapport aux matrices de scaling \mathcal{D}, \mathcal{G} et à la matrice de type Lyapunov Z . Il peut être résolu aisément à l'aide d'un solveur LMI [Balas *et al.*, 2007].

3.2.3 Evaluation du conservatisme

Examen théorique

L'hypothèse 3.2.3 est source de conservatisme, car les matrices de scaling D et G sont supposées constantes sur \mathbb{R}_+ . Néanmoins, le lemme semi-positif réel introduit au paragraphe 3.1 se révèle bien plus adapté que le lemme positif réel classique dans l'optique de calculer une borne supérieure de μ_{Δ} . En effet, l'application de ce dernier imposerait au système $F(s)$ défini par sa représentation d'état (3.9) d'être à données réelles, et donc aux matrices D et G d'être respectivement réelle et imaginaire pure. Cela reviendrait à considérer que les incertitudes qui affectent le système $M(s)$ sont LTV (voir chapitre 1), d'où un conservatisme excessif. A l'inverse, le lemme semi-positif réel permet de manipuler des systèmes à données complexes, et donc de prendre en compte des matrices $D \in \mathbb{C}^{p \times p}$ et $G \in \mathbb{C}^{p \times p}$ comme dans la formulation fréquentielle initiale de la proposition 3.2.1.

D'autre part, la fonction $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ correspondant à un système rigide présente généralement un unique pic marqué. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que les matrices de scaling constantes obtenues en résolvant le problème d'optimisation de la proposition 3.2.4 soient adaptées à cette fréquence pire cas, et que la marge de robustesse associée soit quasiment non-conservative par rapport à celle obtenue à l'aide de la formulation classique de la proposition 3.2.1. Les résultats obtenus ci-dessous lors de la comparaison de ces deux approches sur des modèles réalistes d'avion et de missile confirment ce raisonnement.

Les résultats sont par contre plus conservatifs pour des systèmes flexibles, en raison de la présence de plusieurs pics très marqués sur le tracé de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$. De plus, la méthode proposée dans ce chapitre repose sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI qui peut devenir très coûteuse d'un point de vue numérique pour des systèmes d'ordre élevé, ce qui est généralement le cas des systèmes flexibles. Il convient donc de garder à l'esprit que le résultat de la proposition 3.2.4 est particulièrement adapté aux systèmes d'ordre peu élevé, tels que les systèmes rigides.

Evaluation pratique

L'objectif est maintenant de valider le raisonnement précédent en calculant une borne supérieure de μ_{Δ} pour différents modèles représentatifs de systèmes réels. Dans cette optique, les trois méthodes suivantes sont comparées en termes de conservatisme :

1. l'approche fréquentielle de [Biannic et Ferreres, 2005], codée dans la Skew Mu Toolbox pour Matlab [Ferreres et Biannic, 2004] et présentée succinctement dans le paragraphe 1.2, qui n'impose aucune restriction sur les matrices de scaling D et G ,
2. l'approche état proposée dans ce chapitre et fondée sur le lemme semi-positif réel, qui suppose que les matrices de scaling D et G sont constantes sur \mathbb{R}_+ mais complexes,
3. l'approche état fondée sur le lemme positif réel classique, qui suppose que les matrices de scaling D et G sont constantes sur \mathbb{R} , avec de plus D réelle et G imaginaire pure.

Le conservatisme de ces approches est évalué sur trois modèles décrits dans [Ferrerres, 1999] et implantés dans la Skew Mu Toolbox :

- un modèle élémentaire d'ordre 4 proposé par [De Gaston et Safonov, 1988] soumis à 3 incertitudes paramétriques réelles LTI non répétées,
- un modèle latéral d'avion de transport civil d'ordre 9 soumis à 14 incertitudes paramétriques réelles LTI non répétées,
- un modèle longitudinal de missile d'ordre 14 soumis à 4 incertitudes paramétriques réelles LTI non répétées.

Ces modèles sont mis sous forme LFT à l'aide de la LFR Toolbox pour Matlab [Magni, 2006] conformément à l'interconnexion de la figure 3.2 (a). Des bornes supérieures de μ_{Δ} sont alors calculées par chacune des trois méthodes décrites précédemment. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

	Exemple de De Gaston et Safonov	Modèle d'avion	Modèle de missile
Méthode 1	0.293	0.237	0.125
Méthode 2	0.293	0.249	0.125
Méthode 3	0.458	0.317	0.133

Tableau 3.1 Bornes supérieures de μ_{Δ} .

Comme le laissait présager l'analyse du paragraphe 3.2.3, la seconde méthode fondée sur la notion de semi-positivité réelle est presque non-conservative dans le cas de systèmes rigides par rapport à une approche fréquentielle classique, bien que les matrices de scaling soient constantes sur \mathbb{R}_+ . L'écart entre les deux est en effet inférieur à 5% dans les 3 cas. La troisième méthode, qui repose sur le lemme positif réelle classique, est quant à elle beaucoup plus conservative.

3.2.4 Intérêt d'une approche état

Le conservatisme de la borne supérieure de μ_{Δ} obtenue en appliquant le lemme semi-positif réel reste modéré, et cette approche présente des avantages déterminants :

- Le problème d'optimisation de la proposition 3.2.1 nécessite de prendre en compte une infinité de contraintes, alors que la formulation de la proposition 3.2.4 n'en fait intervenir qu'une. Il n'est donc pas nécessaire de recourir à une résolution sur un maillage fréquentiel et tout risque de manquer une fréquence critique, *i.e.* de surévaluer la marge de robustesse, est évité.
- La méthode proposée ici consiste à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte LMI, pour lequel il existe des solveurs performants. Elle est donc très simple à mettre en œuvre.
- Au-delà du calcul d'une borne supérieure de μ_{Δ} , la généralisation à l'analyse de robustesse et à la synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV est aisée, ce qui n'est pas le cas des approches fréquentielles classiques. Ces extensions sont détaillées aux paragraphes 3.3 pour l'analyse de robustesse et 3.4 pour la synthèse robuste.

3.3 Généralisation à l'analyse de robustesse LTI/LTV

On revient à l'interconnexion de la figure 3.2 (a) et on suppose maintenant que $M(s)$ est soumis à des incertitudes structurées mixtes LTI/LTV. Le bloc Δ est donc de la forme $\Delta = \text{diag}(\Delta_{TI}(s), \Delta_{TV}(t))$, avec $\Delta_{TI}(s) \in \mathbf{\Delta}_{TI}$ et $\Delta_{TV}(t) \in \mathbf{\Delta}_{TV}$, et aucune hypothèse n'est faite sur la vitesse de variation de $\Delta_{TV}(t)$. On cherche à déterminer une marge de robustesse pour le système $M(s)$. Pour cela, on associe aux incertitudes Δ des matrices de scaling $D(\omega) = \text{diag}(D_{TI}(\omega), D_{TV})$ et $G(\omega) = \text{diag}(G_{TI}(\omega), G_{TV})$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{TI}(\omega) \in \mathbf{D}_{TI} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \\ G_{TI}(\omega) \in \mathbf{G}_{TI} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \\ D_{TV} \in \mathbf{D}_{TV} \\ G_{TV} \in \mathbf{G}_{TV} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Si l'hypothèse 3.2.3 est vérifiée, *i.e.* si l'on choisit des matrices D_{TI} et G_{TI} constantes sur \mathbb{R}_+ , la proposition 3.2.4 est directement applicable au cas LTI/LTV. On obtient ainsi une caractérisation d'état convexe du problème d'analyse de robustesse en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV.

Remarque 3.3.1 *Lorsque l'on considère des incertitudes LTV, l'hypothèse 3.2.3 n'introduit aucun conservatisme supplémentaire car les matrices de scaling correspondantes sont déjà indépendantes de la fréquence dans leur forme la plus générale [Shamma, 1994].*

Comme on peut le constater, la prise en compte d'incertitudes mixtes LTI/LTV est immédiate. Cette généralisation s'avère beaucoup plus délicate lorsque l'on considère des méthodes fréquentielles. En effet, ces dernières nécessitent le plus souvent de pouvoir calculer des matrices de scaling indépendamment à chaque fréquence lorsqu'elles sont développées dans le cas LTI, ce qui n'est plus possible ici en raison des matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV. L'effort à fournir est alors important, comme c'est le cas notamment au chapitre 2.

3.4 Extension à la synthèse robuste LTI/LTV

3.4.1 Détermination d'un correcteur robuste

Soit l'interconnexion de la figure 3.3, où $P(s)$ représente un système linéaire stationnaire stabilisable. Le problème de synthèse robuste consiste à déterminer un correcteur $K(s)$ et une précommande $H(s)$ qui minimisent la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'entrée de référence y_r et la sortie y en présence d'incertitudes structurées $\Delta = \text{diag}(\Delta_{TI}(s), \Delta_{TV}(t)) \in \mathbf{\Delta}$, où $\Delta_{TI}(s) \in \mathbf{\Delta}_{TI}$ et $\Delta_{TV}(t) \in \mathbf{\Delta}_{TV}$ contiennent respectivement des incertitudes LTI et LTV à variations arbitrairement rapides.

On regroupe $P(s)$, $K(s)$ et $H(s)$ au sein d'un même système $M(s)$ de manière à se ramener à l'interconnexion de la figure 3.2 (b), puis on applique la proposition 3.2.5 pour obtenir une borne supérieure de la norme \mathcal{L}_2 -induite recherchée. Il est alors possible de mettre en œuvre l'approche semi-positive réelle de la même manière qu'au paragraphe 3.2.2, mais il en résulte une contrainte fortement non-linéaire et difficilement exploitable si l'on considère la forme la plus générale de $M(s)$.

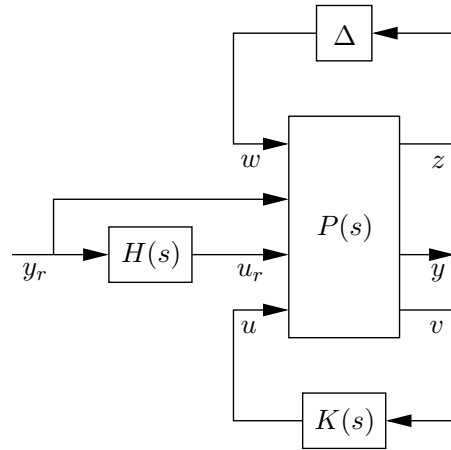


Figure 3.3 Interconnexion pour la synthèse d'un correcteur et d'une précommande robustes.

Pour simplifier le problème et pouvoir proposer une solution pratique, on introduit les représentations d'état de $P(s)$, $K(s)$ et $H(s)$:

$$P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ C_3 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right] \quad (3.14)$$

$$K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right], \quad H(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_H \\ \hline C_H & D_H \end{array} \right]$$

En posant $D_{33} = 0$, le système $M(s)$ admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_3 D_K C_3 & B_3 C_K & (B_2 + B_3 D_K D_{32}) \tilde{C}_H \\ B_K C_3 & A_K & B_K D_{32} \tilde{C}_H \\ 0 & 0 & A_H \end{bmatrix} \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_3 D_K D_{31} & (B_2 + B_3 D_K D_{32}) \tilde{D}_H \\ B_K D_{31} & B_K D_{32} \tilde{D}_H \\ 0 & B_H \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{13} D_K C_3 & D_{13} C_K & (D_{12} + D_{13} D_K D_{32}) \tilde{C}_H \\ C_2 + D_{23} D_K C_3 & D_{23} C_K & (D_{22} + D_{23} D_K D_{32}) \tilde{C}_H \end{bmatrix} \\ D_{cl} &= \begin{bmatrix} D_{11} + D_{13} D_K D_{31} & (D_{12} + D_{13} D_K D_{32}) \tilde{D}_H \\ D_{21} + D_{23} D_K D_{31} & (D_{22} + D_{23} D_K D_{32}) \tilde{D}_H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_H = \begin{bmatrix} 0_m \\ C_H \end{bmatrix}$ et $\tilde{D}_H = \begin{bmatrix} I_m \\ D_H \end{bmatrix}$. En supposant de plus que $D_{32} = 0$, les matrices A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} et D_{cl} deviennent affines en K et H . A ce stade, l'application du lemme semi-positif réel conduit à l'obtention d'une contrainte bilinéaire et une première approche consiste à envisager une résolution directe. Cependant, les solveurs BMI actuels ne permettent généralement pas de résoudre efficacement des problèmes faisant intervenir plus de quelques

dizaines de variables. Ils sont donc difficilement utilisables lorsque l'on cherche à optimiser des matrices de type Lyapunov, telle la matrice Z introduite dans la proposition 3.2.6.

Une autre méthode consiste à proposer un schéma de résolution itératif faisant intervenir uniquement des contraintes linéaires. Pour qu'une telle approche soit pertinente, il apparait intéressant de pouvoir optimiser simultanément les matrices de scaling associées aux incertitudes et les matrices d'état du correcteur et de la précommande, ce qui est pour l'instant impossible, l'inégalité bilinéaire précédente n'étant convexe ni en \mathcal{D} , \mathcal{G} , H , ni en \mathcal{D} , \mathcal{G} , K . Cependant, la convexité en \mathcal{D} , \mathcal{G} , H peut être obtenue sans hypothèse supplémentaire en notant de la même manière qu'au chapitre 2 que l'inégalité (3.11) reste vérifiée si l'on change $M(j\omega)$ en $M^*(j\omega)$. Il suffit enfin d'imposer $D_{31} = 0$ pour que le problème devienne également convexe en \mathcal{D} , \mathcal{G} , K , et donc en \mathcal{D} , \mathcal{G} , K , H .

Dans ces conditions et lorsque l'hypothèse 3.2.3 est vérifiée, la proposition ci-dessous présente une approche état pour la synthèse combinée d'un correcteur et d'une précommande robustes en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV. L'application du lemme semi-positif réel permet de remplacer l'infinité de contraintes fréquentielles (3.11) par l'inégalité (3.15).

Proposition 3.4.1 *Soit $P(s)$ un système linéaire stationnaire stabilisable défini par sa représentation d'état (3.14) et vérifiant $D_{31} = 0$, $D_{32} = 0$, $D_{33} = 0$. Soient γ un scalaire positif et $\mathcal{I}_\gamma = \text{diag}(I_p, \gamma^2 I_m)$. S'il existe des matrices de scaling $\mathcal{D} = \text{diag}(D_{TI}, D_{TV}, I_m)$ et $\mathcal{G} = \text{diag}(G_{TI}, G_{TV}, 0_m)$ avec $D_{TI} \in \mathbf{D}_{TI}$, $D_{TV} \in \mathbf{D}_{TV}$, $G_{TI} \in \mathbf{G}_{TI}$ et $G_{TV} \in \mathbf{G}_{TV}$, ainsi qu'une matrice $Z = R + jS \in \mathbf{C}^{n \times n}$ avec $R = R^*$ et $S = S^* \geq 0$, telles que :*

$$\begin{bmatrix} -A_{cl}Z - Z^*A_{cl}^* & -Z^*C_{cl}^* - jB_{cl}\mathcal{G} & B_{cl}\mathcal{D} \\ -C_{cl}Z + j\mathcal{G}B_{cl}^* & -\mathcal{I}_\gamma\mathcal{D} + j(\mathcal{G}D_{cl}^* - D_{cl}\mathcal{G}) & D_{cl}\mathcal{D} \\ DB_{cl}^* & \mathcal{D}D_{cl}^* & -\mathcal{D} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_3D_KC_3 & B_3C_K & B_2\tilde{C}_H \\ B_KC_3 & A_K & 0 \\ 0 & 0 & A_H \end{bmatrix} & B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2\tilde{D}_H \\ 0 & 0 \\ 0 & B_H \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{13}D_KC_3 & D_{13}C_K & D_{12}\tilde{C}_H \\ C_2 + D_{23}D_KC_3 & D_{23}C_K & D_{22}\tilde{C}_H \end{bmatrix} & D_{cl} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}\tilde{D}_H \\ D_{21} & D_{22}\tilde{D}_H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

alors l'interconnexion de la figure 3.3 est stable et $\|T_{y_r \rightarrow y}\|_{i\mathcal{L}_2} \leq \gamma \quad \forall \Delta \in B(\Delta)$.

Le problème de synthèse considéré ici consiste à minimiser la valeur de γ sous la contrainte bilinéaire (3.15) par rapport aux matrices de scaling \mathcal{D} , \mathcal{G} , aux matrices d'état A_K , B_K , C_K , D_K du correcteur et A_H , B_H , C_H , D_H de la précommande, ainsi qu'à la matrice de type Lyapunov Z .

Remarque 3.4.2 *D'un point de vue pratique, les contraintes sur la transmission directe de $P(s)$ ne nuisent pas à la généralité du problème. Il est en effet toujours possible d'insérer des filtres passe-bas représentatifs de capteurs en amont du correcteur $K(s)$ au niveau de la sortie v , ce qui a pour effet d'annuler les matrices D_{31} , D_{32} et D_{33} .*

3.4.2 Aspects algorithmiques

Deux cas particuliers méritent d'être signalés, pour lesquels le problème d'optimisation de la proposition (3.15) est convexe et peut être résolu aisément à l'aide d'un solveur LMI.

1. Fixer $K(s)$ et $H(s)$ revient à considérer le problème de performance robuste traité dans le paragraphe 3.2.2.
2. Fixer uniquement $K(s)$ revient à s'intéresser à la synthèse d'une précommande robuste. L'inégalité (3.15) étant convexe par rapport à \mathcal{D} , \mathcal{G} , Z , B_H et D_H , le problème considéré peut donc être résolu directement dans le cas d'une précommande statique, ou dans celui d'une précommande dynamique si les matrices A_H et C_H sont fixées a priori. Ce résultat permet de dresser un parallèle avec le paragraphe 2.3, où l'on montre que la convexité est préservée à condition que la précommande soit mise sous la forme $H(s) = \sum_{i=1}^{n_H} \theta_i H_i(s)$, où les $H_i(s)$ sont fixés, ce qui revient exactement à fixer les matrices A_H et C_H .

Dans ces deux cas, le correcteur $K(s)$ est fixé et il n'est donc pas nécessaire d'imposer de contraintes sur la transmission directe du système $P(s)$.

Dans le cas général, l'inégalité (3.15) est cependant bilinéaire. On introduit alors l'algorithme ci-dessous qui consiste à résoudre alternativement le problème d'optimisation de la proposition 3.4.1 par rapport à \mathcal{D} , \mathcal{G} , Z d'une part et \mathcal{D} , \mathcal{G} , K , H d'autre part.

Algorithme 3.4.3 (Synthèse combinée de correcteur et précommande robustes)

1. Déterminer un correcteur initial $K(s)$ qui garantit la stabilité robuste de l'interconnexion de la figure 3.3, puis une précommande initiale $H(s)$. Soit γ_0 le niveau de performance obtenu.
2. Fixer les matrices A_K , B_K , C_K , D_K et A_H , B_H , C_H , D_H . Minimiser γ sous la contrainte linéaire (3.15) par rapport à \mathcal{D} , \mathcal{G} et Z .
3. Fixer la matrice Z . Minimiser γ sous la contrainte linéaire (3.15) par rapport à \mathcal{D} , \mathcal{G} , A_K , B_K , C_K , D_K et A_H , B_H , C_H , D_H . Soit γ_{opt} la valeur obtenue. Si $\gamma_{opt} > (1-\epsilon)\gamma_0$, où $\epsilon > 0$ représente une tolérance donnée, interrompre l'algorithme car la décroissance du critère est devenue trop faible. Sinon, poser $\gamma_0 = \gamma_{opt}$ et retourner à l'étape 2.

La valeur de γ_{opt} décroît d'une itération à l'autre, ce qui assure la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'itérations. La valeur finale constitue une borne supérieure de la norme \mathcal{L}_2 -induite recherchée, mais rien ne permet d'affirmer qu'elle correspond au minimum global du problème d'optimisation de la proposition 3.4.1, *i.e.* vers la valeur minimale de γ vérifiant l'inégalité (3.15). Mais contrairement à d'autres méthodes telles que la $(D,G) - K$ itération [Young, 1996], les matrices de scaling \mathcal{D} et \mathcal{G} sont ici optimisées à chaque étape de l'algorithme, ce qui permet d'améliorer la convergence.

La méthode proposée dans ce chapitre présente également d'autres avantages par rapport à la désormais classique $(D,G) - K$ itération [Young, 1996]. Elle permet en effet la synthèse combinée d'un correcteur et d'une précommande robustes, dont l'ordre et la structure peuvent être choisis librement. Le fait d'imposer des matrices de scaling constantes sur \mathbb{R}_+ est certes source de conservatisme, mais ce dernier demeure le plus souvent modéré comme le montre le paragraphe 3.2.3. D'autre part, l'approche proposée ici est particulièrement aisée à mettre en œuvre d'un point de vue algorithmique. A l'inverse, dans la $(D,G) - K$ itération, les matrices de scaling sont calculées sur un maillage fréquentiel et doivent ensuite être interpolées sur \mathbb{R}_+ tout entier. Rien ne garantit alors que les réponses fréquentielles des systèmes $D(s)$ et $G(s)$ ainsi obtenus soient proches des valeurs optimisées

en chaque point du maillage. De plus, cette méthode n'est pas adaptable facilement dans le cas d'incertitudes mixtes LTI/LTV, car il n'est plus possible de résoudre le problème indépendamment en chaque point du maillage en raison des matrices de scaling constantes associées aux incertitudes LTV.

3.5 Application à un modèle d'avion de combat

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer sur un modèle d'avion de combat les techniques d'analyse et de synthèse robustes en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV détaillées aux paragraphes 3.3 et 3.4. Lorsque cela est possible, les résultats sont comparés à ceux de l'approche fréquentielle introduite au chapitre 2.

3.5.1 Modèle non-linéaire initial et modèle linéarisé

Le modèle non-linéaire initial est extrait de [Döll *et al.*, 2005]. Il est représentatif du mouvement longitudinal d'un avion de combat en vol subsonique à une altitude de 40000 ft. Son comportement en boucle ouverte est décrit par les équations ci-dessous.

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -K_1 M C_z(\alpha, M, u_c) \cos(\alpha) + q + \frac{K_2}{M} \\ \dot{q} &= K_3 M^2 C_m(\alpha, M, u_c)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Le vecteur d'état $x = [\alpha \ q]^T$ est constitué de l'angle d'incidence α et de la vitesse de tangage q , et on suppose qu'il est entièrement mesuré. La commande u_c correspond à l'angle de braquage de l'empennage horizontal, tandis que M désigne le nombre de Mach. Les coefficients aérodynamiques C_z et C_m sont quant à eux modélisés par des fonctions polynomiales, et les coefficients K_1 à K_5 sont constants.

$$\begin{aligned}C_z(\alpha, M, u_c) &= C_{z\alpha}(M) \alpha + (1 - K_4 M^2) C_{z\delta}(M) u_c \\ C_m(\alpha, M, u_c) &= C_{m\alpha}(M) \alpha + K_5 \frac{C_{mq}(M)}{M} q + (1 - K_4 M^2) C_{m\delta}(M) u_c\end{aligned}$$

On considère des angles d'incidence inférieurs à 20 deg, ce qui permet de remplacer la fonction trigonométrique $\cos(\alpha)$ dans l'équation (3.16) par son approximation polynomiale $1 - \alpha^2/2$. D'autre part, seul le mode d'oscillations d'incidence est étudié ici et il est réaliste de considérer que le nombre de Mach varie peu sur l'horizon de temps considéré. Ainsi, le terme K_2/M reste quasiment constant et peut être assimilé à une perturbation extérieure rejetée par le système en boucle fermée en raison de l'intégrateur présent dans le correcteur (voir figure 3.4). Ce terme est donc ignoré dans la suite de l'étude.

Le modèle d'état non-linéaire ainsi adapté $\dot{x} = f(x, u_c)$ est mis sous forme LFT $x = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta)u_c$ à l'aide de la LFR Toolbox [Magni, 2006]. Plus précisément, les relations $\alpha = 10 + 10 \delta_1$ et $M = 0.7 + 0.2 \delta_2$ sont injectées dans les équations (3.16) de telle sorte que $\delta_1 \in [-1, 1]$ et $\delta_2 \in [-1, 1]$ correspondent respectivement à $\alpha \in [0, 20 \text{ deg}]$ et $M \in [0.5, 0.9]$, *i.e.* au domaine de validité du modèle. A ce stade, le bloc Δ est constitué de paramètres LTV répétés :

$$\Delta = \Delta_{TV}(t) = \text{diag}(\delta_1(t)I_2, \delta_2(t)I_7)$$

Il est également possible d'introduire des incertitudes paramétriques LTI δ_3 à δ_7 sur les coefficients C_{zi} et C_{mj} . Par exemple, poser $C_{z\alpha} = C_{z\alpha_0}(1 + 0.05 \delta_3)$ avec $\delta_3 \in [-1, 1]$ revient

à prendre en compte une incertitude de $\pm 5\%$ sur $C_{z\alpha}$ autour de la valeur nominale $C_{z\alpha_0}$. Ainsi, le bloc Δ regroupe désormais au sein d'une structure unique des paramètres LTV et des incertitudes LTI :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{TV}(t), \Delta_{TI}) = \text{diag}(\delta_1(t)I_2, \delta_2(t)I_7, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7)$$

Un actionneur linéaire du second ordre :

$$A(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a\omega_a s + \omega_a^2}$$

avec $\xi_a = 0.7$ et $\omega_a = 150$ rad/s complète le modèle en boucle ouverte, puis un correcteur :

$$u = K \left[\int (\alpha_r - \alpha) \quad \alpha \quad q \right]^T$$

est introduit, où α_r représente l'angle d'incidence de référence. Enfin, une précommande $H(s)$ convertit cet angle α_r en un braquage approprié u_r de l'empennage horizontal. La structure complète du système en boucle fermée est représentée sur la figure 3.4.

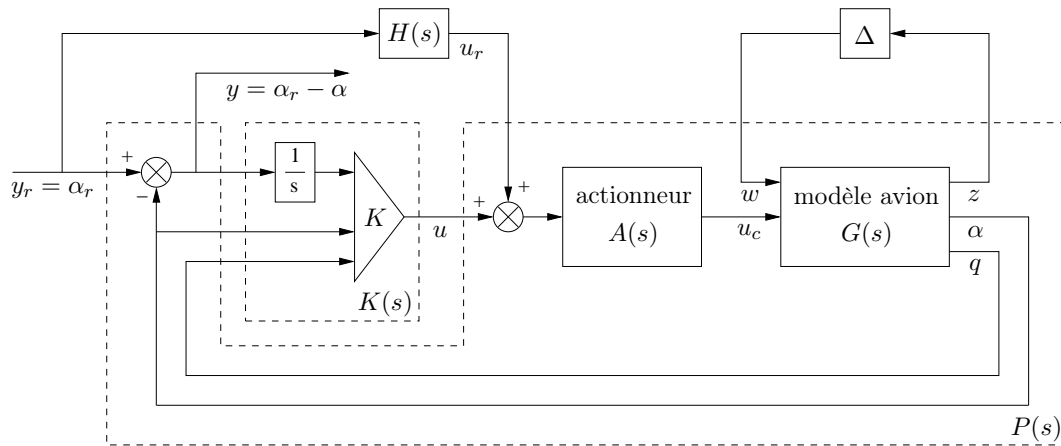


Figure 3.4 Structure du modèle en boucle fermée.

La performance robuste est définie par la fonction de transfert $T_{y_r \rightarrow y}$ entre l'angle d'incidence de référence $y_r = \alpha_r$ et la différence $y = \alpha_r - \alpha$ entre l'angle de référence et l'angle effectif.

3.5.2 Analyse de robustesse

On considère le système en boucle fermée de la figure 3.4, avec un correcteur $K(s)$ de type PID synthétisé par une approche modale. La précommande n'est pas prise en compte pour le moment, *i.e.* $H(s) = 0$. Une analyse de stabilité et de performance robustes est alors réalisée afin de comparer l'approche état proposée dans ce chapitre (méthode 1) avec l'approche fréquentielle présentée au chapitre 2 (méthode 2). Les résultats sont regroupés dans le tableau 3.2. Ils montrent que la première méthode est pratiquement non-conservative par rapport à la seconde, bien que les matrices de scaling D et G associées aux incertitudes LTI soient constantes sur \mathbb{R}_+ . D'autre part, les temps de calcul sont légèrement inférieurs dans le premier cas, ce qui s'explique par l'ordre peu élevé du système, qui a tendance à favoriser l'approche état par rapport à l'approche fréquentielle.

		Méthode 1	Méthode 2
Stabilité robuste	Valeur de β_{opt}	0.880	0.876
	Temps de calcul	29 s	30 s
Performance robuste	Valeur de γ_{opt}	2.341	2.315
	Temps de calcul	20 s	76 s

Tableau 3.2 Analyse de stabilité et de performance robustes.

3.5.3 Synthèse robuste

Une précommande d'ordre 1 est tout d'abord synthétisée, dont l'unique pôle est fixé à -3 . L'objectif γ est minimisé sous la contrainte LMI (3.15) par rapport aux variables d'optimisation \mathcal{D} , \mathcal{G} , Z , B_H , D_H , et la valeur optimale $\gamma_{opt} = 1.375$ est obtenue en 28 s. L'introduction d'une précommande d'ordre 1 permet donc de réduire γ_{opt} de plus de 40%, ce qui montre l'efficacité de la méthode de synthèse proposée. D'autre part, si la synthèse est réalisée par l'approche fréquentielle du chapitre 2, on obtient en 90 s la valeur minimale $\gamma_{opt} = 1.335$. Cela traduit une fois encore le très faible conservatisme de l'approche état, puisque la différence entre ces deux valeurs de γ_{opt} n'est que de 3%.

L'objectif est maintenant de mettre en œuvre l'algorithme 3.4.3 afin de réaliser une synthèse combinée d'un correcteur et une précommande robustes permettant de minimiser la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert $T_{y_r \rightarrow y}$. Le correcteur PID calculé au paragraphe 3.5.2 assure que $\beta_{opt} < 1$, ce qui garantit la stabilité du système en boucle fermée pour tout opérateur $\Delta \in B(\Delta)$. L'algorithme 3.4.3 est alors exécuté en utilisant ce correcteur comme point d'initialisation. Après 5 itérations (83 s), on obtient $\gamma_{opt} = 1.164$. Il apparaît donc possible de réduire de manière significative la valeur de γ_{opt} en un nombre peu élevé d'itérations. De plus, la décroissance de l'objectif est régulière, ce qui traduit les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme.

Conclusion

Ce chapitre introduit la notion de semi-positivité réelle pour des systèmes à données complexes et en propose une caractérisation à l'aide d'une version généralisée du lemme KYP. La principale contribution consiste alors à appliquer ce résultat dans le contexte de la μ -analyse : une formulation d'état convexe et de dimension finie d'une borne supérieure de μ_{Δ} peut être obtenue à condition de considérer des matrices de scaling D et G complexes, mais constantes sur \mathbb{R}_+ . Dans le cas de systèmes rigides, cette borne se révèle très peu conservatrice par rapport à la formulation fréquentielle classique, et est beaucoup plus facile à calculer. Elle est également beaucoup moins conservatrice que la borne obtenue à l'aide du lemme KYP classique qui nécessite d'optimiser des matrices de scaling constantes sur l'ensemble \mathbb{R} tout entier. Cette dernière est en effet communément utilisée pour décrire des incertitudes LTV à variations arbitrairement rapides, et n'est donc pas adaptée à la prise en compte d'incertitudes LTI. D'autre part, le formalisme proposé dans ce chapitre peut être aisément étendu à l'analyse de robustesse et à la synthèse robuste en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV. Un algorithme permettant la synthèse combinée d'un correcteur et d'une précommande robustes est ainsi proposé. L'application à un modèle d'avion de combat et la comparaison avec d'autres méthodes donnent des résultats prometteurs.

Notations

BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire
IQC	Contrainte Quadratique Intégrale
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Ensemble des matrices complexes de taille $m \times n$
\mathbb{C}^n	Ensemble des vecteurs complexes de taille n
I_m	Matrice identité de taille $m \times m$
0_m	Matrice nulle de taille $m \times m$
\overline{M}	Conjuguée de la matrice M
M^T	Transposée de la matrice M
M^*	Transconjugée de la matrice M
$M \leq N$	$M - N$ semi-définie négative (avec M et N hermitiennes)
$\mathcal{F}_u(M, N)$	LFT supérieure (voir annexe)

Références

- [Balakrishnan, 1994] V. Balakrishnan. Construction of Lyapunov functions in robustness analysis with multipliers. Dans *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2021–2025, Orlando, USA, Décembre 1994.
- [Balas *et al.*, 2007] G. Balas, R. Chiang, A. Packard et M. Safonov. *Robust Control Toolbox user's guide*. The MathWorks, Inc., 2007.
- [Biannic et Ferreres, 2005] J-M. Biannic et G. Ferreres. Efficient computation of a guaranteed robustness margin. Dans *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, Juillet 2005.
- [De Gaston et Safonov, 1988] R.R.E. De Gaston et M.G. Safonov. Exact calculation of the multiloop stability margin. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(2): 156–171, 1988.
- [Döll *et al.*, 2005] C. Döll, A. Knauf et J-F. Magni. LFT-modelling of the longitudinal motion of a generic military aircraft. Dans *Proceedings of the 1st European Conference for Aero-Space Sciences*, Moscou, Russie, Juillet 2005.
- [Fan *et al.*, 1991] M.K.H. Fan, A.L. Tits et J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1): 25–38, 1991.
- [Ferreres et Biannic, 2004] G. Ferreres et J-M. Biannic. A Skew Mu Toolbox (SMT) for robustness analysis. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Biannic/mypage.html>*, 2004.
- [Ferreres, 1999] G. Ferreres. *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications*. Springer Verlag, 1999.

- [Iwasaki *et al.*, 2000] T. Iwasaki, G. Meinsma et M. Fu. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6(2-3): 305–320, 2000.
- [Iwasaki et Hara, 2005] T. Iwasaki et S. Hara. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1): 41–59, 2005.
- [Magni, 2006] J-F. Magni. Linear Fractional Representation Toolbox (version 2.0) for use with Matlab. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Magni/>*, 2006.
- [Megretski et Rantzer, 1997] A. Megretski et A. Rantzer. System analysis via Integral Quadratic Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6): 819–830, 1997.
- [Rantzer, 1996] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28(1): 7–10, 1996.
- [Roos et Biannic, 2006a] C. Roos et J-M. Biannic. On robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.
- [Roos et Biannic, 2006b] C. Roos et J-M. Biannic. A positivity approach to robust controllers analysis and synthesis versus mixed LTI/LTV uncertainties. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3661–3666, Minneapolis, USA, Juin 2006.
- [Shamma, 1994] J.S. Shamma. Robust stability with time-varying structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4): 714–724, 1994.
- [Young *et al.*, 1995] P.M. Young, M.P. Newlin et J.C. Doyle. Computing bounds for the mixed μ problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(6): 573–590, 1995.
- [Young, 1996] P.M Young. Controller design with real parametric uncertainties. *International Journal of Control*, 65(3): 469–509, 1996.

Deuxième partie

Synthèse anti-windup dynamique

Chapitre 4

INTRODUCTION À L'ANALYSE DES SYSTÈMES SATURÉS

Résumé : La synthèse de lois de commande performantes pour des systèmes saturés constitue l'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire. Ce chapitre introductif présente tout d'abord quelques résultats généraux relatifs à la théorie de la stabilité de Lyapunov ainsi que plusieurs approches permettant de modéliser des non-linéarités de type saturation. La combinaison de ces différents éléments permet alors de formuler les problèmes de l'estimation du domaine de stabilité et de la mesure du niveau de performance d'un système linéaire saturé à l'aide d'inégalités matricielles linéaires. L'extension de ces techniques d'analyse à la synthèse de correcteurs est brièvement abordée, faisant ainsi le lien avec le chapitre 5, où sont proposées de nouvelles techniques de synthèse anti-windup.

Mots clés : stabilité de Lyapunov, fonctions de Lyapunov, saturations, zones mortes, modélisation polytopique, condition de secteur, estimation du domaine de stabilité, performance d'un système saturé, synthèse anti-windup.

Sommaire

4.1	Stabilité des systèmes non-linéaires	72
4.1.1	Existence d'un domaine de stabilité	72
4.1.2	Stabilité au sens de Lyapunov	73
4.1.3	Recherche de fonctions de Lyapunov	74
4.2	Représentation des non-linéarités de type saturation	75
4.2.1	Définition de la fonction saturation	76
4.2.2	Modélisation polytopique	77
4.2.3	Modélisation par non-linéarités de secteur	78
4.3	Analyse des systèmes saturés	79
4.3.1	Estimation du domaine de stabilité	79
4.3.2	Mesure du niveau de performance	81
4.4	Vers la prise en compte du phénomène de windup	83
4.4.1	Principe de la synthèse anti-windup	83
4.4.2	Etat de l'art	84

Les saturations et autres non-linéarités statiques sont omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes. L'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire consiste donc à synthétiser des lois de commande performantes pour des systèmes linéaires saturés. La littérature est abondante sur ce sujet et de nombreuses approches permettent désormais de formuler des conditions de stabilité et de stabilisation plus ou moins conservatives.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les techniques existantes d'analyse des systèmes saturés puis d'introduire quelques éléments de synthèse anti-windup. Il ne s'agit pas ici de réaliser une étude bibliographique exhaustive, mais plutôt d'insister sur les résultats et les propriétés utiles à la compréhension du chapitre suivant.

Le chapitre est organisé autour de quatre grands axes. Le paragraphe 4.1 introduit la notion de domaine de stabilité et présente quelques résultats généraux relatifs à la théorie de Lyapunov. Le paragraphe 4.2 est quant à lui consacré à la représentation des non-linéarités de type saturation. L'accent est notamment mis sur la modélisation polytopique et sur l'approche par condition de secteur. La combinaison de ces éléments au paragraphe 4.3 permet alors d'obtenir des formulations convexes des problèmes de l'estimation du domaine de stabilité et de la mesure du niveau de performance pour un système linéaire saturé. Enfin, l'extension de ces techniques d'analyse à la synthèse de correcteurs est brièvement abordée dans le paragraphe 4.4, qui permet de faire le lien avec le chapitre 5, où sont proposées de nouvelles techniques de synthèse anti-windup.

4.1 Stabilité des systèmes non-linéaires

4.1.1 Existence d'un domaine de stabilité

Etudier la stabilité d'un système linéaire est relativement aisé. La réponse est en effet binaire : le système est globalement stable ou instable, et ce quelles que soient les conditions initiales. Dans le cas d'un système non-linéaire, et notamment d'un système saturé, la notion de stabilité est en revanche plus complexe, car elle peut devenir locale.

Pour illustrer cette différence, on considère un système linéaire instable en boucle ouverte, pour lequel une loi de commande stabilisante a été calculée. On suppose alors que l'amplitude maximale de la commande est bornée en raison d'une limitation physique de l'actionneur, puis on initialise l'état du système de sorte que le signal délivré par le correcteur présente une amplitude supérieure à cette valeur limite. Tout se passe alors comme si le système fonctionnait en boucle ouverte, et son comportement correspond à celui d'un système linéaire instable soumis à une entrée constante. L'amplitude des signaux en sortie est donc susceptible de diverger rapidement. Ces signaux étant utilisés par le correcteur, une divergence des signaux de commande est également probable, d'où une poursuite du fonctionnement saturé. Par ce raisonnement intuitif, on voit bien qu'un tel système linéaire saturé n'est certainement pas stable globalement. Par contre, une initialisation du vecteur d'état au voisinage de l'origine conduit à un fonctionnement non saturé, et donc à un comportement localement stable.

Dans ce contexte se pose alors la question de déterminer le domaine de stabilité associé à un point d'équilibre, *i.e.* le plus grand sous-ensemble de l'espace d'état autour d'un point d'équilibre à l'intérieur duquel aucune initialisation du système n'engendre d'instabilité. On s'appuie pour cela sur la théorie de Lyapunov, présentée brièvement au paragraphe 4.1.2, qui propose une caractérisation de la stabilité dans l'espace d'état.

Cependant, le domaine de stabilité exact (également appelé bassin d'attraction) d'un

système non-linéaire peut être particulièrement complexe, même dans le cas apparemment simple des systèmes linéaires saturés. Vouloir en déterminer précisément les contours pose donc des problèmes numériques qui deviennent rapidement insurmontables lorsque le nombre d'états du système augmente. En pratique, on s'intéresse plutôt à des méthodes de calcul fournissant une évaluation conservatrice du domaine de stabilité exact, *i.e.* un domaine de stabilité garanti strictement inclus dans le domaine réel (voir paragraphe 4.1.3).

4.1.2 Stabilité au sens de Lyapunov

La théorie de Lyapunov a été introduite à la fin du 19^{ème} siècle afin d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques [Lyapunov, 1992]. Plus précisément, elle s'intéresse à des systèmes continus à temps invariant et de dimension finie dont le comportement est décrit par une équation différentielle vectorielle du premier ordre éventuellement non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.1)$$

Définition 4.1.1 (point d'équilibre) *Un vecteur $x_e \in \mathbb{R}^n$ est appelé point ou état d'équilibre du système (4.1) s'il vérifie $f(x_e) = 0$.*

Tout point d'équilibre pouvant être ramené à l'origine par le changement de variable $x \leftarrow x - x_e$, on se contente sans perte de généralité d'étudier la stabilité lorsque le point d'équilibre vaut $x_e = 0$.

Définition 4.1.2 (stabilité) *L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre stable pour le système (4.1) si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.2)$$

Définition 4.1.3 (attractivité) *L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre attractif pour le système (4.1) s'il existe un voisinage $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que :*

$$x_0 \in \Omega \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.3)$$

Définition 4.1.4 (stabilité asymptotique) *L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (4.1) s'il est stable et attractif.*

Le théorème ci-dessous permet alors de caractériser la stabilité ou la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre.

Théorème 4.1.5 (caractérisation de la stabilité) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine. S'il existe une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur Ω et différentiable sur $\Omega \setminus \{0\}$ telle que :*

1. $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$ et $V(0) = 0$,
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$,

alors l'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre stable pour le système (4.1). Si de plus V vérifie :

3. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,

alors l'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (4.1).

Remarque 4.1.6 Lorsque les hypothèses du théorème 4.1.5 sont vérifiées, l'ensemble Ω associé à la fonction de Lyapunov V représente un domaine de stabilité garanti du système (4.1). On se contente ici de cette notion de stabilité locale, les systèmes saturés considérés en pratique n'étant le plus souvent pas stables globalement, *i.e.* pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Le théorème 4.1.5 traduit en termes mathématiques un concept physique élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement, *i.e.* décroît avec le temps, alors ce système évolue vers un état d'équilibre stable. L'idée consiste donc à déterminer une fonction positive V associant à chaque état x du système un niveau d'énergie, puis à prouver que cette fonction décroît le long de toutes les trajectoires du système initialisées dans un sous-ensemble Ω de l'espace d'état.

4.1.3 Recherche de fonctions de Lyapunov

Une telle approche est intéressante, car elle permet d'évaluer la stabilité sans résoudre directement le système (4.1), ce qui constitue souvent un problème difficile. Cependant, le théorème 4.1.5 ne donne pas d'indication sur la manière de construire une fonction de Lyapunov V , et ce résultat très général s'avère inexploitable en l'état. Dans la pratique, on adopte une stratégie conservatrice qui consiste à rechercher :

- des fonctions de Lyapunov V dans un espace fonctionnel restreint,
- des domaines de stabilité Ω dont le contour est défini par une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov, *i.e.* du type :

$$\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\} \quad (4.4)$$

où c représente un réel positif donné.

Il apparaît essentiel de choisir des fonctions de Lyapunov adéquates afin de pouvoir gérer au mieux le compromis entre taille du domaine estimé et complexité numérique.

Remarque 4.1.7 Les domaines définis par une relation du type (4.4) vérifient une propriété d'inclusions successives le long de toute trajectoire du système. En effet, pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, on a $c_1 > c_2 \Rightarrow \Omega(c_2) \subset \Omega(c_1)$. Comme $V(x)$ est déterminée de manière à être décroissante le long des trajectoires du système, on peut en déduire que si à un instant t_1 , l'état du système appartient au domaine $\Omega(c_1)$, alors pour tout instant $t > t_1$, il appartiendra à un domaine $\Omega(c)$ strictement inclus dans le domaine initial, dont il ne pourra plus s'échapper. On parle de domaines de stabilité invariants contractifs.

Les fonctions de Lyapunov les plus largement utilisées sont les fonctions quadratiques, notamment dans les domaines de l'analyse de robustesse des systèmes linéaires et de la synthèse robuste. Elles donnent parfois des résultats conservatifs mais conduisent souvent à des caractérisations convexes facilement exploitables d'un point de vue numérique. Comme leur nom l'indique, de telles fonctions sont quadratiques en l'état x du système et s'écrivent sous la forme :

$$V(x) = x^T P x \quad (4.5)$$

où P représente une matrice symétrique définie positive, ce qui garantit que $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En outre, les domaines de stabilité associés correspondent à des ellipsoïdes :

$$\mathcal{E}_P(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq c\} \quad (4.6)$$

dont la taille peut être aisément maximisée. En effet, le volume d'un ellipsoïde défini par la relation (4.6) est proportionnel au déterminant de la matrice $Q = P^{-1}$. Maximiser le

volume de \mathcal{E}_P revient donc à maximiser le déterminant de Q , ce qui constitue un problème convexe [Vandenberghe *et al.*, 1998]. Enfin, le choix de fonctions quadratiques permet d'exprimer de manière simple la décroissance de $V(x)$ et donc les conditions de stabilité du système saturé (voir paragraphe 4.3).

D'autres catégories de fonctions de Lyapunov peuvent être envisagées :

- les fonctions de Popov, également appelée fonctions de Lur'e [Gomes da Silva Jr *et al.*, 2002; Hindi et Boyd, 1998],
- les fonctions quadratiques par morceaux [Johansson et Rantzer, 1998; Mulder et Kothare, 2000],
- les fonctions polyédrales [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 1999; Blanchini, 1995],
- les fonctions polynomiales [Chesi *et al.*, 2003],
- et plus récemment, l'enveloppe convexe ou le maximum point par point d'une famille de fonctions quadratiques [Hu *et al.*, 2005a].

Toutes ces fonctions offrent plus de degrés de liberté que les fonctions quadratiques classiques et permettent donc de réduire le conservatisme. Elles présentent également d'autres avantages. Ainsi, les fonctions de Popov permettent de prendre explicitement en compte le profil des saturations par l'introduction de termes intégraux. L'utilisation de fonctions quadratiques par morceaux apparaît quant à elle naturelle dans la perspective d'étudier les systèmes linéaires saturés, qui peuvent être vus comme des systèmes affines par morceaux. Cependant, l'utilisation de telles fonctions s'avère souvent délicate, notamment dans la perspective de développer des outils de synthèse :

- Les domaines de stabilité associés peuvent être difficiles à optimiser en raison de leur forme particulière. Dans certains cas, il n'existe pas de condition simple permettant de maximiser leur taille dans une direction donnée de l'espace d'état.
- Il n'est souvent pas possible d'obtenir une formulation convexe du problème de synthèse, ce qui conduit à proposer des résolutions itératives dont la convergence peut être délicate. Dans le cas des fonctions les plus complexes, il n'existe parfois même pas de caractérisation convexe de la stabilité ou de la performance.
- Une diminution du conservatisme s'accompagne généralement d'une augmentation des variables d'optimisation, ce qui peut s'avérer rédhibitoire en termes de temps de calcul.

On se limitera donc ici à l'approche quadratique, l'objectif étant de proposer des méthodes de synthèse pouvant être mises en œuvre sur des applications réalistes.

4.2 Représentation des non-linéarités de type saturation

Le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$ avec $P = P^T > 0$ assure que $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et ce quel que soit l'opérateur $f(\cdot)$ décrivant l'évolution de l'état x du système. Par contre, déterminer si une telle fonction vérifie la relation $\dot{V}(x) < 0$ sur un sous-ensemble Ω de l'espace d'état n'est pas aussi immédiat.

On s'intéresse ici au cas particulier des systèmes linéaires saturés, pour lesquels l'équation différentielle (4.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}\Psi_L(\tilde{C}x) \quad (4.7)$$

où $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont des matrices constantes, tandis que $\Psi_L(\cdot)$ est un opérateur non-linéaire constitué de m saturations $\psi_{l_i}(\cdot)$:

$$\Psi_L(z) = [\psi_{l_1}(z_1) \dots \psi_{l_m}(z_m)]^T \quad (4.8)$$

et $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_m)$ une matrice diagonale correspondant aux niveaux de saturation (voir paragraphe 4.2.1). La condition de décroissance de V le long des trajectoires du système (4.7) s'exprime donc sous la forme :

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A}) x + 2x^T P \tilde{B} \tilde{\Psi}_L(\tilde{C}x) < 0 \quad (4.9)$$

L'inégalité (4.9) est non-linéaire et il est difficile de déterminer directement le sous-ensemble de l'espace d'état sur lequel elle est vérifiée. La stratégie consiste donc à proposer une caractérisation (conservative) de l'opérateur saturation $\tilde{\Psi}_L(\cdot)$ permettant de remplacer la relation $\dot{V}(x) < 0$ par une condition suffisante convexe. Deux approches sont couramment utilisées :

- la modélisation polytopique,
- la modélisation par non-linéarités de secteur.

La définition exacte de la fonction saturation est rappelée au paragraphe 4.2.1 puis ces deux caractérisations sont présentées respectivement aux paragraphes 4.2.2 et 4.2.3.

Remarque 4.2.1 *Il existe d'autres manières de caractériser l'opérateur $\tilde{\Psi}_L(\cdot)$, en divisant par exemple l'espace d'état en régions de saturation [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 1999], mais elles sont plutôt adaptées à des fonctions de Lyapunov non quadratiques et ne sont donc pas présentées ici.*

4.2.1 Définition de la fonction saturation

Une fonction saturation $\psi_l(\cdot)$ est une fonction linéaire par morceaux définie par :

$$\psi_l(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq l \\ l & \text{si } z > l \\ -l & \text{si } z < -l \end{cases} \quad (4.10)$$

où l représente un nombre réel positif, et dont la caractéristique est représentée sur la figure 4.1 (a). Une telle non-linéarité intervient dans la modélisation de nombreux systèmes physiques et présente donc un intérêt pratique indéniable.

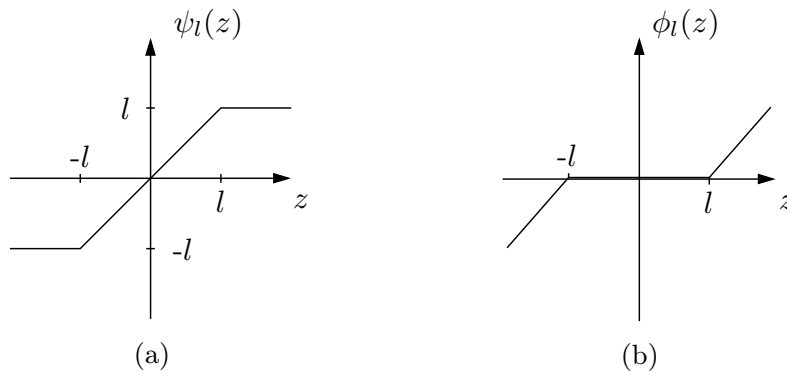


Figure 4.1 Non-linéarités de types saturation et zone morte

D'un point de vue théorique, il s'avère en revanche plus intéressant de travailler avec une fonction zone morte $\phi_l(\cdot)$ semblable à celle représentée sur la figure 4.1 (b), et dont l'expression est donnée par :

$$\phi_l(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq l \\ z - l & \text{si } z > l \\ z + l & \text{si } z < -l \end{cases} \quad (4.11)$$

En effet, une zone morte est nulle dans le domaine de fonctionnement linéaire, ce qui permet de déterminer facilement la dynamique du système nominal, *i.e.* non saturé.

Il est important de souligner que tout système affecté par des saturations $\Psi_L(\cdot)$ peut être transformé de manière à ne faire intervenir que des zones mortes $\Phi_L(\cdot)$ en notant que :

$$\Psi_L(z) + \Phi_L(z) = z \quad (4.12)$$

De plus, si l'on pondère les entrées et sorties du système saturé, on peut supposer sans perte de généralité que ces zones mortes sont normalisées, *i.e.* que $L = I_m$. Plus précisément, on peut réécrire le système (4.7) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + B\Phi(Cx) \quad (4.13)$$

où $\Phi(\cdot)$ représente un opérateur non-linéaire constitué de m zones mortes normalisées et :

$$\begin{aligned} A &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C} \\ B &= -\tilde{B}L \\ C &= L^{-1}\tilde{C} \end{aligned} \quad (4.14)$$

On se limitera donc dans la suite à l'étude des systèmes linéaires soumis à des zones mortes normalisées et décrits par la relation (4.13).

4.2.2 Modélisation polytopique

La modélisation polytopique a été introduite par [Hu *et al.*, 2002] et repose sur l'application du résultat ci-dessous au système saturé (4.13).

Lemme 4.2.2 *Soit $\Phi(\cdot)$ un opérateur non-linéaire constitué de m fonctions zone morte normalisées. Soit $v \in \mathbb{R}^m$ avec $|v_i| \leq 1 \forall i \in [1, m]$. Pour tout vecteur $z \in \mathbb{R}^m$, il existe une matrice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ avec $\lambda_i \in [0, 1] \forall i \in [1, m]$ telle que :*

$$\Phi(z) = (I_m - \Lambda)(z - v) \quad (4.15)$$

Si l'on pose $v = Hx$, avec $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le système (4.13) s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = (A + BM(\Lambda))x \quad (4.16)$$

avec $M(\Lambda) = (I_m - \Lambda)(C - H)$. Comme la matrice Λ appartient à un polytope constitué de 2^m sommets définis par :

$$\Xi = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda_i = 0 \text{ ou } 1\} \quad (4.17)$$

les trajectoires de ce système sont couvertes par celles du système polytopique :

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \mathcal{A} \in \text{co}(\{A + BM(\Lambda), \Lambda \in \Xi\}) \quad (4.18)$$

à condition que $|H_i x| \leq 1$ pour tout $i \in [1, m]$, où H_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de H . L'opérateur non-linéaire $\Phi(\cdot)$ a donc disparu et l'on se retrouve dans le cadre d'une modélisation classique d'un système linéaire incertain, ce qui facilite grandement l'analyse de stabilité.

4.2.3 Modélisation par non-linéarités de secteur

Une alternative à la modélisation polytopique consiste à exploiter la condition de secteur modifiée proposée par [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005].

Lemme 4.2.3 Soit $\Phi(\cdot)$ un opérateur non-linéaire constitué de m fonctions zone morte normalisées. Pour tous vecteurs $z, \omega \in \mathbb{R}^m$ tels que $|z_i + \omega_i| < 1 \forall i \in [1, m]$, l'inégalité :

$$\Phi(z)^T \Lambda (\Phi(z) + \omega) \leq 0 \quad (4.19)$$

est vérifiée pour toute matrice diagonale définie positive $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Une interprétation graphique de ce résultat est proposée sur la figure 4.2 (b) dans le cas où $m = 1$. La zone représentée en gris correspond à l'ensemble des valeurs pouvant être prises par une fonction $\Phi(\cdot)$ qui vérifie la condition (4.19). Elle contient la fonction zone morte (tracée en gras), mais se s'y limite pas, ce qui traduit un certain conservatisme. Ce dernier demeure cependant raisonnable, et même nul dans le domaine de fonctionnement linéaire correspondant à l'intervalle $[-1, 1]$.

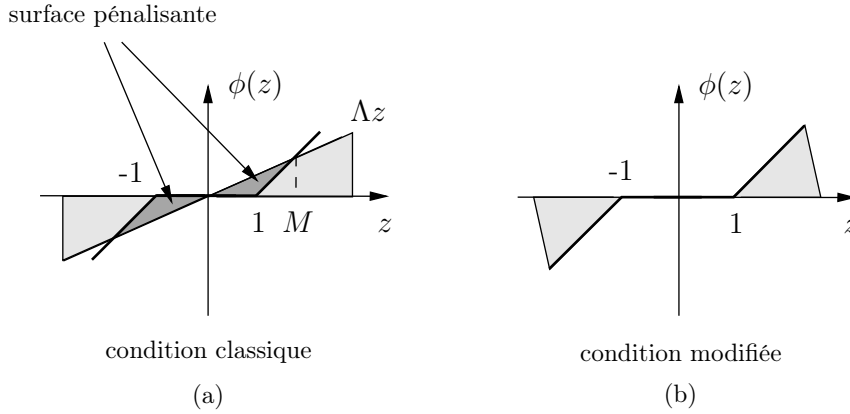


Figure 4.2 Conditions de secteur pour une non-linéarité de type zone morte.

Remarque 4.2.4 La condition (4.19) énoncée par le lemme 4.2.3 est plus contraignante que la condition de secteur classique utilisée jusqu'alors, qui s'exprime de la manière suivante [Khalil, 1996] :

$$\Phi(z)^T \Lambda (\Phi(z) - \Upsilon z) \leq 0 \quad (4.20)$$

où Υ représente une matrice diagonale fixée a priori qui vérifie $0 < \Upsilon \leq I_m$. Le fait d'imposer $\omega = -\Upsilon z$ dans la relation (4.19) pour obtenir l'inégalité (4.20) se traduit sur la figure 4.2 (a) par l'apparition de surfaces pénalisantes en termes de conservatisme dans la zone de fonctionnement linéaire du système. De plus, la condition classique (4.20) n'est valable que localement pour des valeurs de z comprises dans l'intervalle $[-M, M]$, alors que la condition modifiée (4.19) est globale.

Afin de pouvoir exploiter le lemme 4.2.3, il reste à relier le vecteur ω à l'état x du système saturé. En posant $\omega = Hx$ de la même manière qu'au paragraphe 4.2.2, avec H une matrice quelconque, la condition de secteur modifiée devient plus conservative mais conduit à des contraintes quadratiques facilement exploitables (voir paragraphe 4.3). Ainsi, en définissant l'ensemble polyédral :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |(C_i + H_i)x| \leq 1 \forall i \in [1, n]\} \quad (4.21)$$

on est ramené à l'étude du système $\dot{x} = Ax + B\Phi(Cx)$ où l'opérateur $\Phi(\cdot)$ vérifie :

$$\Phi(Cx)^T \Lambda (\Phi(Cx) + Hx) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad (4.22)$$

4.3 Analyse des systèmes saturés

La modélisation polytopique présentée au paragraphe 4.2.2 permet d'obtenir des conditions de stabilité et de performance pour le système saturé (4.13) sous forme d'inégalités matricielles linéaires. En outre, ces conditions sont valables dans un cadre très général : elles permettent notamment de prendre en compte des saturations imbriquées, ce qui correspond au cas où la transmission directe du système (4.13) est non nulle [Hu *et al.*, 2005b]. Cependant, si les résultats d'analyse sont prometteurs, il n'en est pas de même pour la synthèse. La détermination d'un correcteur anti-windup nécessite en effet de résoudre un problème non convexe, et ce même dans le cas d'un correcteur statique [Cao *et al.*, 2002].

L'objectif des travaux de thèse étant principalement de développer des outils de synthèse anti-windup, on privilégie donc naturellement l'approche par condition de secteur modifiée présentée au paragraphe 4.2.3. Cette dernière permet en effet d'obtenir une formulation convexe du problème d'anti-windup statique (voir paragraphe 4.4), et on montre au chapitre 5 qu'il en est de même dans le cas dynamique. Mais avant d'aborder le problème de synthèse, on s'intéresse tout d'abord dans ce paragraphe à l'obtention de conditions de stabilité et de performance pour un système saturé à l'aide des outils présentés aux paragraphes 4.1 et 4.2.

4.3.1 Estimation du domaine de stabilité

On considère l'interconnexion de la figure 4.3 où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable admettant pour représentation d'état :

$$M(s) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_\phi w \\ z &= C_\phi x \in \mathbb{R}^m \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.23)$$

On cherche alors à déterminer le plus grand domaine de l'espace d'état sur lequel la stabilité du système (4.23) peut être garantie malgré la présence de zones mortes normalisées :

$$w = \Phi(z) \quad (4.24)$$

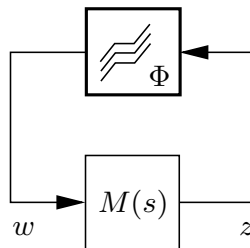


Figure 4.3 Interconnexion non-linéaire pour l'analyse de stabilité.

Remarque 4.3.1 On suppose que la transmission directe du système (4.23) est nulle, ce qui revient à ne pas prendre en compte de saturations imbriquées. Ce choix est motivé par les deux arguments suivants :

- Les saturations imbriquées apparaissent le plus souvent lorsque l'on considère des actionneurs limités à la fois en amplitude et en vitesse. Cependant, ce problème peut être évité en utilisant une modélisation appropriée à base d'intégrateurs limités [Biannic et al., 2006].
- Des conditions théoriques supplémentaires doivent être vérifiées en présence de saturations imbriquées, ce qui augmente le conservatisme et la complexité du problème à résoudre, notamment dans une perspective de synthèse.

La prise en compte de saturations imbriquées a notamment été étudiée dans [Tarbouriech et al., 2006b; Bateman et Lin, 2003].

La proposition ci-dessous permet de calculer un domaine de stabilité garanti pour l'interconnexion représentée sur la figure 4.3 [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005; Biannic et al., 2006].

Proposition 4.3.2 (analyse de stabilité) *S'il existe des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale et $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_\phi S - Z^T \\ SB_\phi^T - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Z_i^T + QC_{\phi i}^T \\ Z_i + C_{\phi i}Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (4.26)$$

où Z_i et $C_{\phi i}$ représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de Z et C_ϕ , alors l'ellipsoïde :

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\} \quad (4.27)$$

où $P = Q^{-1}$, est un domaine de stabilité asymptotique pour l'interconnexion de la figure 4.3.

Preuve : La satisfaction des inégalités (4.26) implique que l'ellipsoïde \mathcal{E}_P est inclus dans l'ensemble polyédral \mathcal{S} défini par la relation (4.21) via la relation $Z = HQ$ [Boyd et al., 1994]. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{E}_P$, l'opérateur $\Phi(\cdot)$ introduit dans la relation (4.24) vérifie la condition de secteur (4.22) :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & H^T \Lambda \\ \Lambda H & 2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.28)$$

On considère alors une fonction de Lyapunov quadratique définie par (4.5). Sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système (4.23) s'écrit :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P B_\phi w \quad (4.29)$$

et la condition $\dot{V}(x) < 0$ s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & P B_\phi \\ B_\phi^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (4.30)$$

En appliquant la \mathcal{S} -procédure (voir annexe) puis en pré- et post-multipliant le résultat par $\text{diag}(Q, S)$, on obtient finalement la relation (4.25) en posant $S = \Lambda^{-1}$. Les inégalités (4.25) et (4.26) représentent donc des conditions suffisantes pour que l'origine $x = 0$ soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'interconnexion de la figure 4.3 et que toute trajectoire initialisée dans \mathcal{E}_P converge vers ce point. ■

Remarque 4.3.3 Le résultat de la proposition 4.3.2 est formulé comme un problème de faisabilité, mais il existe plusieurs manières de le transformer en un problème d'optimisation. Un objectif classique déjà évoqué au paragraphe 4.1.3 et pour lequel il existe une formulation convexe consiste à maximiser le volume de \mathcal{E}_P . Il est également possible de maximiser la taille de cet ellipsoïde dans une direction u donnée de l'espace d'état, ce qui revient à maximiser un objectif linéaire β sous la contrainte LMI :

$$\begin{bmatrix} Q & \beta u \\ \beta u^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

D'autres solutions sont proposées par [Hu et Lin, 2001].

4.3.2 Mesure du niveau de performance

On considère maintenant l'interconnexion de la figure 4.4 (a) où $N(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable soumis à une entrée exogène $r \in \mathbb{R}^p$ et admettant pour représentation d'état :

$$N(s) : \begin{cases} \dot{\zeta} = A_1 \zeta + B_1 w + B_2 r \\ z = C_1 \zeta + D_{12} r \\ z_p = C_2 \zeta + D_{21} w + D_{22} r \in \mathbb{R}^p \\ w = \Phi(z) \\ \zeta(0) = \zeta_0 \in \mathbb{R}^{n-p} \end{cases} \quad (4.32)$$

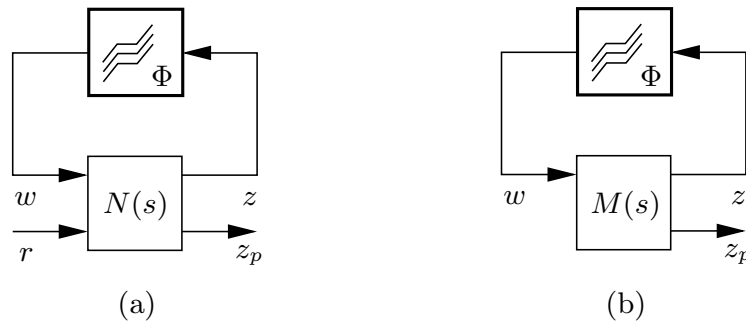


Figure 4.4 Interconnexions non-linéaire pour l'analyse de performance.

Une caractérisation classique de la performance s'appuie sur la norme \mathcal{L}_2 -induite et consiste à mesurer le rapport entre l'énergie du signal de sortie z_p et l'énergie du signal d'entrée r . Cette approche se révèle pertinente dans un contexte purement linéaire, car la notion de performance est alors indépendante de l'amplitude du signal de consigne. Ce n'est cependant plus le cas en présence de saturations et il apparaît alors souhaitable :

- de prendre en compte une information sur l'amplitude des signaux d'entrée r afin de limiter le conservatisme,
- tout en continuant à considérer des signaux d'énergie finie afin de pouvoir faire appel à la norme \mathcal{L}_2 -induite, pour laquelle il existe des caractérisations LMI.

En pratique, le comportement d'un système en boucle fermée est souvent évalué pour des consignes spécifiques de type échelon, mais de tels signaux ne sont pas de carré intégrable. Dans ce contexte, [Biannic *et al.*, 2006] propose de restreindre les entrées admissibles à un ensemble d'exponentielles lentement décroissantes, à la fois représentatives de

consignes de type échelon comme le montre la figure 4.5 et permettant de satisfaire les deux conditions énoncées ci-dessus. On définit ainsi l'ensemble :

$$\mathcal{W}_\epsilon(\rho) = \{r : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, r(t) = r_0 e^{-\epsilon t} \forall t \geq 0, \|r_0\| \leq \rho\} \quad (4.33)$$

où ϵ est choisi petit par rapport à la dynamique du système.

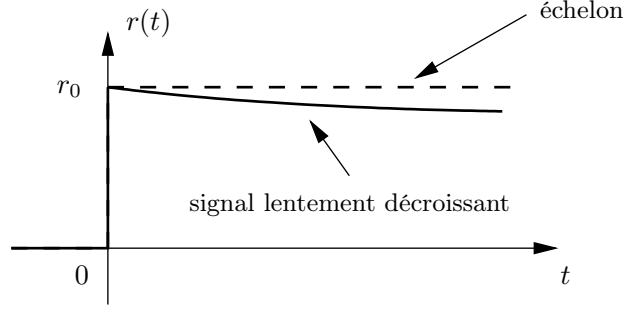


Figure 4.5 Approximation d'un échelon par une exponentielle lentement décroissante.

Tout signal $r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$ peut être généré facilement par un système linéaire autonome stable $R(s)$ possédant un état initial non nul r_0 :

$$R(s) : \begin{cases} \dot{r} = -\epsilon r \\ r(0) = r_0 \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (4.34)$$

Ce système est substitué à l'entrée exogène r dans l'interconnexion de la figure 4.4 (a). On obtient alors le système augmenté $M(s)$ représenté sur la figure 4.4 (b) :

$$M(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\phi w \\ z = C_\phi x \\ z_p = C_p x + D_{p\phi} w \end{cases} \quad (4.35)$$

dont l'état x est défini par :

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \zeta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.36)$$

et dont les matrices d'état vérifient :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\epsilon I_p & 0 \\ B_2 & A_1 \end{bmatrix} ; & B_\phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \\ C_\phi &= \begin{bmatrix} D_{12} & C_1 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} D_{22} & C_2 \end{bmatrix} ; & D_{p\phi} &= D_{21} \end{aligned} \quad (4.37)$$

On peut alors énoncer le résultat suivant [Biannic *et al.*, 2006].

Proposition 4.3.4 (analyse de performance) *S'il existe des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale et $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ainsi que des réels γ et $\tilde{\rho}$, tels que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} Q & \begin{bmatrix} \tilde{\rho} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\rho} I_p & 0 \end{bmatrix} & I_p \end{bmatrix} > 0 \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_\phi S - Z^T & QC_p^T \\ SB_\phi^T - Z & -2S & SD_{p\phi}^T \\ C_p Q & D_{p\phi} S & -\gamma I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Z_i^T + QC_{\phi i}^T \\ Z_i + C_{\phi i} Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (4.40)$$

où Z_i et $C_{\phi i}$ représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de Z et C_ϕ , alors pour tout $\rho \leq \tilde{\rho}$ et toute entrée exogène $r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$, l'interconnexion de la figure 4.4 est asymptotiquement stable pour toute condition initiale ζ_0 appartenant au domaine ellipsoïdal :

$$\mathcal{E}_P(\rho) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{n-p} : \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix} \leq 1 \right\} \quad (4.41)$$

où $P = Q^{-1}$. De plus, l'énergie du signal de sortie z_p vérifie :

$$\int_0^\infty z_p(t)^T z_p(t) dt \leq \gamma \quad (4.42)$$

Preuve : Ce résultat est une extension directe de la proposition 4.3.2. On considère ici la condition $\dot{V}(x) + \frac{z_p^T z_p}{\gamma} < 0$ qui d'une part garantit que $\dot{V}(x) < 0$ et d'autre part implique (4.42) par intégration. Cette condition s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_\phi \\ B_\phi^T P & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C_p^T \\ D_{p\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_p & D_{p\phi} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (4.43)$$

L'application de la \mathcal{S} -procédure aux inégalités (4.43) et (4.28) puis du complément de Schur conduit alors à la condition (4.39). ■

4.4 Vers la prise en compte du phénomène de windup

4.4.1 Principe de la synthèse anti-windup

Le windup est un phénomène bien connu qui se manifeste par un fort dépassement du signal de consigne et un temps de réponse excessif, *i.e.* par une dégradation des performances. Il survient notamment dans le cas où un système commandé par des actionneurs susceptibles de saturer est rebouclé par un correcteur linéaire comportant des intégrateurs, par exemple un PID. Lorsque les saturations sont actives, l'erreur continue à être intégrée, et ce bien que les commandes envoyées au système soient altérées. Les états du correcteurs peuvent donc devenir très grands, ce qui entraîne la poursuite du fonctionnement saturé, voire l'instabilité.

La synthèse anti-windup est une procédure en deux étapes qui consiste à minimiser cette dégradation de performance due à la présence de saturations :

- un correcteur nominal est d'abord synthétisé pour le système non saturé afin d'assurer la stabilité et le niveau de performance requis dans la zone de fonctionnement linéaire,
- un correcteur additionnel est alors introduit afin de contrer les effets négatifs des saturations et retrouver dans la mesure du possible le niveau de performance nominal.

Ce dispositif est illustré sur la figure 4.6 : la différence entre les signaux à l'entrée et à la sortie des non-linéarités est calculée ou estimée puis vient agir sur la dynamique et sur les sorties du correcteur nominal par l'intermédiaire d'un correcteur anti-windup à optimiser.

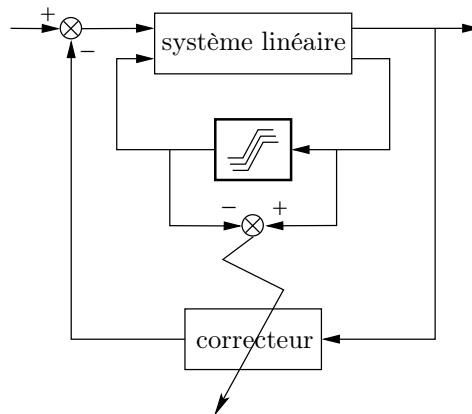


Figure 4.6 Principe de la synthèse anti-windup.

4.4.2 Etat de l'art

Le phénomène de windup est mis en évidence dès le milieu du 20^{ème} siècle [Lozier, 1956], et des méthodes *ad hoc* adaptées principalement à des correcteurs nominaux de type PID sont proposées [Fertik et Ross, 1967; Åström et Rundqwist, 1989]. L'étude des systèmes saturés connaît alors un engouement important, comme en témoigne le nombre important de contributions dans ce domaine [Bernstein et Michel, 1995].

Il faut pourtant attendre le milieu des années 90 pour assister au développement de méthodes plus rigoureuses permettant de donner des garanties de stabilité et de prendre en compte des spécifications en termes de performance. Cette volonté de formaliser le problème de synthèse anti-windup se retrouve ainsi dans [Kothare *et al.*, 1994], qui propose une structure anti-windup unificatrice, et dans [Teel et Kapoor, 1997], qui formule le problème du recouvrement de la performance nominale en termes de gains \mathcal{L}_2 non linéaires faisant intervenir la réponse effective du système saturé et celle du système linéaire associé. De nombreuses stratégies parfois délicates à mettre en œuvre sur des applications réalistes sont alors proposées, notamment par [Tyan et Bernstein, 1995; Miyamoto et Vinnicombe, 1996; Teel, 1999; Shamma, 2000].

Cette même époque voit l'émergence de nouvelles méthodes fondées sur la résolution de problèmes LMI, pour lesquels des solveurs performants sont désormais disponibles. [Marcopoli et Phillips, 1996; Kothare et Morari, 1997] sont parmi les premiers à s'engager dans cette voie. Ils montrent en particulier que les propriétés de stabilité et de performance d'un système saturé peuvent s'exprimer à l'aide de LMI, mais la synthèse anti-windup, qu'elle soit statique ou dynamique, reste quant à elle un problème non convexe. Le développement progressif de nouvelles caractérisations de la fonction saturation permet alors d'obtenir des conditions suffisantes de moins en moins conservatives :

- modélisation par condition de secteur classique et application des critères du cercle et de Popov [Pittet *et al.*, 1997; Mulder *et al.*, 2001; Saeki et Wada, 2002; Grimm *et al.*, 2003; Hu *et al.*, 2005c],
- modélisation polytopique [Hu *et al.*, 2002; Cao *et al.*, 2002; Hu *et al.*, 2005b],
- modélisation par condition de secteur modifiée.

Cette dernière caractérisation, présentée au paragraphe 4.2.3, marque une nouvelle étape, car elle permet d'obtenir une formulation convexe du problème de synthèse anti-windup, que l'on cherche un correcteur statique [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005; Biannic et Tarbouriech, 2007] ou dynamique [Tarbouriech *et al.*, 2006a; Biannic *et al.*, 2007]. Ce dernier cas, sur lequel se concentrent les travaux de thèse, fait l'objet du chapitre 5.

Remarque 4.4.1 *La synthèse anti-windup présente un intérêt pratique indéniable. Elle permet en effet d'ajouter un terme correctif lorsque les saturations sont actives sans modifier le correcteur nominal ni le comportement du système dans son domaine de fonctionnement linéaire, ce qui est généralement apprécié dans un contexte industriel. Il existe cependant de nombreuses autres méthodes dans la littérature qui permettent de prendre en compte plus ou moins directement les saturations lors de la synthèse, sans introduire un correcteur anti-windup additionnel [Kiyama et Sawada, 2004; Gomes da Silva Jr et al., 2003; Nguyen et Jabbari, 2000; Tyan et Bernstein, 1997; Stoorvogel et Saberi, 1999; Lin, 1998; Sussmann et al., 1994; Teel, 1995]. On peut enfin mentionner [Gomes da Silva Jr et al., 2005], qui se situe à la frontière entre ces deux approches : une structure anti-windup est introduite mais les deux correcteurs sont optimisés en une seule étape.*

Conclusion

Il existe un réel besoin de développer des outils permettant d'évaluer les propriétés de stabilité et de performance d'un système linéaire saturé. La littérature est abondante sur ce sujet et des approches peu conservatrices ont été proposées, s'appuyant notamment sur une modélisation polytopique ou par condition de secteur de la fonction saturation. Elles conduisent à des formulations LMI et donc convexes du problème d'analyse, mais leur extension à la synthèse, et en particulier à la détermination d'un correcteur anti-windup, reste délicate. On se heurte en effet le plus souvent à des contraintes non-convexes, et des schémas de résolution itératifs sont parfois proposés, mais sans garantie d'obtenir un résultat pertinent.

L'introduction d'une condition de secteur modifiée a pourtant permis récemment de restaurer la convexité dans le cas d'un correcteur anti-windup statique. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de thèse dont les principales contributions sont :

- de montrer qu'un résultat similaire peut être obtenu dans le cas où l'ordre du correcteur est égal à celui du système nominal en boucle fermée, puis de proposer une heuristique efficace permettant de traiter le cas général,
- d'étendre ce résultat aux systèmes saturés à paramètres variants,
- de prendre en compte des contraintes sur la dynamique du correcteur anti-windup lors de la synthèse afin d'améliorer les réponses temporelles du système saturé.

L'ensemble de ces résultats est présenté au chapitre 5.

Notations

BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$
I_m	Matrice identité de taille $m \times m$
0_m	Matrice nulle de taille $m \times m$
M^T	Transposée de la matrice M
$M \leq N$	$M - N$ semi-définie négative (avec M et N hermitiennes)
$co(\cdot)$	Enveloppe convexe
$A \setminus B$	Ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B
$\Psi(\cdot), \psi(\cdot)$	Opérateur saturation multivariable, monovariable
$\Phi(\cdot), \phi(\cdot)$	Opérateur zone morte multivariable, monovariable

Références

- [Åström et Rundqwist, 1989] K.J. Åström et L. Rundqwist. Integrator windup and how to avoid it. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1693–1698, Pittsburgh, USA, Juin 1989.
- [Bateman et Lin, 2003] A. Bateman et Z. Lin. An analysis and design method for linear systems under nested saturation. *Systems and Control Letters*, 48(1): 41–52, 2003.
- [Bernstein et Michel, 1995] D.S. Bernstein et A.N. Michel. A chronological bibliography on saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(5): 375–380, 1995.
- [Biannic *et al.*, 2006] J-M. Biannic, S. Tarbouriech et D. Farret. A practical approach to performance analysis of saturated systems with application to fighter aircraft flight controllers. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.
- [Biannic *et al.*, 2007] J-M. Biannic, C. Roos et S. Tarbouriech. A practical method for fixed-order anti-windup design. Dans *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Non-linear Control Systems*, pages 527–532, Pretoria, Afrique du Sud, Août 2007.
- [Biannic et Tarbouriech, 2007] J-M. Biannic et S. Tarbouriech. Stability and performance enhancement of a fighter aircraft flight control system by a new anti-windup approach. Dans *Proceedings of the 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Toulouse, France, Juin 2007.
- [Blanchini, 1995] F. Blanchini. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(3): 451–461, 1995.
- [Boyd *et al.*, 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in systems and control theory*. Studies in Applied Mathematics 15, SIAM, 1994.
- [Cao *et al.*, 2002] Y.Y. Cao, Z. Lin et D.G. Ward. An anti-windup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1): 140–145, 2002.
- [Chesi *et al.*, 2003] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi et A. Vicino. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, 39(6): 1027–1035, 2003.
- [Fertik et Ross, 1967] H.A. Fertik et C.W. Ross. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. *ISA Transactions*, 6: 317–328, 1967.
- [Gomes da Silva Jr *et al.*, 2002] J.M. Gomes da Silva Jr, S. Tarbouriech et R. Reginatto. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. Dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, pages 1106–1111, Glasgow, Ecosse, Septembre 2002.
- [Gomes da Silva Jr *et al.*, 2003] J.M. Gomes da Silva Jr, S. Tarbouriech et G. Garcia. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5): 842–847, 2003.
- [Gomes da Silva Jr *et al.*, 2005] J.M. Gomes da Silva Jr, D. Limon et T. Alamo. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. Dans *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5588–5593, Séville, Espagne, Décembre 2005.
- [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 1999] J.M. Gomes da Silva Jr et S. Tarbouriech. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11): 2081–2085, 1999.

- [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005] J.M. Gomes da Silva Jr et S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1): 106–111, 2005.
- [Grimm *et al.*, 2003] G. Grimm, J. Hatfield, I. Postlewaite, A.R. Teel, M.C. Turner et L. Zaccarian. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9): 1509–1524, 2003.
- [Hindi et Boyd, 1998] H. Hindi et S.P. Boyd. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. Dans *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 903–908, Tampa, USA, Décembre 1998.
- [Hu *et al.*, 2002] T. Hu, Z. Lin et B.M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38(2): 351–359, 2002.
- [Hu *et al.*, 2005a] T. Hu, R. Goebel, A.R. Teel et Z. Lin. Conjugate Lyapunov functions for saturated linear systems. *Automatica*, 41(11): 1949–1956, 2005.
- [Hu *et al.*, 2005b] T. Hu, A.R. Teel et L. Zaccarian. Performance analysis of saturated systems via two forms of differential inclusions. Dans *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 8100–8105, Séville, Espagne, Décembre 2005.
- [Hu *et al.*, 2005c] T. Hu, A.R. Teel et L. Zaccarian. Regional anti-windup compensation for linear systems with input saturations. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3397–3402, Portland, USA, Juin 2005.
- [Hu et Lin, 2001] T. Hu et Z. Lin. *Control systems with actuator saturation. Analysis and design*. Birkhäuser, 2001.
- [Johansson et Rantzer, 1998] M. Johansson et A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4): 555–559, 1998.
- [Khalil, 1996] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 1996.
- [Kiyama et Sawada, 2004] T. Kiyama et K. Sawada. LMI-based \mathcal{L}_2 analysis/synthesis with saturating control via generalized sector approach. Dans *Proceedings of the 10th IFAC Symposium on Large Scale Systems*, pages 504–510, Osaka, Japon, Juillet 2004.
- [Kothare *et al.*, 1994] M.V. Kothare, P.J. Campo, M. Morari et C.N. Nett. A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30(12): 1869–1883, 1994.
- [Kothare et Morari, 1997] M.V. Kothare et M. Morari. Multivariable antiwindup controller synthesis using multi-objective optimization. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3093–3097, Albuquerque, USA, Juin 1997.
- [Lin, 1998] Z. Lin. *Low gain feedback*. Springer-Verlag, 1998.
- [Lozier, 1956] J.C. Lozier. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, pages 19–39, 1956.
- [Lyapunov, 1992] A.M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 55(3): 531–773, 1992.
- [Marcopoli et Phillips, 1996] V.R. Marcopoli et S.M. Phillips. Analysis and synthesis tools for a class of actuator-limited multivariable control systems: a linear matrix inequality approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10): 1045–1063, 1996.
- [Miyamoto et Vinnicombe, 1996] S. Miyamoto et G. Vinnicombe. Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representations. Dans *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2838–2840, Kobe, Japon, Décembre 1996.

- [Mulder *et al.*, 2001] E.F. Mulder, M.V. Kothare et M. Morari. Multivariable antiwindup controller synthesis using linear matrix inequalities. *Automatica*, 37(9): 1407–1416, 2001.
- [Mulder et Kothare, 2000] E.F. Mulder et M.V. Kothare. Synthesis of stabilizing antiwindup controllers using piecewise quadratic Lyapunov functions. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3239–3243, Chicago, USA, Juin 2000.
- [Nguyen et Jabbari, 2000] T. Nguyen et F. Jabbari. Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate limitation. *Automatica*, 36(9): 1339–1346, 2000.
- [Pittet *et al.*, 1997] C. Pittet, S. Tarbouriech et C. Burgat. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and popov criteria. Dans *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4518–4523, San Diego, USA, Décembre 1997.
- [Saeki et Wada, 2002] M. Saeki et N. Wada. Synthesis of a static anti-windup compensator via Linear Matrix Inequalities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(10): 927–953, 2002.
- [Shamma, 2000] J.S. Shamma. Anti-windup via constrained regulation with observers. *Systems and Control Letters*, 40(4): 261–268, 2000.
- [Stoorvogel et Saberi, 1999] A.A. Stoorvogel et A. Saberi. Output regulation of linear plants with actuators subject to amplitude and rate constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(10): 631–657, 1999.
- [Sussmann *et al.*, 1994] H.J. Sussmann, E.D. Sontag et Y. Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12): 2411–2425, 1994.
- [Tarbouriech *et al.*, 2006a] S. Tarbouriech, J.M. Gomes da Silva Jr et F.A. Bender. Dynamic anti-windup synthesis for discrete-time linear systems subject to input saturation and \mathcal{L}_2 disturbances. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.
- [Tarbouriech *et al.*, 2006b] S. Tarbouriech, C. Prieur et J.M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8): 1364–1371, 2006.
- [Teel et Kapoor, 1997] A.R. Teel et N. Kapoor. The \mathcal{L}_2 antiwindup problem: its definition and solution. Dans *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, Juillet 1997.
- [Teel, 1995] A.R. Teel. Semi-global stabilization of linear null controllable systems with input nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1): 96–100, 1995.
- [Teel, 1999] A.R. Teel. Anti-windup for exponentially unstable linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(10): 701–716, 1999.
- [Tyan et Bernstein, 1995] F. Tyan et D.S. Bernstein. Anti-windup compensator synthesis for systems with saturation actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(5): 521–537, 1995.
- [Tyan et Bernstein, 1997] F. Tyan et D.S. Bernstein. Dynamic output feedback compensation for linear systems with independent amplitude and rate saturation. *International Journal of Control*, 67(1): 89–116, 1997.
- [Vandenberghe *et al.*, 1998] L. Vandenberghe, S. Boyd et S.P. Wu. Determinant maximisation with Linear Matrix Inequality constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(2): 499–533, 1998.

Chapitre 5

SYNTHÈSE ANTI-WINDUP DYNAMIQUE

Résumé : Une méthodologie complète permettant de synthétiser un correcteur anti-windup d'ordre quelconque est proposée et une formulation convexe du problème d'ordre plein est notamment établie. La convexité est perdue dans le cas général mais peut être restaurée dès que la dynamique du correcteur est fixée. Dans ce contexte, un algorithme permettant de déterminer un ensemble de pôles pertinents puis un correcteur d'ordre réduit adéquat est alors introduit. Une stratégie est ensuite élaborée afin de contraindre les pôles du correcteur et d'éviter ainsi l'apparition de dynamiques lentes susceptibles de dégrader les performances temporelles. Les résultats obtenus sont finalement généralisés aux systèmes variants et/ou incertains. Dans tous les cas, la convexité est préservée pour des correcteurs d'ordre plein.

Mots clés : saturations, condition de secteur modifiée, anti-windup dynamique, synthèse d'ordre plein, synthèse d'ordre fixé, dynamique contrainte, paramètres variants, incertitudes.

Sommaire

5.1 Synthèse anti-windup d'ordre fixé	91
5.1.1 Interconnexion pour la synthèse anti-windup	91
5.1.2 Equations du système en boucle fermée	92
5.1.3 Formulation du problème de synthèse	94
5.1.4 Caractérisation convexe de la synthèse d'ordre plein	94
5.1.5 Algorithmes pour la synthèse d'ordre fixé	97
5.1.6 Application à un modèle d'avion de combat	98
5.2 Synthèse anti-windup à dynamique contrainte	101
5.2.1 Motivations et formulation du problème	101
5.2.2 Introduction d'une borne sur la dynamique du correcteur	102
5.2.3 Validation sur le modèle d'avion de combat	105
5.3 Extension aux systèmes à paramètres variants	107
5.3.1 Formulation du problème de synthèse	108
5.3.2 Calcul d'un niveau de performance	110
5.3.3 Synthèse anti-windup à paramètres variants	112
5.3.4 Application à un modèle de missile	114

Bibliographie

- [1] J-M. Biannic, C. Roos et S. Tarbouriech. A practical method for fixed-order anti-windup design. *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 527-532, Pretoria, Afrique du Sud, août 2007.
- [2] C. Roos et J-M. Biannic. A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers. *A paraître dans Automatica*, 2008.

Les saturations sont omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes et l'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire consiste à synthétiser des lois de commande performantes pour des systèmes linéaires saturés. La littérature est abondante sur ce sujet et de nombreuses techniques ont été mises au point, la plus populaire et la plus pragmatique d'entre elles étant indiscutablement l'anti-windup. Cette procédure de synthèse en deux étapes présentée en détail au paragraphe 4.4 est introduite dans un contexte industriel il y a une quarantaine d'année, mais ce n'est qu'au milieu des années 90 que des méthodes rigoureuses sont développées. L'introduction progressive de nouvelles caractérisations de la fonction saturation se traduit par l'expression de conditions suffisantes de stabilité de moins en moins conservatives. Parmi elles, la modélisation par condition de secteur modifiée présentée au paragraphe 4.2.3 marque une nouvelle étape, car elle permet d'obtenir aisément une formulation convexe du problème de synthèse anti-windup dans le cas statique [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005].

Cette condition de secteur constitue le fondement des techniques proposées dans ce chapitre consacré à la synthèse anti-windup dynamique. On montre tout d'abord que sous des hypothèses peu contraignantes, des correcteurs anti-windup d'ordre plein agissant simultanément sur les entrées et les sorties du correcteur nominal peuvent être obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation LMI. La convexité est perdue dans le cas général mais peut être restaurée dès que la dynamique du correcteur anti-windup est fixée. Un algorithme permettant de déterminer un ensemble de pôles pertinents puis un correcteur d'ordre réduit performant est alors proposé et appliqué à un modèle d'avion de combat.

Cette approche donne des résultats encourageants, notamment lorsque l'on cherche à optimiser le niveau de performance d'un système saturé. Elle se révèle par contre délicate à mettre en œuvre dans la perspective d'augmenter la taille de son domaine de stabilité : on observe en effet fréquemment l'apparition de dynamiques très lentes qui ont un impact positif sur la stabilité mais qui dégradent le temps de réponse du système dans des proportions inacceptables. Dans ce contexte, une nouvelle technique de synthèse convexe permettant de contraindre explicitement la dynamique du correcteur anti-windup est proposée. Plus précisément, une borne supérieure est introduite sur la partie réelle des pôles du correcteur, ce qui permet de gérer efficacement le compromis entre taille du domaine de stabilité d'une part et pertinence de la réponse temporelle d'autre part. Les résultats obtenus sur le modèle d'avion de combat précédent se révèlent convaincants.

En pratique, de nombreux systèmes physiques dépendent de paramètres susceptibles d'évoluer dans le temps. En outre, l'un des critères souvent déterminant lors de la synthèse d'une loi de commande consiste à garantir un certain niveau de robustesse aux incertitudes de modèle et aux perturbations non mesurées. Il apparaît donc naturel de généraliser les techniques d'analyse des systèmes saturés et de synthèse anti-windup proposées à des systèmes variants et incertains. On montre dans ce chapitre qu'une telle extension est possible sous certaines hypothèses et que la convexité est préservée, ce qui rend les outils mis au point facilement exploitables d'un point de vue numérique.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Le paragraphe 5.1 est consacré au développement d'une méthodologie complète permettant de synthétiser dans un cadre très général des correcteurs anti-windup d'ordre quelconque. Le paragraphe 5.2 détaille alors la stratégie adoptée pour contraindre les pôles de ces correcteurs et éviter l'apparition de dynamiques très lentes susceptibles de dégrader les performances temporelles. L'objectif du paragraphe 5.3 consiste enfin à généraliser les résultats des paragraphes précédents à des systèmes saturés à paramètres variants et/ou incertains. Différentes applications sont proposées tout au long du chapitre afin de valider les méthodes proposées.

Note importante: Ce chapitre est volontairement centré sur les résultats obtenus au cours de la thèse. Le contexte, la description des problèmes considérés, ainsi que les résultats classiques que l'on peut trouver dans la littérature ne sont rappelés que très brièvement. Une introduction à l'analyse des systèmes saturés et à la synthèse anti-windup est proposée au chapitre 4. Elle constitue pour le lecteur qui n'est pas familier de ces techniques un bon préalable à la lecture du présent chapitre. Il en est de même des prérequis mathématiques et autres lemmes techniques, qui sont détaillés en annexe.

5.1 Synthèse anti-windup d'ordre fixé

5.1.1 Interconnexion pour la synthèse anti-windup

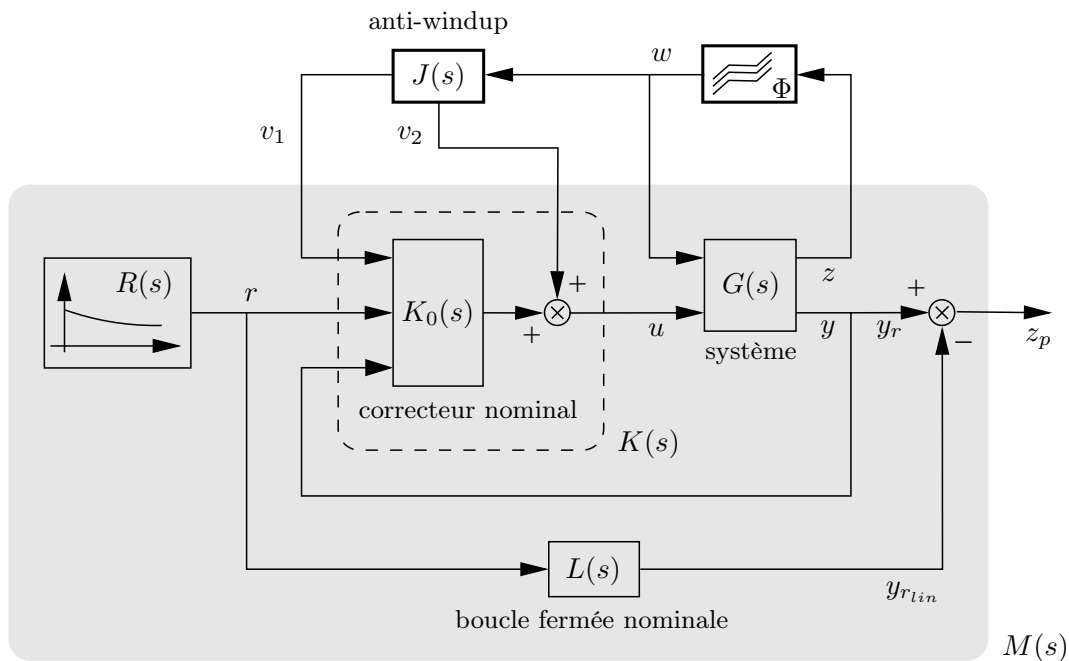


Figure 5.1 Interconnexion standard pour la synthèse anti-windup (critère de performance).

On considère l'interconnexion de la figure 5.1. Le système saturé en boucle ouverte $G(s)$ que l'on cherche à contrôler est écrit sous forme LFT de la manière suivante :

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}_G &= A_G x_G + B_G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= C_G x_G + D_G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.1)$$

où u et y représentent respectivement les commandes et les sorties mesurées. Il est rebouclé par un opérateur non-linéaire $\Phi(\cdot)$ qui vérifie :

$$w = \Phi(z) = [\phi(z_1) \dots \phi(z_m)]^T \quad (5.2)$$

et est constitué de m fonctions zone morte normalisées $\phi(\cdot)$ définies par :

$$\phi(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z_i| \leq 1 \\ z_i - \text{signe}(z_i) & \text{si } |z_i| > 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Aucune hypothèse n'est faite sur les pôles de la matrice A_G , *i.e.* sur la stabilité de $G(s)$ dans son domaine de fonctionnement linéaire.

Remarque 5.1.1 *Tout système affecté par des saturations peut être normalisé puis converti de manière à ne faire intervenir que des zones mortes normalisées en suivant la procédure décrite au paragraphe 4.2.1. La formulation (5.1)-(5.2) n'est donc en aucun cas restrictive.*

Hypothèse 5.1.2 *On suppose que la transmission directe du système $G(s)$ peut s'écrire sous la forme $D_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{G_{21}} & D_{G_{22}} \end{bmatrix}$, ce qui est généralement vérifié en pratique et revient à ne pas traiter le cas des saturations imbriquées. Un tel choix est justifié par la remarque 4.3.1.*

On suppose qu'un correcteur linéaire nominal $K_0(s)$ a été synthétisé par une méthode quelconque de manière à stabiliser le système $G(s)$ et à garantir un niveau de performance satisfaisant en l'absence de saturations. Deux signaux additionnels v_1 et v_2 agissant respectivement sur les entrées et les sorties de $K_0(s)$ sont alors introduits afin de minimiser les effets négatifs de ces non-linéarités [Grimm *et al.*, 2003; Wu et Lu, 2004; Wu et Soto, 2004]. Une représentation d'état du correcteur $K(s)$ ainsi obtenu est donnée par :

$$K(s) : \begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} + v_1 \\ u = C_K x_K + D_K \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} + v_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

Les signaux v_1 et v_2 correspondent aux sorties $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_v}$ du correcteur anti-windup dynamique $J(s)$ que l'on cherche à optimiser :

$$J(s) : \begin{cases} \dot{x}_J = A_J x_J + B_J w \\ v = C_J x_J + D_J w \end{cases} \quad (5.5)$$

où le signal d'entrée w agit comme un indicateur de l'activité des non-linéarités.

Enfin, le niveau de performance est évalué de la même manière qu'au paragraphe 4.3.2 pour des entrées exponentielles lentement décroissantes appartenant à l'ensemble :

$$\mathcal{W}_\epsilon(\rho) = \{r : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, r(t) = r_0 e^{-\epsilon t} \forall t \geq 0, \|r_0\| \leq \rho\} \quad (5.6)$$

où ϵ est choisi petit par rapport à la dynamique du système en boucle fermée. Le signal de référence r est généré par un système linéaire autonome stable $R(s)$ possédant un état initial non nul r_0 et dont une représentation est donnée par l'équation (4.34). Le signal d'erreur $z_p = y_r - y_{r_{lin}} \in \mathbb{R}^p$ est quant à lui défini comme la différence entre la sortie du système saturé et celle du système nominal associé. Plus précisément, $L(s)$ correspond au système linéaire en boucle fermée constitué de $G(s)$ et $K_0(s)$ lorsque $w = 0$.

Remarque 5.1.3 *L'interconnexion présentée sur la figure 5.1 est cohérente avec le principe général de la synthèse anti-windup énoncé au paragraphe 4.4.1.*

5.1.2 Equations du système en boucle fermée

On définit le vecteur d'état augmenté x obtenu en concaténant les états du modèle de référence (r), du système nominal en boucle fermée (x_L), du système en boucle ouverte (x_G)

et du correcteur nominal (x_K) :

$$x = \begin{bmatrix} r \\ x_L \\ x_G \\ x_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_M} \quad (5.7)$$

Le système $M(s)$ associé est représenté sur la figure 5.2 et admet une représentation d'état de la forme :

$$M(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\phi w + B_a v \\ z = C_\phi x \\ z_p = C_p x + D_{p\phi} w + D_{pa} v = y_r - y_{r_{lin}} \end{cases} \quad (5.8)$$

où y_r correspond aux premiers éléments du vecteur de sortie y , *i.e.* $y = [y_r^T \dots]^T$.

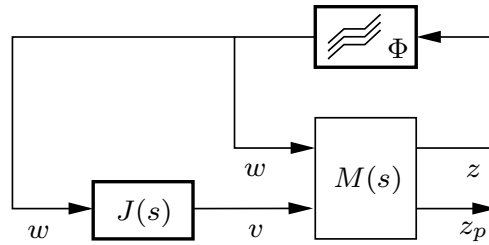


Figure 5.2 Représentation synthétique de l'interconnexion non-linéaire de la figure 5.1.

On intègre enfin les états $x_J \in \mathbb{R}^{n_J}$ du correcteur anti-windup de manière à constituer le vecteur d'état :

$$\nu = \begin{bmatrix} x \\ x_J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (5.9)$$

où $n = n_M + n_J$. La représentation du système complet en boucle fermé $P(s)$ incluant le correcteur anti-windup $J(s)$ est alors donnée par :

$$P(s) : \begin{cases} \dot{\nu} = \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} B_\phi + B_a D_J \\ B_J \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} C_\phi & 0 \end{bmatrix} \nu \\ z_p = \begin{bmatrix} C_p & D_{pa} C_J \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} D_{p\phi} + D_{pa} D_J \end{bmatrix} w \end{cases} \quad (5.10)$$

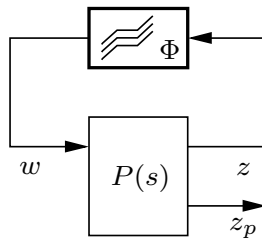


Figure 5.3 Système en boucle fermée incluant le correcteur anti-windup.

Remarque 5.1.4 *L'état ν peut également être partitionné sous la forme $\nu = [r^T \ \zeta^T]^T$ pour mettre en évidence la consigne r par rapport aux autres états $\zeta = [x_L^T \ x_G^T \ x_K^T \ x_J^T]^T \in \mathbb{R}^{n-p}$.*

5.1.3 Formulation du problème de synthèse

Au vu du contexte et des notations présentés dans les paragraphes 5.1.1 et 5.1.2, le problème de synthèse consiste à déterminer un correcteur anti-windup dynamique $J(s)$ et un domaine de l'espace d'état $\mathcal{E}_P(\rho)$ le plus vaste possible tels que pour tout signal de référence $r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$, avec ρ un réel positif donné :

- l'interconnexion non-linéaire représentée sur la figure 5.1 reste stable pour toute condition initiale ζ_0 appartenant à $\mathcal{E}_P(\rho)$,
- les sorties y_r du système saturé restent aussi proches que possible des signaux $y_{r_{lin}}$ délivrés par le modèle nominal en boucle fermée $L(s)$, ce qui revient à minimiser l'énergie du signal d'erreur z_P .

5.1.4 Caractérisation convexe de la synthèse d'ordre plein

Les résultats théoriques permettant de synthétiser un correcteur anti-windup d'ordre plein sont présentés dans ce paragraphe. La proposition 5.1.5 propose tout d'abord une caractérisation du niveau de performance pour un système saturé. Ce résultat est adapté de [Biannic *et al.*, 2006] et s'appuie sur une représentation des non-linéarités de type zone morte à l'aide d'une condition de secteur modifiée [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005].

Proposition 5.1.5 (caractérisation d'un niveau de performance) *S'il existe une matrice symétrique $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice diagonale $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et une matrice rectangulaire $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ainsi que des réels γ et $\tilde{\rho}$, tels que les conditions ci-dessous sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ [\tilde{\rho}I_p \ 0] & I_p \end{bmatrix} > 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix}^T & \star & \star \\ S \begin{bmatrix} B_\phi + B_a D_J \\ B_J \end{bmatrix}^T - Z & -2S & \star \\ [C_p \ D_{pa} C_J] Q & [D_{p\phi} + D_{pa} D_J] S & -\gamma I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.12)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ Z_i + [C_{\phi_i} \ 0] Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.13)$$

où Z_i et C_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de Z et C_ϕ , alors pour tout $\rho \leq \tilde{\rho}$ et toute entrée exogène $r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$, l'interconnexion de la figure 5.2 est asymptotiquement stable pour toute condition initiale ζ_0 appartenant au domaine ellipsoïdal :

$$\mathcal{E}_P(\rho) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{n-p} : \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix} \leq 1 \right\} \quad (5.14)$$

où $P = Q^{-1}$. De plus, l'énergie du signal de sortie z_p vérifie :

$$\int_0^\infty z_p(t)^T z_p(t) dt \leq \gamma \quad (5.15)$$

On revient maintenant au problème de synthèse anti-windup énoncé au paragraphe 5.1.3. Dans ce cas, la variable d'analyse Q introduite dans la proposition 5.1.5 et les matrices d'état A_J, B_J, C_J, D_J du correcteur $J(s)$ doivent être optimisées simultanément. Par conséquent, l'inégalité (5.12) perd sa convexité et devient une BMI. Cependant, dans le cas de l'ordre plein, qui correspond à $n_J = n_M$, les contraintes (5.11)-(5.13) présentent une structure particulière qui peut être exploitée afin de se ramener à une formulation convexe, ce que traduit la proposition ci-dessous.

Proposition 5.1.6 (synthèse anti-windup d'ordre plein) *Soit l'interconnexion de la figure 5.2, où $M(s)$ est défini par sa représentation d'état (5.8). Soit $\Gamma = \text{diag}(N_a, I_m, N_{pa})$, où N_a et N_{pa} désignent des matrices dont les colonnes forment respectivement des bases des noyaux de B_a^T et D_{pa}^T . Il existe un correcteur anti-windup $J(s)$ d'ordre plein tel que les conditions de la proposition 5.1.5 sont satisfaites si et seulement si il existe des matrices symétriques $X, Y \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$, une matrice diagonale $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et des matrices rectangulaires $U, V \in \mathbb{R}^{m \times n_M}$, ainsi que des réels γ et $\tilde{\rho}$, tels que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :*

$$[\tilde{\rho}I_p \quad 0] X \begin{bmatrix} \tilde{\rho}I_p \\ 0 \end{bmatrix} < I_p \quad (5.16)$$

$$\Gamma^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & \star & \star \\ SB_\phi^T - V & -2S & \star \\ C_p Y & D_{p\phi} S & -\gamma I_p \end{bmatrix} \Gamma < 0 \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & \star \\ C_p & -\gamma I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n_M} & Y & \star \\ U_i & V_i + C_{\phi_i} Y & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.19)$$

où U_i, V_i et C_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de U, V et C_ϕ .

Preuve : On partitionne tout d'abord les matrices symétriques définies positives Q et $P = Q^{-1}$ introduites dans la proposition 5.1.5 de la manière suivante¹ :

$$Q = \begin{bmatrix} Y & N^T \\ N & F \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} X & M^T \\ M & E \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

avec $X, Y \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$. Si l'on concatène les matrices d'état du correcteur anti-windup $J(s)$ sous la forme $\Omega = \begin{bmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{bmatrix}$ puis que l'on écrit $Z = [V \quad \tilde{U}]$, avec $V, \tilde{U} \in \mathbb{R}^{m \times n_M}$, l'inégalité (5.12) s'exprime alors sous la forme :

$$\Theta + \mathcal{U}^T \Omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^T \Omega^T \mathcal{U} < 0 \quad (5.21)$$

1. L'inégalité (5.19) implique $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$, i.e. $X > 0, Y > 0$ et $XY > I$, ce qui signifie que les conditions du lemme de complétion matricielle [Packard *et al.*, 1991] sont strictement vérifiées (voir annexe). La partition (5.20) est donc valide et la connaissance des matrices X et Y suffit à déterminer Q grâce à la relation $Q = \begin{bmatrix} Y & I \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1}$, où les matrices non singulières $M, N \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$ vérifient $M^T N = I - XY < 0$.

avec :

$$\Theta = \begin{bmatrix} AY + YA^T & \star & \star & \star \\ NA^T & 0 & \star & \star \\ SB_\phi^T - V & -\tilde{U} & -2S & \star \\ C_p Y & C_p N^T & D_{p\phi} S & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ B_a^T & 0 & 0 & D_{pa}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(Q, S, I)$$

D'après le lemme de projection [Gahinet et Apkarian, 1994], l'inégalité (5.21) admet une solution Ω si et seulement si :

$$N_{\mathcal{U}}^T \Theta N_{\mathcal{U}} < 0 \quad (5.22)$$

$$N_{\mathcal{V}}^T \Theta N_{\mathcal{V}} < 0 \quad (5.23)$$

où $N_{\mathcal{U}}$ and $N_{\mathcal{V}}$ désignent des matrices dont les colonnes forment des bases quelconques des noyaux de \mathcal{U} et \mathcal{V} , par exemple :

$$N_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} N_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & N_{pa} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} N_a = N_{B_a^T} \\ N_{pa} = N_{D_{pa}^T} \end{cases} \quad (5.24)$$

$$N_{\mathcal{V}} = \text{diag}(Q^{-1}, S^{-1}, I) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Pour ce choix de $N_{\mathcal{U}}$ et $N_{\mathcal{V}}$, on montre aisément que les inégalités (5.22) et (5.23) sont équivalentes à (5.17) et (5.18).

Soit $\Pi = \begin{bmatrix} X & I \\ M & 0 \end{bmatrix}$. Comme M est non singulière (voir renvoi page précédente), il en est de même pour Π . On peut donc pré- et post-multiplier (5.13) par $\text{diag}(\Pi^T, I)$ et $\text{diag}(\Pi, I)$, ce qui conduit à la relation ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I & Y & \star \\ V_i X + \tilde{U}_i M + C_{\phi i} & U_i + C_{\phi i} Y & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.26)$$

Le changement de variable $U = VX + \tilde{U}M + C_\phi$ prouve alors l'équivalence des relations (5.13) et (5.19).

Enfin, la condition (5.16) est directement obtenue en appliquant le complément de Schur à l'inégalité (5.11). ■

Remarque 5.1.7 (reconstruction du correcteur) *La matrice Q introduite dans la proposition 5.1.5 est obtenue à partir de X et Y à l'aide de la relation suivante :*

$$Q = \begin{bmatrix} Y & I_{n_M} \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_M} & X \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{avec} \quad M^T N = I_{n_M} - XY < 0 \quad (5.27)$$

Q étant fixée, on remarque que l'inégalité (5.12) devient convexe par rapport aux matrices d'état A_J, B_J, C_J, D_J du correcteur anti-windup $J(s)$, qui peuvent donc être calculées facilement. De plus, en introduisant un changement de variables adéquat (voir proposition 5.1.8), il apparaît qu'il n'est pas nécessaire de fixer les matrices S et Z lors de la phase de reconstruction. Il en résulte des degrés de liberté supplémentaires qui peuvent être utilisés par exemple pour prendre en compte des contraintes sur la matrice A_J .

Le problème posé par la proposition 5.1.6 consiste à minimiser la valeur de γ sous les contraintes linéaires (5.16)-(5.19) par rapport aux matrices X, Y, S, U et V . Il peut être résolu aisément à l'aide d'un solveur LMI [Balas *et al.*, 2007].

5.1.5 Algorithmes pour la synthèse d'ordre fixé

L'ordre des correcteurs synthétisés à l'aide de la méthode décrite au paragraphe 5.1.4 est égal à n_J . Il peut donc dans certains cas être particulièrement élevé, ce qui n'est pas souhaitable. En outre, il n'est pas possible de contrôler la dynamique des correcteurs obtenus, car les matrices d'état de $J(s)$ n'interviennent pas explicitement dans les équations (5.16)-(5.19). Enfin, on constate en pratique qu'il est souvent possible d'obtenir des performances équivalentes avec un correcteur d'ordre réduit dont les pôles sont choisis de manière pertinente. On cherche donc maintenant à mettre au point une procédure efficace permettant de synthétiser un correcteur anti-windup d'ordre quelconque strictement inférieur à n_J . Un élément de réponse est apporté par la proposition suivante.

Proposition 5.1.8 *La contrainte bilinéaire (5.12) devient convexe lorsque les matrices A_J et C_J du correcteur anti-windup $J(s)$ sont fixées.*

Preuve : Comme S est définie positive et donc non singulière, il suffit d'appliquer le changement de variables $\tilde{B}_J = B_J S$ et $\tilde{D}_J = D_J S$. ■

Ce résultat suggère d'introduire l'algorithme ci-dessous afin de synthétiser un correcteur anti-windup à dynamique fixée d'ordre quelconque :

Algorithme 5.1.9 (synthèse anti-windup à dynamique fixée)

1. Choisir les matrices A_J et C_J du correcteur anti-windup à synthétiser,
2. Fixer $\tilde{\rho}$ et minimiser γ sous les contraintes LMI (5.11)-(5.13) par rapport aux variables Q, S, Z, \tilde{B}_J et \tilde{D}_J ,
3. Calculer les matrices B_J et D_J en inversant le changement de variables introduit dans la proposition 5.1.8.

La principale difficulté lors de la mise en œuvre de cet algorithme réside dans la détermination des matrices A_J et C_J à l'étape 1. Le choix apparaît cependant plus naturel si l'on considère la formulation ci-dessous :

$$J(s) = M_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{M_{i1}}{s + \lambda_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{M_{i2}}{s^2 + 2\eta_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (5.28)$$

où B_J regroupe l'ensemble des matrices M_{i1} et M_{i2} , tandis que $D_J = M_0$. Avec une telle décomposition, les matrices A_J et C_J peuvent être choisies comme suit :

$$\begin{aligned} A_J &= \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_{n_1}, A_1, \dots, A_{n_2}) \\ C_{J_k} &= \left[\underbrace{[1 \dots 1]}_{n_1} \underbrace{[1 \ 0] \dots [1 \ 0]}_{n_2} \right], k = 1 \dots n_v \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\eta_i\omega_i \end{pmatrix}, i = 1 \dots n_2 \quad (5.30)$$

La première étape de l'algorithme 5.1.9 se réduit donc au choix des pôles du correcteur anti-windup dont les matrices A_J et C_J sont immédiatement déduites des relations (5.29) et (5.30). Ce choix peut être réalisé en exploitant les résultats obtenus par une synthèse convexe d'ordre plein, comme le suggère l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 5.1.10 (synthèse anti-windup d'ordre fixé)

1. Résoudre le problème d'optimisation de la proposition 5.1.6 pour synthétiser un correcteur anti-windup d'ordre plein,
2. Analyser les pôles du correcteur obtenu puis éliminer les dynamiques trop lentes ou trop rapides,
3. Exécuter l'algorithme 5.1.9 en utilisant la procédure d'initialisation des matrices A_J et C_J décrite précédemment.

Remarque 5.1.11 On peut procéder de manière itérative une fois que l'on a sélectionné à l'étape 2 un ensemble de pôles pertinents. L'étape 3 est exécutée une première fois afin de synthétiser un correcteur anti-windup statique, puis la liste des pôles du correcteur $J(s)$ recherché est progressivement enrichie et de nouvelles synthèses sont réalisées. Cette procédure est interrompue dès que le niveau de performance atteint est suffisamment proche de celui obtenu à l'étape 1 dans le cas d'une synthèse d'ordre plein.

L'algorithme 5.1.10 permet donc de rendre le choix des pôles du correcteur anti-windup plus systématique, ce qui le rend aisé à mettre en œuvre.

5.1.6 Application à un modèle d'avion de combat

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer sur un exemple concret les techniques de synthèse anti-windup dynamique détaillées dans les paragraphes précédents. On considère pour cela un modèle représentatif du mouvement longitudinal d'un Mirage M-2000 volant à Mach 0.3 et à une altitude de 5000 ft, dont le comportement est décrit par les équations ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.8 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 5 \end{pmatrix} u_c \quad (5.31)$$

Le vecteur d'état $x = [\alpha \ q]^T$ est constitué de l'angle d'incidence α et de la vitesse de tangage q , et on suppose qu'il est entièrement mesuré. La commande u_c correspond quant à elle à l'angle de braquage de l'empennage horizontal. On peut noter qu'un point critique du domaine de vol est choisi pour lequel l'avion est instable en boucle ouverte.

Un actionneur non-linéaire du second ordre représenté sur la figure 5.4 et caractérisé par un amortissement $\xi_a = 0.6$ et une pulsation $\omega_a = 60$ rad/s est alors introduit. Il comporte des saturations en vitesse et en position, dont les niveaux sont fixés respectivement à $L_r = 80$ deg/s et $L_p = 20$ deg. Ces saturations apparaissant au sein d'intégrateurs

limités et sont converties en non-linéarités statiques en suivant la méthode proposée par [Biannic *et al.*, 2006].

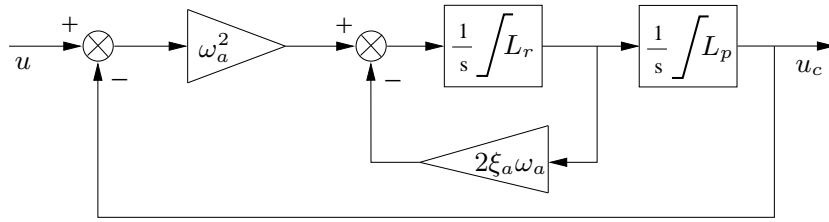


Figure 5.4 Actionneur non-linéaire du second ordre.

Si l'on combine le modèle d'actionneur ainsi obtenu avec les équations (5.31), on obtient un système en boucle ouverte $G(s)$ compatible avec l'interconnexion standard présentée au paragraphe 5.1.1, comme le résume la figure 5.5.

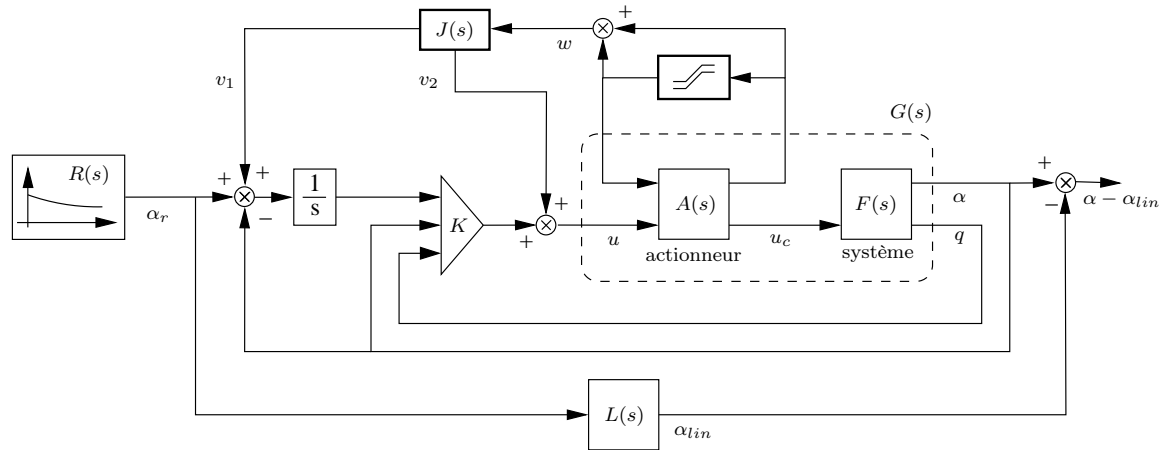


Figure 5.5 Structure du modèle d'avion de combat en boucle fermée.

Remarque 5.1.12 La transmission directe du système (5.31) étant nulle, on a nécessairement $D_G = 0$ et l'hypothèse 5.1.2 est vérifiée.

Un correcteur nominal de type PID est alors synthétisé par une technique modale afin de stabiliser et d'amortir correctement le système en l'absence de saturation.

$$\begin{cases} \dot{x}_K = \alpha_r - \alpha \\ u = -30x_K + 15\alpha + 2.5q \end{cases} \quad (5.32)$$

Les simulations temporelles non-linéaires réalisées sans action anti-windup, *i.e.* avec $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$, révèlent que ce correcteur se comporte parfaitement tant que l'amplitude maximale de α_r ne dépasse pas 7 deg. Au-delà de cette valeur, une dégradation de performance apparaît et le système saturé devient finalement instable dès que l'angle d'incidence commandé devient supérieur à 7.8 deg, ce qui est nettement insuffisant.

Les résultats théoriques développés dans les paragraphes 5.1.4 et 5.1.5 sont alors appliqués afin de synthétiser puis de comparer différents correcteurs anti-windup. Les résultats

sont représentés sur la figure 5.6 et correspondent aux réponses temporelles de l'avion en boucle fermée à un échelon d'incidence de 20 deg. Comme indiqué ci-dessus, on constate que le système saturé est instable en l'absence de correction anti-windup (courbe 0).

- **Correcteur 1** : synthèse d'ordre plein avec critère de stabilité.

On cherche tout d'abord à déterminer le correcteur anti-windup qui préserve la stabilité pour tout signal $\alpha_r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$, avec la valeur de ρ la plus grande possible. Les lignes et colonnes associées au niveau de performance γ disparaissent donc des contraintes de la proposition 5.1.6 et le problème d'optimisation considéré revient à maximiser la valeur de $\tilde{\rho}$ sous les contraintes LMI (5.16)-(5.19) ainsi modifiées. On obtient $\tilde{\rho} = 29.6$ deg, ce qui signifie que l'introduction d'un correcteur anti-windup permet d'augmenter considérablement la taille du domaine de stabilité. Cependant, le niveau de performance est médiocre, et notamment le temps de réponse inacceptable, comme le montre la figure 5.6.

- **Correcteur 2** : synthèse d'ordre plein avec critère de performance.

On résout maintenant le problème d'optimisation de la proposition 5.1.6 sans le modifier. Le niveau de performance γ est minimisé pour une valeur donnée du paramètre $\tilde{\rho}$, en l'occurrence 10 deg. On choisit un modèle de référence $L(s)$ du second ordre dont les pôles correspondent au mode dominant du système en boucle fermée non saturé. Ce dernier étant d'ordre 5 et le générateur de consignes $R(s)$ d'ordre 1, le correcteur anti-windup $J(s)$ obtenu est donc d'ordre 8, mais peut être facilement réduit à un système d'ordre 6 en supprimant les dynamiques rapides. Ses pôles sont listés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0013 & \lambda_2 &= -0.45 \\ \lambda_3 &= -1.8 & \lambda_4 &= -4.21 \\ \lambda_5 &= -5.53 + 3.23j & \lambda_6 &= \bar{\lambda}_5 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Malgré la présence de deux modes lents, la réponse à un échelon d'incidence est bien meilleure que précédemment, même si l'on observe un léger dépassement.

- **Correcteur 3** : synthèse d'ordre fixé avec critère de performance.

Les modes λ_1 et λ_2 du correcteur d'ordre plein ci-dessus peuvent cependant jouer un rôle néfaste. En effet, dans le cas où une perturbation viendrait les exciter, l'action de $J(s)$ sur le correcteur nominal se prolongerait bien après le retour du système dans son domaine de fonctionnement linéaire, d'où un temps de réponse excessif. On applique donc l'algorithme 5.1.10 afin de remédier à ce problème. Plus précisément, on fixe les matrices A_J et C_J à l'aide des relations (5.29)-(5.30) de manière à synthétiser un correcteur d'ordre réduit dont les pôles coïncident avec les pôles pertinents du correcteur d'ordre plein, *i.e.* $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ et λ_6 . Comme le montre la figure 5.6, la réponse temporelle correspondant à un tel réglage est désormais très bonne et le dépassement a totalement disparu.

- **Correcteur 4** : synthèse statique avec critère de performance.

A titre de comparaison, un correcteur anti-windup statique est finalement calculé. Comme on pouvait s'y attendre, la réponse du système en boucle fermée est plus lente que celle obtenue avec le correcteur d'ordre fixé ci-dessus.

La méthode de synthèse proposée ici se révèle donc très efficace lorsqu'elle est appliquée à un modèle réaliste d'avion de combat. Elle permet en effet par la résolution de problèmes convexes de calculer des correcteurs anti-windup dynamiques d'ordre quelconque capables :

- d'assurer la stabilité du système saturé pour des consignes d'amplitude élevée,
- de minimiser la dégradation de performance due à la présence des saturations.

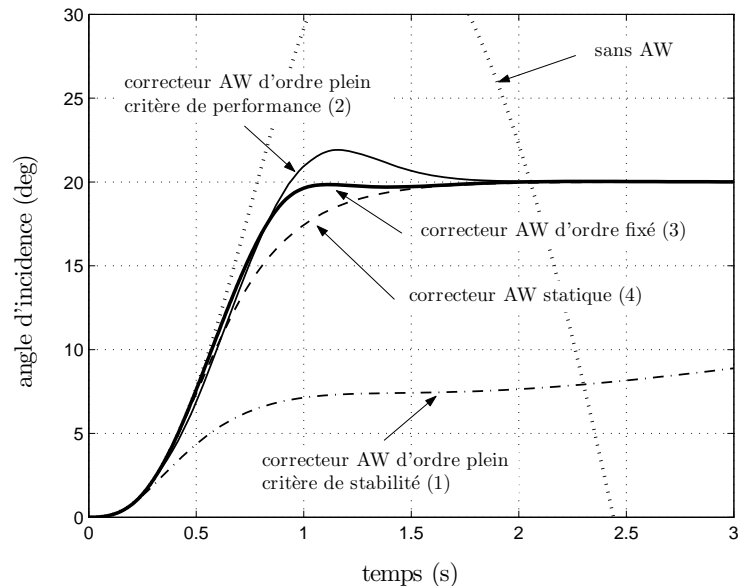


Figure 5.6 Réponses temporelles à un échelon d'incidence de 20 deg.

5.2 Synthèse anti-windup à dynamique contrainte

5.2.1 Motivations et formulation du problème

L'approche présentée au paragraphe 5.1 donne des résultats encourageants, notamment lorsque l'on cherche à optimiser un critère de performance. Elle se révèle par contre délicate à mettre en œuvre dans la perspective d'optimiser un domaine de stabilité : on observe en effet l'apparition de dynamiques très lentes qui ont un impact positif sur la stabilité mais qui dégradent le temps de réponse du système dans des proportions souvent inacceptables. Dans ce contexte, l'objectif est maintenant de proposer une technique capable de gérer efficacement le compromis entre taille du domaine de stabilité d'une part et pertinence de la réponse temporelle d'autre part.

Une idée naturelle est de synthétiser un correcteur anti-windup dont les pôles sont suffisamment rapides pour ne pas trop dégrader le temps de réponse lorsque les saturations sont actives. La procédure de reconstruction proposée dans la remarque 5.1.7 permet de disposer de degrés de liberté supplémentaires qui peuvent être exploités dans ce but. Une telle démarche reste cependant aléatoire et une meilleure approche consiste à prendre explicitement en compte des contraintes sur le correcteur lors de la synthèse, et non *a posteriori*. Plus précisément, on introduit ici une borne supérieure sur la partie réelle des pôles du correcteur anti-windup que l'on cherche à synthétiser.

On considère pour cela l'interconnexion représentée sur la figure 5.7. Tous les signaux et systèmes qui la constituent sont définis au paragraphe 5.1.1. Au vu du contexte présenté ci-dessus, le problème de synthèse anti-windup que l'on cherche à résoudre consiste à déterminer un correcteur dynamique $J(s)$ tel que :

- le domaine de l'espace d'état pour lequel la stabilité asymptotique de l'interconnexion de la figure 5.7 peut être garantie est le plus grand possible,
- le temps de réponse du système saturé est le plus faible possible.

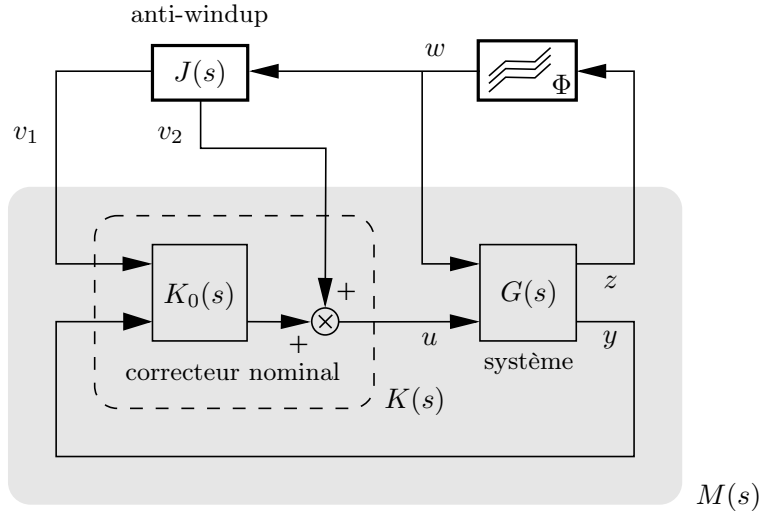


Figure 5.7 Interconnexion standard pour la synthèse anti-windup (critère de stabilité).

5.2.2 Introduction d'une borne sur la dynamique du correcteur

La proposition ci-dessous apporte une réponse au problème de synthèse anti-windup énoncé au paragraphe 5.2.1.

Proposition 5.2.1 (caractérisation d'un domaine de stabilité) Soient λ et ρ deux réels positifs. Soit $\tilde{\mathcal{X}} = \text{co}(\{\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_q\}) \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble polyédral tel que $\tilde{\chi}_i^T = [\chi_i^T \ 0]$ avec $\chi_i \in \mathbb{R}^{n_M}$ pour tout $i = 1 \dots q$. S'il existe une matrice symétrique $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice diagonale $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et une matrice rectangulaire $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que les conditions ci-dessous sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \rho \tilde{\chi}_i^T & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots q \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix}^T + 2\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_J} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_J} \end{bmatrix} & \star \\ S \begin{bmatrix} B_\phi + B_a D_J \\ B_J \end{bmatrix}^T - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (5.35)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ Z_i + [C_{\phi_i} \ 0] Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.36)$$

où Z_i et C_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de Z et C_ϕ , alors les pôles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_J}$ du correcteur anti-windup $J(s) = C_J(sI_{n_J} - A_J)^{-1}B_J + D_J$ vérifient :

$$\Re(\lambda_j) < -\lambda, \quad j = 1 \dots n_J \quad (5.37)$$

et l'ellipsoïde :

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\} \supset \rho \tilde{\mathcal{X}} \quad (5.38)$$

où $P = Q^{-1}$, est un domaine de stabilité asymptotique pour l'interconnexion de la figure 5.7.

Preuve : On partitionne la matrice Q de la manière suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} Y & N^T \\ N & F \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

avec $X \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$ et $F \in \mathbb{R}^{n_J \times n_J}$. Une condition nécessaire pour que la relation (5.35) soit vérifiée est que :

$$A_J F + F A_J^T + 2\lambda F < 0 \quad (5.40)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A & B_a C_J \\ 0 & A_J \end{bmatrix}^T & \star \\ S \begin{bmatrix} B_\phi + B_a D_J \\ B_J \end{bmatrix}^T - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (5.41)$$

L'inégalité (5.40) traduit le fait que les pôles λ_j du correcteur anti-windup $J(s)$ vérifient $\Re(\lambda_j) < -\lambda$ pour tout $j = 1 \dots n_J$. D'après la proposition 4.3.2, les inégalités (5.36) et (5.41) impliquent quant à elles que l'ellipsoïde \mathcal{E}_P , avec $P = Q^{-1}$, définit un domaine de stabilité asymptotique pour l'interconnexion de la figure 5.7. Enfin, la condition (5.34) signifie que $\rho \tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{E}_P$. ■

Dans une perspective de synthèse, la variable d'analyse Q et les matrices d'état A_J, B_J, C_J, D_J du correcteur anti-windup doivent être optimisées simultanément. L'inégalité (5.35) n'est donc pas convexe. Cependant, dans le cas de l'ordre plein, qui correspond à $n_J = n_M$, les contraintes (5.34)-(5.36) présentent une structure particulière qui peut être exploitée afin de se ramener à une formulation convexe, ce que traduit la proposition ci-dessous.

Proposition 5.2.2 (synthèse anti-windup d'ordre plein à dynamique contrainte)

Soient λ et ρ deux réels positifs. Soit $\tilde{\mathcal{X}} = \text{co}(\{\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_q\}) \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble polyédral tel que $\tilde{\chi}_i^T = [\chi_i^T \ 0]$ avec $\chi_i \in \mathbb{R}^{n_M}$ pour tout $i = 1 \dots q$. S'il existe des matrices symétriques $X, Y \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$, une matrice diagonale $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et des matrices rectangulaires $U, V \in \mathbb{R}^{m \times n_M}$ telles que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :

$$X > \rho^2 \chi_i \chi_i^T, \quad i = 1 \dots q \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} N_a^T (AY + YA^T) N_a & \star \\ (SB_\phi^T - V) N_a & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T - 2\lambda X & \star \\ 2\lambda Y & -2\lambda Y \end{bmatrix} < 0 \quad (5.44)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ X & Y & \star \\ U_i & V_i + C_{\phi_i} Y & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.45)$$

où N_a désigne une matrice dont les colonnes forment une base quelconque du noyau de B_a^T , tandis que U_i, V_i et C_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de U, V et C_ϕ , alors il existe un correcteur anti-windup $J(s)$ dont les pôles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_M}$ vérifient :

$$\Re(\lambda_j) < -\lambda, \quad j = 1 \dots n_M \quad (5.46)$$

et une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que l'ellipsoïde :

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\} \supset \rho \tilde{\mathcal{X}} \quad (5.47)$$

définit un domaine de stabilité asymptotique pour l'interconnexion de la figure 5.7.

Preuve : La démarche est similaire à celle adoptée pour démontrer la proposition 5.1.6. On partitionne tout d'abord les matrices symétriques définies positives Q et $P = Q^{-1}$ introduites dans la proposition 5.2.1 :

$$Q = \begin{bmatrix} Y & N^T \\ N & F \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} X^{-1} & M^T \\ M & E \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

avec $X, Y \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$, puis on applique le lemme de projection. Il existe donc un correcteur antiwindup $J(s) = C_J(sI_{n_J} - A_J)^{-1}B_J + D_J$ tel que l'inégalité (5.35) est vérifiée si et seulement si :

$$N_{\mathcal{U}}^T \Theta N_{\mathcal{U}} < 0 \quad (5.49)$$

$$N_{\mathcal{V}}^T \Theta N_{\mathcal{V}} < 0 \quad (5.50)$$

avec :

$$\Theta = \begin{bmatrix} AY + YA^T & \star & \star \\ NA^T & 2\lambda Y & \star \\ SB_{\phi}^T - V & -\tilde{U} & -2S \end{bmatrix}$$

$$N_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} N_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$N_{\mathcal{V}} = \text{diag}(Q^{-1}, S^{-1}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Pour ce choix de $N_{\mathcal{U}}$, on montre aisément que les relations (5.43) et (5.49) sont équivalentes. D'autre part, l'inégalité (5.50) peut être réécrite sous la forme :

$$X^{-1}A + A^T X^{-1} + 2\lambda M^T F M < 0 \quad (5.52)$$

D'après la partition (5.48), on a $M^T F M = -X^{-1} + X^{-1}YX^{-1}$ et l'inégalité (5.52) est elle-même équivalente à :

$$\begin{bmatrix} X^{-1}A + A^T X^{-1} - 2\lambda X^{-1} & \star \\ 2\lambda X^{-1} & -2\lambda Y^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.53)$$

par application du complément de Schur. Pré- et post-multiplier (5.53) par $\text{diag}(X, Y)$ démontre finalement que les relations (5.44) et (5.50) sont équivalentes.

Soit $\Pi = \begin{bmatrix} I & I \\ MX & 0 \end{bmatrix}$. Comme M est non singulière, il en est de même pour Π . On peut donc pré- et post-multiplier (5.36) par $\text{diag}(\Pi^T, I)$ et $\text{diag}(\Pi, I)$, ce qui conduit à la relation ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ X & Y & \star \\ V_i + (\tilde{U}_i M + C_{\phi i})X & V_i + C_{\phi i}Y & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.54)$$

Le changement de variable $U = V + (\tilde{U}M + C_\phi)X$ prouve alors l'équivalence de (5.36) et (5.45).

Enfin, la condition (5.42) est obtenue en appliquant le complément de Schur à l'inégalité (5.34) puis en remarquant à l'aide de la partition (5.48) que $Y - N^T F^{-1} N = X$. ■

Le problème posé par la proposition 5.2.2 consiste à maximiser la valeur de ρ sous les contraintes linéaires (5.42)-(5.45) par rapport aux matrices X, Y, S, U et V . Il peut être résolu aisément à l'aide d'un solveur LMI [Balas *et al.*, 2007].

Remarque 5.2.3 *La matrice Q introduite dans la proposition 5.2.1 est obtenue à partir de X et Y à l'aide de la relation suivante :*

$$Q = \begin{bmatrix} Y & I_{n_M} \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_M} & X^{-1} \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{avec} \quad M^T N = I_{n_M} - X^{-1} Y < 0 \quad (5.55)$$

Le correcteur anti-windup $J(s)$ peut alors être reconstruit de la même manière qu'au paragraphe 5.1.4.

Remarque 5.2.4 *L'algorithme 5.1.10 reste bien évidemment applicable. La seule modification concerne l'étape 1, qui consiste désormais à résoudre le problème d'optimisation de la proposition 5.2.2 en choisissant une valeur adaptée de λ . Il suffit alors à l'étape 2 d'éliminer les pôles très rapides par rapport à la dynamique du système nominal en boucle fermée. Dans la majorité des cas, on obtient à l'étape 3 un correcteur d'ordre réduit qui offre des garanties de stabilité similaires à celles obtenues avec le correcteur d'ordre plein.*

Remarque 5.2.5 *On peut dans certains cas ne pas souhaiter imposer de contrainte sur la dynamique du correcteur anti-windup. Il n'est alors pas rare de se heurter à des difficultés numériques lorsque l'on tente de valider par des simulations temporelles l'interconnexion en boucle fermée ainsi obtenue. Ce problème peut généralement être résolu en choisissant une valeur de λ très faible mais non nulle lors de la synthèse, ce qui confère à la méthode proposée dans ce paragraphe un intérêt pratique considérable dans un cadre très général.*

5.2.3 Validation sur le modèle d'avion de combat

On considère à nouveau le modèle d'avion de combat étudié au paragraphe 5.1.6 et représenté sur la figure 5.5. L'objectif consiste maintenant à synthétiser plusieurs correcteurs anti-windup pour différentes valeurs de λ . Plus précisément, on résout pour chacune de ces valeurs le problème d'optimisation de la proposition 5.2.2 afin de maximiser la taille du domaine de stabilité dans la direction de l'espace d'état associée à l'entrée α_r , *i.e.* afin de calculer l'amplitude maximale de la consigne en incidence pour laquelle il est possible de garantir la stabilité.

Les résultats sont représentés sur les figures 5.8 à 5.10 et mettent clairement en évidence le compromis entre augmentation du domaine de stabilité d'une part et qualité de la réponse temporelle du système saturé d'autre part. Lorsque $\lambda = 0$, on retrouve le résultat obtenu avec le premier correcteur synthétisé au paragraphe 5.1.6, à savoir une amplitude admissible égale à 29.6 deg. Comme on pouvait s'y attendre, il s'agit là de la plus grande valeur qu'il est possible de garantir, car aucune contrainte n'est imposée sur la dynamique du correcteur anti-windup. Cependant, le temps de réponse du système est de l'ordre de 15s, ce qui est inacceptable. Ce mauvais comportement est dû à la présence de pôles très lents dans le

dispositif anti-windup, dont les effets restent visibles sur la réponse temporelle bien après que les saturations ont cessé d'être actives.

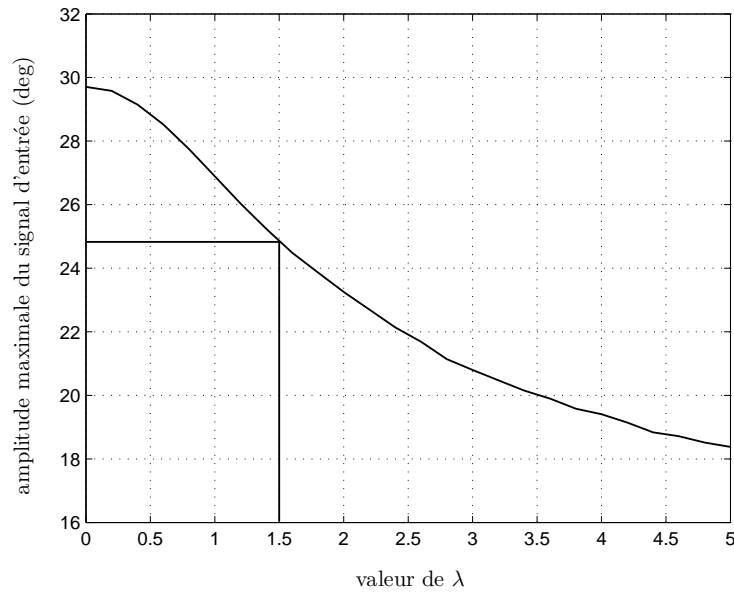


Figure 5.8 Amplitude maximale de la consigne pour laquelle la stabilité est garantie.

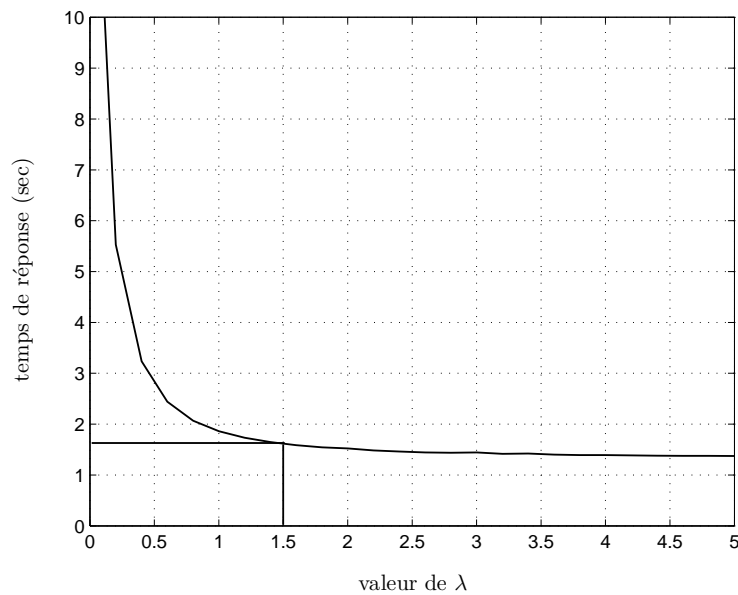


Figure 5.9 Temps de réponse du système saturé en boucle fermée.

Lorsque λ augmente, le système devient plus rapide, mais au prix d'une diminution de l'amplitude maximale pour laquelle la stabilité peut être garantie. Choisir $\lambda = 1.5$ apparaît comme un bon compromis. On est en effet assuré de la stabilité du système pour toute consigne d'amplitude inférieure ou égale à 24.8deg, ce qui ne représente que 16% de moins que dans le cas non contraint. De plus, le temps de réponse est réduit de

manière significative et n'est supérieure que de 0.22s à la meilleure valeur obtenue avec des correcteurs anti-windup plus rapides. La réponse temporelle visualisée sur la figure 5.10 est tout à fait satisfaisante.

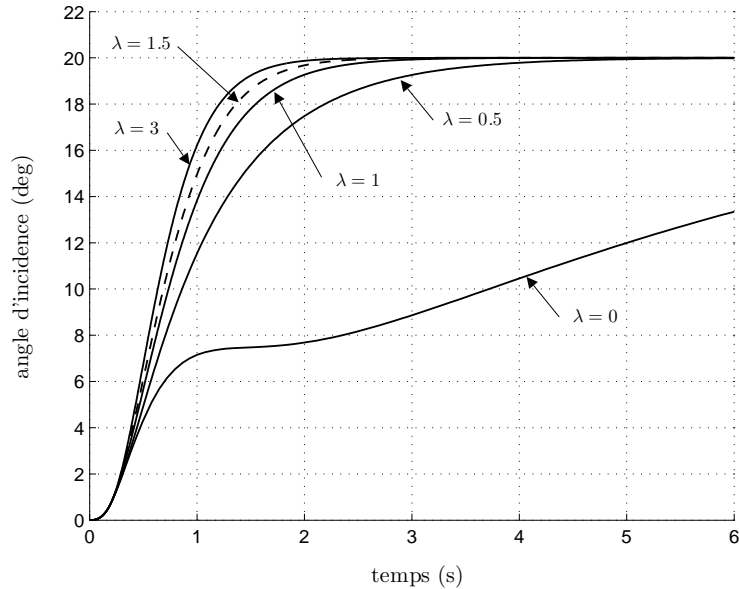


Figure 5.10 Réponses temporelles à un échelon d'incidence pour différentes valeurs de λ .

On applique enfin l'algorithme 5.1.10 afin de synthétiser un correcteur d'ordre réduit. Dans le cas où $\lambda = 1.5$, le correcteur d'ordre plein obtenu à l'étape 1 ne présente pas de pôles très lents. Il suffit donc à l'étape 2 d'éliminer les pôles bien plus rapides que la dynamique du système en boucle fermée. La synthèse à dynamique fixée réalisée à l'étape 3 montre que cela n'a d'incidence ni sur l'amplitude maximale admissible de la consigne, ni sur le temps de réponse. Par contre, si l'on fixe $\lambda = 0$, ce qui revient à se placer dans le contexte du paragraphe 5.1, le correcteur d'ordre plein présente deux pôles très lents qu'il est nécessaire d'éliminer afin de ne pas trop dégrader la réponse temporelle. Le correcteur d'ordre réduit qui en résulte permet alors de garantir la stabilité pour une amplitude de 25.4 deg, mais le temps de réponse atteint 2.8s et reste donc excessif. Si l'on exécute à nouveau l'étape 3 en supprimant cette fois-ci les trois pôles les plus lents, le temps de réponse diminue considérablement (1.4s) mais l'amplitude garantie devient nettement insuffisante (15 deg).

Cet exemple simple illustre bien l'efficacité de la méthode proposée dans le paragraphe 5.2 et l'intérêt de contraindre explicitement la dynamique du correcteur anti-windup lors de la phase de synthèse. Il est en effet possible en fonction de l'application considérée et du cahier des charges associé de gérer efficacement le compromis entre taille du domaine de stabilité et qualité de la réponse temporelle, ce qui offre une souplesse de réglage appréciable.

5.3 Extension aux systèmes à paramètres variants

Les exemples étudiés dans la première partie du manuscrit montrent que de nombreux systèmes physiques dépendent de paramètres susceptibles d'évoluer dans le temps.

Il apparaît donc naturel de généraliser les techniques d'analyse des systèmes saturés et de synthèse anti-windup existantes à de tels systèmes. La littérature n'est cependant pas très abondante sur ce sujet. On peut notamment citer [Scorletti et El Ghaoui, 1998] et [Wu *et al.*, 2000], qui proposent d'étendre les résultats classiques de synthèse LPV introduits respectivement par [Apkarian et Gahinet, 1995] et [Apkarian et Adams, 1998]. Dans les deux cas, les saturations sont simplement vues comme des gains variant dans le temps au sein de l'intervalle $[0, 1]$, ce qui revient à les caractériser à l'aide d'une condition de secteur classique (voir paragraphe 4.2.3). Ces deux approches sont respectivement reprises dans un contexte de synthèse anti-windup par [Wu et Soto, 2004] dans le cas des fonctions de Lyapunov constantes et par [Lu *et al.*, 2005] dans celui des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres.

D'autre part, l'un des critères souvent déterminant lors de la synthèse d'une loi de commande consiste à garantir un certain niveau de robustesse aux incertitudes de modèle et aux perturbations non mesurées qui agissent sur le système. Diverses méthodes ont ainsi été proposées afin d'étudier des systèmes saturés incertains. On peut notamment citer [Henrion *et al.*, 1997; Garcia *et al.*, 1999; Turner *et al.*, 2004; Marcos *et al.*, 2006], et plus récemment [Ferrerres et Biannic, 2007], qui montre que le problème de synthèse anti-windup peut se ramener à un problème de synthèse de précommande puis propose un algorithme permettant de calculer un correcteur anti-windup robuste à des incertitudes paramétriques LTI/LTV.

La plupart de ces travaux s'appuient sur une caractérisation de la fonction saturation à l'aide d'une condition de secteur classique. L'objectif de ce paragraphe consiste au contraire à généraliser les résultats des paragraphes 5.1 et 5.2 à des systèmes saturés à paramètres variants et/ou incertains, et donc à exploiter la condition de secteur modifiée introduite par [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005] et décrite au paragraphe 4.2.3.

5.3.1 Formulation du problème de synthèse

L'interconnexion non-linéaire considérée ici et représentée sur la figure 5.11 est similaire à celle décrite au paragraphe 5.1, mais le système saturé $G(s)$ dépend maintenant de paramètres réels susceptibles de varier dans le temps, qui peuvent être des grandeurs mesurées ou des incertitudes. Plus précisément, $G(s)$ est rebouclé par un opérateur :

$$\begin{aligned} \theta_G : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}_2^{p_G} &\rightarrow \mathcal{L}_2^{p_G} \\ (t, z_G) &\rightarrow w_G \end{aligned} \quad (5.56)$$

auquel on associe la structure :

$$\Theta_G = \left\{ \text{diag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_r I_{k_r}), \delta_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^r k_i = p_G \right\} \quad (5.57)$$

de telle sorte que $\theta_G(t, \bullet) \in \Theta_G \subset \mathbb{R}^{p_G \times p_G}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On note alors :

$$B(\Theta_G) = \{\theta \in \Theta_G, \bar{\sigma}(\theta) \leq 1\} \quad (5.58)$$

Notation : *A partir de maintenant, la représentation matricielle $\theta_G(t, \bullet)$ à l'instant t de l'opérateur θ_G sera simplement notée $\theta_G(t)$. On écrira également $\theta_G \in \mathcal{X}$ pour indiquer que θ_G vérifie la relation $\theta_G(t, \bullet) \in \mathcal{X}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

Le correcteur nominal $K_0(s)$, le système nominal en boucle fermée $L(s)$ et le correcteur anti-windup $J(s)$ dépendent eux aussi de paramètres variants. Les opérateurs associés sont notés θ_K, θ_L et θ_J , et leurs structures respectives Θ_K, Θ_L et Θ_J .

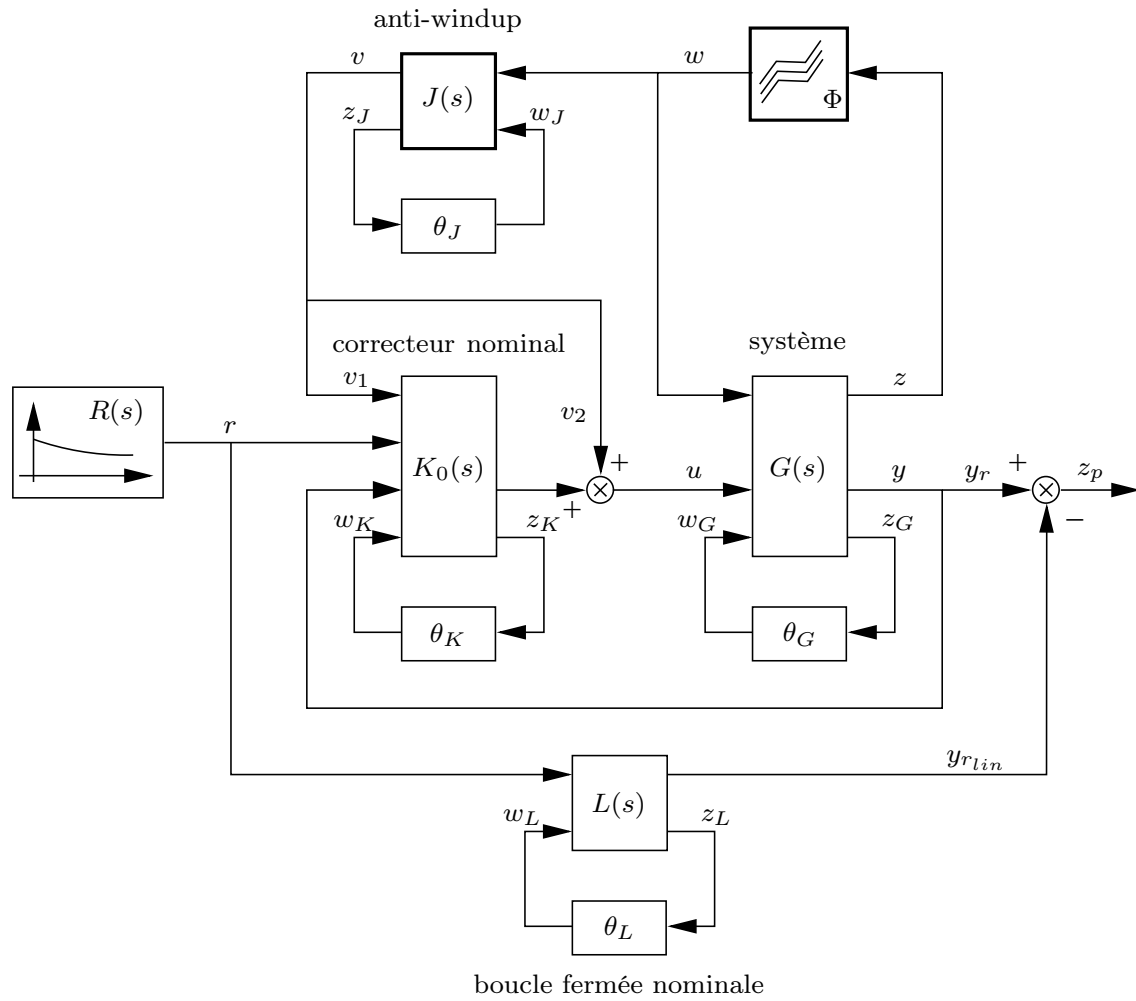


Figure 5.11 Interconnexion standard pour la synthèse anti-windup à paramètres variants.

Hypothèse 5.3.1 Pour des raisons similaires à celles évoquées dans l'hypothèse 5.1.2, on suppose que la transmission directe du système $G(s)$ s'écrit sous la forme :

$$D_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D_{G21} & D_{G22} & D_{G23} \\ D_{G31} & D_{G32} & D_{G33} \end{bmatrix}$$

Avec ces notations, le système augmenté $M(s)$ introduit au paragraphe 5.1.2 admet une représentation d'état de la forme :

$$M(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\phi w + B_a v + B_\theta w_M \\ z = C_\phi x \\ z_p = C_p x + D_{p\phi} w + D_{pa} v + D_{p\theta} w_M \\ z_M = C_\theta x + D_{\theta\phi} w + D_{\theta a} v + D_{\theta\theta} w_M \\ w_M = \theta_M(t) z_M \end{cases} \quad (5.59)$$

avec :

$$\theta_M(t) = \text{diag}(\theta_L(t), \theta_G(t), \theta_K(t)) \in \Theta_M \subset \mathbb{R}^{p_M \times p_M} \quad (5.60)$$

Le correcteur anti-windup à paramètres variants $J(s)$ que l'on cherche à synthétiser s'exprime quant à lui de la manière suivante :

$$J(s) : \begin{cases} \dot{x}_J = A_J x_J + B_{J\phi} w + B_{J\theta} w_J \\ v = C_{Ja} x_J + D_{Ja\phi} w + D_{Ja\theta} w_J \\ z_J = C_{J\theta} x_J + D_{J\theta\phi} w + D_{J\theta\theta} w_J \\ w_J = \theta_J(t) z_J \in \mathbb{R}^{p_J} \end{cases} \quad (5.61)$$

La représentation du système complet en boucle fermée $P(s)$ incluant le correcteur anti-windup $J(s)$ est alors donnée par :

$$P(s) : \begin{cases} \dot{\nu} = \mathcal{A} \nu + \mathcal{B}_\phi w + \mathcal{B}_\theta w_\theta \\ z = \mathcal{C}_\phi \nu \\ z_p = \mathcal{C}_p \nu + \mathcal{D}_{p\phi} w + \mathcal{D}_{p\theta} w_\theta \\ z_\theta = \mathcal{C}_\theta \nu + \mathcal{D}_{\theta\phi} w + \mathcal{D}_{\theta\theta} w_\theta \\ w_\theta = \theta_P(t) z_\theta \end{cases} \quad (5.62)$$

avec :

$$\theta_P(t) = \text{diag}(\theta_M(t), \theta_J(t)) \in \Theta_P \subset \mathbb{R}^{p_P \times p_P} \quad (5.63)$$

et :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_\phi & \mathcal{B}_\theta \\ \mathcal{C}_\phi & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\phi} & \mathcal{D}_{p\theta} \\ \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D}_{\theta\phi} & \mathcal{D}_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} A & B_a C_{Ja} & B_\phi + B_a D_{Ja\phi} & B_\theta & B_a D_{Ja\theta} & \\ 0 & A_J & B_{J\phi} & 0 & B_{J\theta} & \\ \hline C_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline C_p & D_{pa} C_{Ja} & D_{p\phi} + D_{pa} D_{Ja\phi} & D_{p\theta} & D_{pa} D_{Ja\theta} & \\ \hline C_\theta & D_{\theta a} C_{Ja} & D_{\theta\phi} + D_{\theta a} D_{Ja\phi} & D_{\theta\theta} & D_{\theta a} D_{Ja\theta} & \\ 0 & C_{J\theta} & D_{J\theta\phi} & 0 & D_{J\theta\theta} & \end{array} \right) \quad (5.64)$$

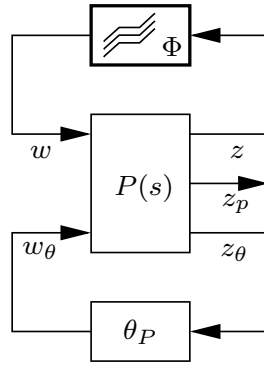


Figure 5.12 Système en boucle fermée incluant le correcteur anti-windup.

5.3.2 Calcul d'un niveau de performance

On définit les ensembles convexes ci-dessous, où x vaut M ou P suivant que l'on considère le système $M(s)$ ou $P(s)$.

$$\mathbf{D}_x = \{D \in \mathbb{R}^{p_x \times p_x}, D = D^T > 0 : D\theta = \theta D \forall \theta \in \Theta_x\} \quad (5.65)$$

$$\mathbf{G}_x = \{G \in \mathbb{R}^{p_x \times p_x}, G = -G^T > 0 : G\theta = \theta^T G \forall \theta \in \Theta_x\} \quad (5.66)$$

Remarque 5.3.2 Les ensembles \mathbf{D}_x et \mathbf{G}_x correspondent dans une certaine mesure aux ensembles de matrices de scaling $\mathbf{D}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{T}\mathbf{V}}$ introduits au paragraphe 1.4.1 afin d'analyser la robustesse de systèmes linéaires soumis à des incertitudes structurées LTV.

Le résultat ci-dessous propose alors une généralisation de la proposition 5.1.5 aux systèmes saturés à paramètres variants.

Proposition 5.3.3 (caractérisation d'un niveau de performance) *S'il existe des matrices $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbf{D}_P$ et $G \in \mathbf{G}_P$, ainsi que des réels γ et $\tilde{\rho}$, tels que les conditions ci-dessous sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} \tilde{\rho}I_p & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{\rho}I_p \\ 0 \end{bmatrix} < I_p \quad (5.67)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^T P + P\mathcal{A} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{B}_\phi^T P - \Lambda H & -2\Lambda & \star & \star & \star \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\phi} & -\gamma I_p & \star & \star \\ \mathcal{B}_\theta^T P + G\mathcal{C}_\theta & G\mathcal{D}_{\theta\phi} & \mathcal{D}_{p\theta}^T & -D + G\mathcal{D}_{\theta\theta} - \mathcal{D}_{\theta\theta}^T G & \star \\ DC_\theta & D\mathcal{D}_{\theta\phi} & 0 & D\mathcal{D}_{\theta\theta} & -D \end{bmatrix} < 0 \quad (5.68)$$

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ H_i + \mathcal{C}_{\phi_i} & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.69)$$

où H_i et \mathcal{C}_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de H et \mathcal{C}_ϕ , alors pour tout opérateur $\theta_P \in B(\Theta_P)$, tout $\rho \leq \tilde{\rho}$ et toute entrée exogène $r \in \mathcal{W}_\epsilon(\rho)$, l'interconnexion de la figure 5.12 est asymptotiquement stable pour toute condition initiale ζ_0 appartenant au domaine ellipsoïdal :

$$\mathcal{E}_P(\rho) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{n-p} : \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \rho \\ \zeta \end{bmatrix} \leq 1 \right\} \quad (5.70)$$

De plus, l'énergie du signal de sortie z_p vérifie :

$$\int_0^\infty z_p(t)^T z_p(t) dt \leq \gamma \quad (5.71)$$

Preuve : Toute matrice $\theta \in B(\Theta_P)$ vérifie la relation :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D & -G \\ G & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.72)$$

avec $D \in \mathbf{D}_P$ et $G \in \mathbf{G}_P$. Si l'opérateur θ_P est normalisé, i.e. si $\theta_P \in B(\Theta_P)$, on a donc :

$$\begin{bmatrix} \nu \\ w \\ w_\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D}_{\theta\phi} & \mathcal{D}_{\theta\theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D & -G \\ G & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D}_{\theta\phi} & \mathcal{D}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ w \\ w_\theta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.73)$$

On suit alors la même démarche que pour démontrer les propositions 4.3.2 et 4.3.4. En particulier, l'application de la \mathcal{S} -procédure aux inégalités (4.43), (4.28) (en les adaptant de manière à intégrer l'état x_J et l'entrée w_θ) et (5.73) puis du complément de Schur conduit directement à la condition (5.68). ■

On considère tout d'abord la question de l'analyse de performance pour laquelle le correcteur anti-windup est fixé (ou absent). Le problème d'optimisation de la proposition 5.3.3 consiste à minimiser la valeur de γ sous les contraintes (5.67), (5.68) et (5.69) par rapport aux variables P, Λ, H, D et G . Il n'est pas convexe dans le cas général car l'inégalité (5.68) est une BMI. Cependant, si l'on pose $Q = P^{-1}, S = \Lambda^{-1}, Z = HQ$ et $L = D^{-1}$, puis que l'on fixe $G = 0$, l'inégalité (5.68) s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & \star & \star & \star & \star \\ SB_\phi^T - Z & -2S & \star & \star & \star \\ C_p Q & \mathcal{D}_{p\phi} S & -\gamma I_p & \star & \star \\ LB_\theta^T & 0 & LD_{p\theta}^T & -L & \star \\ C_\theta Q & \mathcal{D}_{\theta\phi} S & 0 & \mathcal{D}_{\theta\theta} L & -L \end{bmatrix} < 0 \quad (5.74)$$

et devient convexe en Q, S, Z et L . Dans ce contexte, on introduit l'algorithme itératif suivant, qui ne nécessite de résoudre que des problèmes LMI.

Algorithme 5.3.4 (calcul d'un niveau de performance)

1. Minimiser γ sous les contraintes LMI (5.11), (5.74) et (5.13) par rapport à Q, S, Z et L . Soit γ_0 le niveau de performance obtenu. Soit $\Lambda = S^{-1}$.
2. Fixer la matrice Λ . Minimiser γ sous les contraintes LMI (5.67), (5.68) et (5.69) par rapport à P, H, D et G .
3. Fixer la matrice H . Minimiser γ sous les contraintes LMI (5.67), (5.68) et (5.69) par rapport à P, Λ, D et G . Soit γ_{opt} la valeur obtenue. Si $\gamma_{opt} > (1 - \epsilon)\gamma_0$, où $\epsilon > 0$ représente une tolérance donnée, interrompre l'algorithme car la décroissance du critère est devenue trop faible. Sinon, poser $\gamma_0 = \gamma_{opt}$ et retourner à l'étape 2.

La valeur de γ_{opt} décroît d'une itération à l'autre, ce qui assure la convergence en un nombre fini d'itérations. Rien ne permet d'affirmer que la valeur finale correspond au minimum global du problème d'optimisation de la proposition 5.3.3, mais l'algorithme présente l'avantage d'optimiser la matrice de Lyapunov P ainsi que les matrices de scaling D et G à chaque étape, ce qui permet de faciliter la convergence.

Remarque 5.3.5 Exploiter l'inégalité (5.74) pour initialiser l'algorithme 5.3.4 permet de ne pas avoir à fixer arbitrairement la matrice Λ lors de la première exécution de l'étape 2, ce qui peut s'avérer délicat en pratique. Par contre, imposer $G = 0$ a une signification physique et revient simplement à ne pas tenir compte du caractère réel des paramètres dont dépend le système $P(s)$.

Remarque 5.3.6 Ignorer la matrice G est généralement source de conservatisme, sauf si aucun paramètre n'est répété, ce qui arrive assez fréquemment en pratique. Dans ce cas, on a en effet $G = 0$ par définition.

Remarque 5.3.7 Aucune hypothèse n'est faite dans ce paragraphe sur la nature des paramètres dont dépend le système, qui peuvent être des grandeurs mesurées ou des incertitudes.

5.3.3 Synthèse anti-windup à paramètres variants

On se place dorénavant dans le cas où $G = 0$, pour lequel le problème d'analyse énoncé par la proposition 5.3.3 est convexe si l'on considère les contraintes (5.11), (5.74) et (5.13). Le problème de synthèse anti-windup associé est par contre bilinéaire, car la variable

d'analyse Q et les matrices d'état du correcteur $J(s)$ doivent maintenant être optimisées simultanément. La convexité peut néanmoins être restaurée si les hypothèses ci-dessous sont vérifiées.

Hypothèse 5.3.8

1. Le correcteur anti-windup recherché est d'ordre plein, i.e. $n_J = n_M$.
2. Les opérateurs θ_J et θ_M sont identiques, i.e. $\theta_J(t) = \theta_M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ce qui revient notamment à supposer que tous les paramètres sont mesurés.

On peut alors énoncer le résultat suivant, qui constitue une généralisation de la proposition 5.1.6 aux systèmes à paramètres variants.

Proposition 5.3.9 (synthèse anti-windup d'ordre plein) *Soit $\Gamma = \text{diag}(N_a, I_m, N_{pa}, I_{2p_M}, D_{\theta a})$, où N_a, N_{pa} et $N_{\theta a}$ désignent des matrices dont les colonnes forment respectivement des bases des noyaux de B_a^T, D_{pa}^T et $D_{\theta a}^T$. Il existe un correcteur anti-windup $J(s)$ d'ordre plein tel que les conditions (5.11), (5.74) et (5.13) sont satisfaites si et seulement si il existe des matrices $X = X^T, Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n_M \times n_M}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale, $U, V \in \mathbb{R}^{m \times n_M}$ et $R, T \in \mathbf{D}_M$, ainsi que des réels γ et $\tilde{\rho}$, tels que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :*

$$[\tilde{\rho}I_p \quad 0] X \begin{bmatrix} \tilde{\rho}I_p \\ 0 \end{bmatrix} < I_p \quad (5.75)$$

$$\Gamma^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & \star & \star & \star & \star & \star \\ SB_\phi^T - V & -2S & \star & \star & \star & \star \\ C_p Y & D_{p\phi} S & -\gamma I_p & \star & \star & \star \\ RB_\theta^T & 0 & RD_{p\theta}^T & -R & \star & \star \\ B_\theta^T & 0 & D_{p\theta}^T & -I_{n_M} & -T & \star \\ C_\theta Y & D_{\theta\phi} S & 0 & D_{\theta\theta} R & D_{\theta\theta} & -R \end{bmatrix} \Gamma < 0 \quad (5.76)$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & \star & \star & \star & \star \\ C_p & -\gamma I_p & \star & \star & \star \\ B_\theta^T X & D_{p\theta}^T & -I_{n_M} & \star & \star \\ TC_\theta & 0 & TD_{\theta\theta} & -T & \star \\ C_\theta & 0 & D_{\theta\theta} & -I_{n_M} & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (5.77)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n_M} & Y & \star \\ U_i & V_i + C_{\phi_i} Y & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots m \quad (5.78)$$

où U_i, V_i et C_{ϕ_i} représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de U, V et C_ϕ .

Preuve : La condition imposée sur l'opérateur θ_J dans l'hypothèse 5.3.8 signifie que tout élément de Θ_P possède une structure diagonale par bloc constituée de deux éléments identiques de Θ_M . Les matrices de scaling $L, L^{-1} \in \mathbf{D}_P$ peuvent donc être partitionnées de la manière suivante :

$$L = \begin{bmatrix} R & L_{12}^T \\ L_{12} & L_2 \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = D = \begin{bmatrix} T & D_{12}^T \\ D_{12} & D_2 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

avec $R, T, L_2, D_2 \in \mathbf{D}_M$. On montre alors de la même manière que dans la preuve de la proposition 5.1.6 que les conditions du lemme de complétion matricielle sont strictement vérifiées, *i.e.* que la partition (5.79) est valide. L'application du lemme de projection permet finalement de conclure après quelques manipulations matricielles qu'il existe un correcteur anti-windup $J(s)$ tel que l'inégalité (5.74) est vérifiée si et seulement si les inégalités (5.76) et (5.77) sont vérifiées. ■

Remarque 5.3.10 (reconstruction du correcteur) *Le correcteur anti-windup $J(s)$ peut être reconstruit en suivant une procédure similaire à celle de la remarque 5.1.7.*

Dans le cas de la synthèse d'ordre réduit, fixer certaines matrices d'état du correcteur anti-windup permet également de restaurer la convexité, comme le précise la proposition ci-dessous.

Proposition 5.3.11 *La contrainte bilinéaire (5.74) devient convexe lorsque les matrices A_J, C_{J_a} et C_{J_θ} du correcteur anti-windup $J(s)$ sont fixées.*

Preuve : Comme S et L sont définies positives et donc non singulières, il suffit d'appliquer

$$\text{le changement de variables } \begin{bmatrix} \tilde{B}_{J\phi} \\ \tilde{D}_{J_a\phi} \\ \tilde{D}_{J_\theta\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{J\phi} \\ D_{J_a\phi} \\ D_{J_\theta\phi} \end{bmatrix} S \text{ et } \begin{bmatrix} \tilde{B}_{J\theta} \\ \tilde{D}_{J_a\theta} \\ \tilde{D}_{J_\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{J\theta} \\ D_{J_a\theta} \\ D_{J_\theta\theta} \end{bmatrix} L. \quad \blacksquare$$

La démarche proposée par l'algorithme 5.1.10 peut donc être reconduite en l'état.

Remarque 5.3.12 *La proposition 5.3.9 n'est applicable que dans le cas où tous les paramètres dont dépend le système sont mesurables. Elle peut cependant être exploitée dans le cas où le système est également soumis à des incertitudes. La stratégie consiste alors à réaliser une synthèse d'ordre plein en supposant que toutes les incertitudes sont mesurées, puis à sélectionner une liste de pôles pertinents parmi ceux du correcteur obtenu. Un correcteur d'ordre fixé est calculé dans un deuxième temps en ne conservant dans la structure Θ_J que les termes relatifs aux paramètres effectivement mesurés, de sorte que le correcteur anti-windup finalement obtenu ne dépend pas des incertitudes.*

Remarque 5.3.13 *Les résultats du paragraphe 5.2 peuvent eux aussi être généralisés aux systèmes à paramètres variants. La convexité est notamment préservée dans le cas de la synthèse d'ordre plein à dynamique contrainte.*

5.3.4 Application à un modèle de missile

L'objectif est maintenant d'appliquer la méthode proposée dans ce paragraphe à un exemple réaliste de missile. On choisit volontairement un modèle et une structure de commande très simples, faisant notamment intervenir un unique gain anti-windup, de manière à pouvoir facilement évaluer l'intérêt d'une approche à paramètres variants par rapport à une synthèse point par point suivie d'une phase d'interpolation. Une application plus ambitieuse est proposée dans la partie III.

Le modèle non-linéaire initial du missile est extrait de [Reichert, 1992]. Son comportement en boucle ouverte est décrit par les équations ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = q + K_1 M C_z(\alpha, M, u_c) \cos(\alpha) \\ \dot{q} = K_2 M^2 C_m(\alpha, M, u_c) \end{cases} \quad (5.80)$$

Seul le mouvement longitudinal est considéré ici. Le vecteur d'état $x = [\alpha \ q]^T$ est donc constitué de l'angle d'incidence α et de la vitesse de tangage q , et on suppose qu'il est entièrement mesuré. La commande u_c correspond à l'angle de braquage de l'empennage arrière, tandis que M désigne le nombre de Mach et que K_1, K_2 sont des constantes. Les coefficients aérodynamiques C_z et C_m initiaux sont quant à eux modélisés par des fonctions polynomiales d'ordre 3 en α et d'ordre 1 en M . Ils sont ici simplifiés de manière à obtenir une dépendance linéaire en α :

$$\begin{aligned} C_z(\alpha, M, u_c) &= (z_{11} + z_{12}M) \alpha + z_0 u_c \\ C_m(\alpha, M, u_c) &= (m_{11} + m_{12}M) \alpha + m_0 u_c \end{aligned}$$

où les z_i et les m_j sont des coefficients constants. On considère enfin des angles d'incidence peu importants, ce qui permet de réaliser l'approximation $\cos(\alpha) \approx 1$ dans l'équation (2.19). Une étude comparative réalisée en différents points critiques du domaine de vol révèle que la dynamique du système est peu dégradée par de telles simplifications.

Ces équations d'état non-linéaires en boucle ouverte $\dot{x} = f(x, u_c)$ sont mises sous forme LFT $x = \mathcal{F}_u(F(s), M.I_4)u_c$ à l'aide de la LFR Toolbox [Magni, 2006], où le nombre de Mach est vu comme un paramètre variant compris dans l'intervalle $[2, 4]$, qui correspond au domaine de validité du modèle. Un actionneur du second ordre saturé en vitesse et décrit par les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \text{sat}_{L_r}(\zeta_2) \\ \dot{\zeta}_2 = \omega_a^2(u - u_c) - 2\xi_a\omega_a \text{sat}_{L_r}(\zeta_2) \\ u_c = \zeta_1 \end{cases} \quad (5.81)$$

avec $\xi_a = 0.7, \omega_a = 150 \text{ rad/s}$ et $L_r = 100 \text{ deg/s}$, vient alors compléter le modèle en boucle ouverte $G(s)$.

La saturation est dans un premier temps ignorée et un correcteur nominal de type PID dépendant de M est synthétisé par une technique modale. Le système en boucle fermée ainsi obtenu se comporte comme un second ordre dont l'amortissement et la pulsation valent respectivement 0.6 et 15 rad/s, et ce quelle que soit la valeur de M dans l'intervalle $[2, 4]$. Le gain K obtenu admet une représentation LFT d'ordre 3 en M .

Le modèle de référence $L(s)$ est quant à lui défini simplement comme un système linéaire du second ordre d'amortissement 0.6 et de pulsation égale à 15 rad/s. La performance robuste est donc définie par la fonction de transfert entre la consigne α_r et la différence $\alpha - \alpha_{lin}$ entre l'angle d'incidence du système saturé et celui du système linéaire associé. L'interconnexion non-linéaire ainsi obtenue est représentée sur la figure 5.13 et est conforme à celle décrite sur la figure 5.11.

On cherche maintenant à synthétiser un correcteur anti-windup éventuellement fonction du nombre de Mach qui permette d'assurer un bon suivi du modèle de référence tout en garantissant la stabilité du système saturé pour des consignes d'amplitude élevée. On se limite ici à des correcteurs statiques agissant uniquement sur la dynamique du correcteur nominal, ce qui permet de ne travailler qu'avec un seul gain anti-windup. Deux stratégies sont mises en œuvre puis comparées :

1. Plusieurs correcteurs sont calculés pour différentes valeurs de M dans l'intervalle $[2, 4]$ à l'aide des outils proposés dans le paragraphe 5.1, puis une interpolation est réalisée (approche point par point).
2. Un correcteur unique dépendant du nombre de Mach est déterminé à l'aide de la technique du paragraphe 5.3.2 (approche directe).

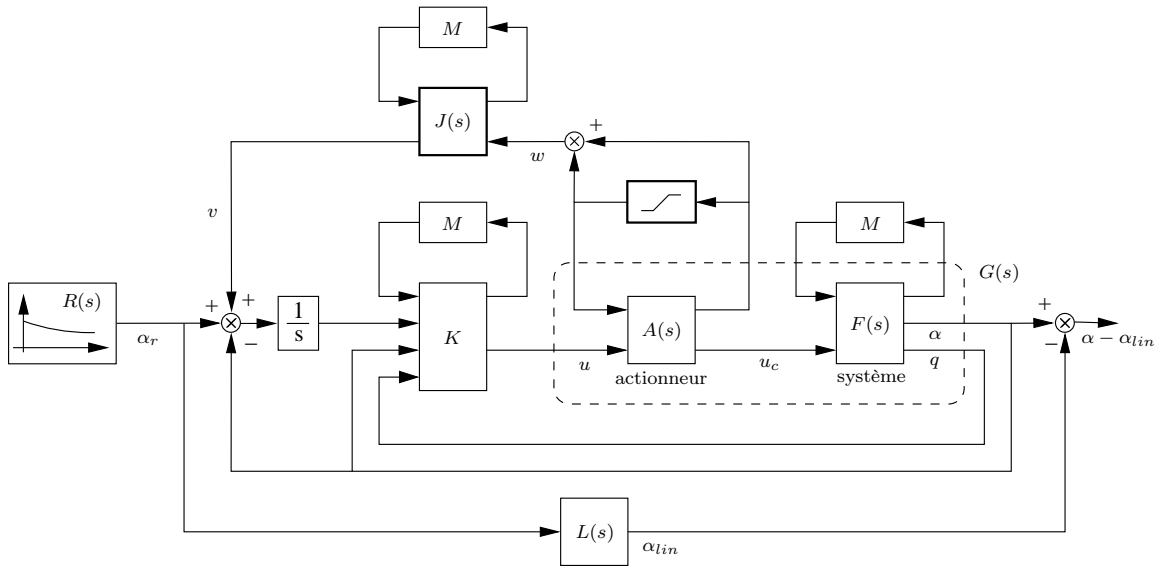


Figure 5.13 Structure du modèle de missile en boucle fermée.

Dans le deuxième cas, l'interconnexion de la figure 5.13 est réécrite conformément à la figure 5.12. Une analyse de stabilité montre qu'il n'est pas possible de garantir la stabilité pour des variations arbitrairement rapides du Mach, et ce même en l'absence de saturation. Des filtres passe-bas du premier ordre de constante de temps $\tau = 0.2$ s sont alors introduits en aval du bloc de paramètres et intégrés au système $P(s)$. Ils permettent dans une certaine mesure de prendre en compte le fait que la vitesse de variation du Mach est nécessairement bornée en pratique, et donc de réduire le conservatisme, ce que n'autorise pas directement l'approche proposée dans ce chapitre.

Remarque 5.3.14 Une telle démarche est intuitive mais nécessite cependant d'être validée. On compare pour cela le comportement entrée-sortie du modèle nominal et du modèle filtré suivant le schéma de la figure 5.14.

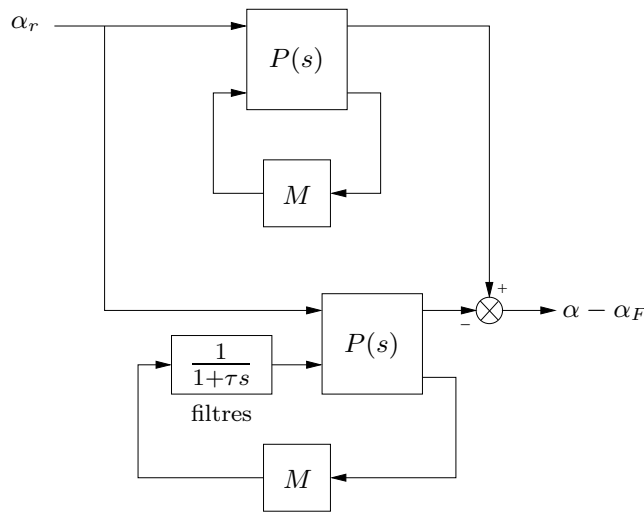


Figure 5.14 Evaluation du comportement entrée-sortie du système filtré.

Plus précisément, on impose à l'aide de l'IQC Toolbox pour Matlab [Kao et al., 2004; Megretski et Rantzer, 1997] une borne réaliste sur la vitesse de variation du Mach, à savoir $|\dot{M}(t)| \leq 1$, puis on calcule une borne supérieure γ_{sup} de la norme \mathcal{L}_2 -induite entre la consigne α_r et le signal d'erreur $\alpha - \alpha_F$. On obtient $\gamma_{sup} = 0.04$, ce qui signifie que la différence entre les deux systèmes est très faible, et donc qu'il est tout à fait légitime de réaliser un tel filtrage.

Les filtres permettent d'assurer la faisabilité du problème de synthèse anti-windup. Les gains obtenus par les deux méthodes décrites ci-dessus sont alors tracés sur la figure 5.15, et on constate notamment que l'approche directe conduit à un gain quasi-constant.

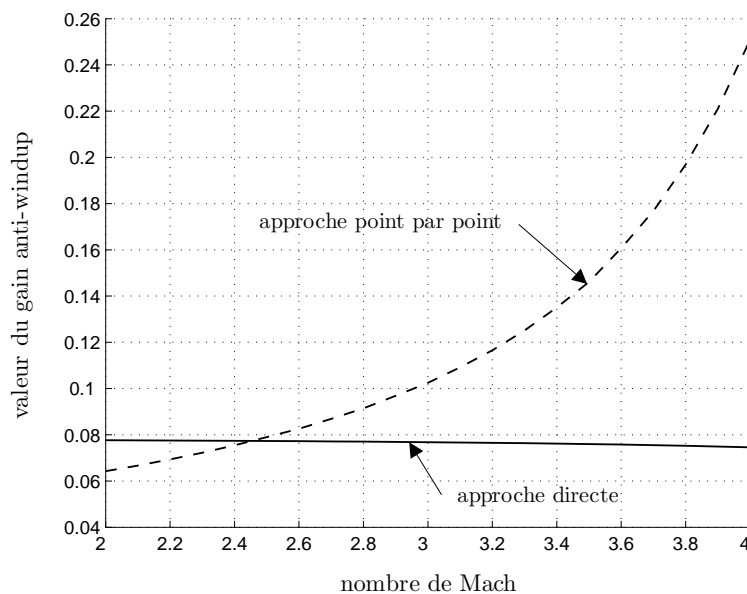


Figure 5.15 Valeur du gain anti-windup en fonction du nombre de Mach.

L'amplitude maximale de la consigne pour laquelle la stabilité est garantie est quant à elle représentée sur la figure 5.16. Les deux approches donnent des résultats équivalents pour les valeurs les plus critiques du nombre de Mach, *i.e.* $M \approx 2$. L'approche directe fournit en effet une garantie globale de stabilité ou de performance pour tout l'intervalle de validité de M et il semble donc cohérent que le correcteur ainsi calculé soit particulièrement adapté à ces valeurs critiques. En outre, les deux courbes restent très proches lorsque M augmente, ce qui montre qu'un correcteur anti-windup constant est tout à fait suffisant dans l'exemple étudié ici.

Enfin, la figure 5.17 montre que le correcteur anti-windup constant se comporte très bien quelle que soit la valeur du nombre de Mach. Une légère augmentation du temps de réponse est observée par rapport à la référence linéaire pour des valeurs de M proches de 2, mais les réponses temporelles du système saturé restent dans tous les cas satisfaisantes. On constate enfin que le système est instable en l'absence de correction anti-windup.

Ce paragraphe présente donc une application originale des techniques anti-windup développées précédemment. L'objectif ici n'est en effet pas de montrer que l'approche avec prise en compte directe des paramètres variants est plus performante qu'une approche point par point, mais plutôt qu'elle permet de réduire la complexité du correcteur pour des performances équivalentes.

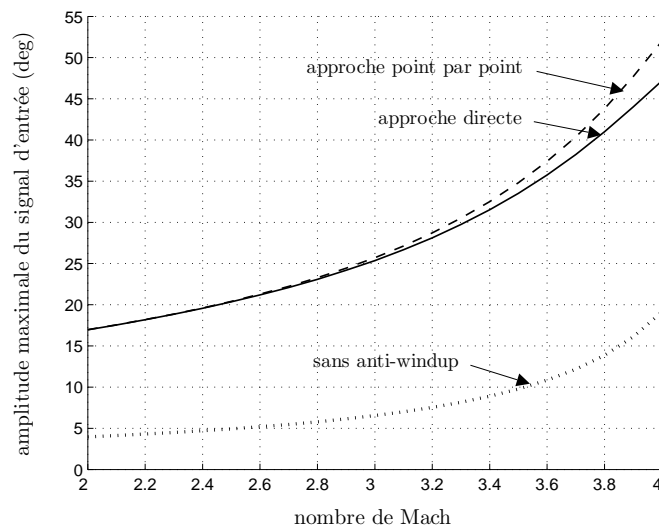


Figure 5.16 Amplitude maximale de la consigne pour laquelle la stabilité est garantie.

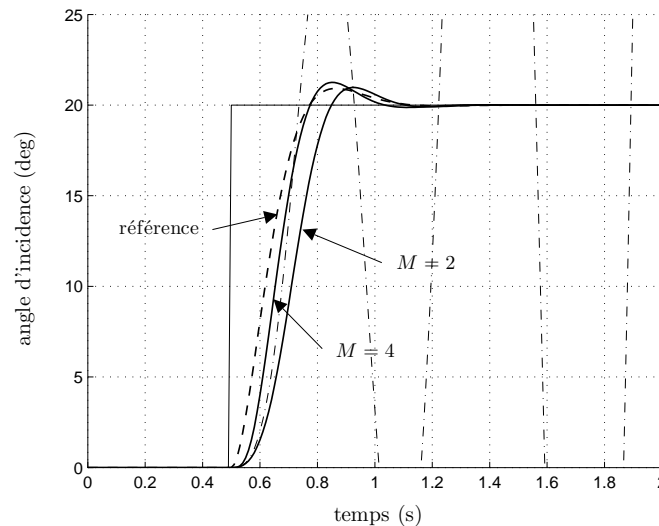


Figure 5.17 Réponses temporelles à un échelon d'incidence.

Conclusion

La première contribution de ce chapitre consiste à proposer une méthodologie complète de synthèse anti-windup dynamique s'appuyant sur une modélisation de la fonction saturation à l'aide d'une condition de secteur modifiée. Une formulation convexe du problème d'ordre plein est notamment établie. La convexité est perdue dans le cas général mais peut être restaurée dès que la dynamique du correcteur est fixée. Dans ce contexte, un algorithme permettant de déterminer un ensemble de pôles pertinents puis un correcteur d'ordre réduit adéquat est alors introduit.

Dans un deuxième temps, une stratégie est élaborée afin de contraindre le correcteur anti-windup et d'éviter l'apparition de dynamiques lentes susceptibles de dégrader les performances temporelles. Plus précisément, une borne supérieure est introduite sur la partie réelle de ses pôles, ce qui permet de gérer efficacement le compromis entre taille du domaine de stabilité d'une part et pertinence de la réponse temporelle d'autre part.

Les résultats obtenus sont finalement généralisés aux systèmes variants et/ou incertains. Dans tous les cas, la convexité est préservée pour des correcteurs d'ordre plein, ce qui rend les outils mis au point facilement exploitables d'un point de vue numérique. Ces derniers se révèlent d'ailleurs très efficaces lorsqu'ils sont appliqués à des modèles réalistes de missile et d'avion de combat. Les correcteurs anti-windup obtenus permettent en effet d'assurer la stabilité des systèmes saturés pour des consignes d'amplitude élevée tout en minimisant la dégradation de performance due à la présence des saturations.

Notations

BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire
IQC	Contrainte Quadratique Intégrale
LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
\mathbb{R}, \mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels, des nombre réels positifs
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$
$\ r\ , r $	Norme euclidienne du vecteur r , valeur absolue du réel r
\bar{z}	Conjugué du nombre complexe z
$\Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
I_m	Matrice identité de taille $m \times m$
0_m	Matrice nulle de taille $m \times m$
M^T	Transposée de la matrice M
$\bar{\sigma}(M)$	Plus grande valeur singulière de la matrice M
$\mathcal{F}_u(M, N)$	LFT supérieure (voir annexe)
\mathcal{L}_2^p	Ensemble des signaux d'énergie finie de dimension p
$co(\cdot)$	Enveloppe convexe
$\Phi(\cdot), \phi(\cdot)$	Opérateur zone morte multivariable, monovariable

Dans un souci de concision, la partie triangulaire supérieure stricte d'une matrice hermitienne est généralement représentée à l'aide de symboles \star .

Références

- [Apkarian et Adams, 1998] P. Apkarian et R.J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1): 21–32, 1998.
- [Apkarian et Gahinet, 1995] P. Apkarian et P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5): 853–864, 1995.
- [Biannic *et al.*, 2006] J-M. Biannic, S. Tarbouriech et D. Farret. A practical approach to performance analysis of saturated systems with application to fighter aircraft flight controllers. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.
- [Biannic *et al.*, 2007] J-M. Biannic, C. Roos et S. Tarbouriech. A practical method for fixed-order anti-windup design. Dans *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Non-linear Control Systems*, pages 527–532, Pretoria, Afrique du Sud, Août 2007.

- [Ferrerres et Biannic, 2007] G. Ferrerres et J-M. Biannic. Convex design of a robust anti-windup controller for an LFT model. *A paraître dans IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007.
- [Garcia et al., 1999] G. Garcia, S. Tarbouriech, R. Suarez et J. Alvarez-Ramirez. Nonlinear bounded control for norm-bounded uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6): 1254–1258, 1999.
- [Gomes da Silva Jr et Tarbouriech, 2005] J.M. Gomes da Silva Jr et S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1): 106–111, 2005.
- [Grimm et al., 2003] G. Grimm, J. Hatfield, I. Postlewaite, A.R. Teel, M.C. Turner et L. Zaccarian. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9): 1509–1524, 2003.
- [Henrion et al., 1997] D. Henrion, S. Tarbouriech et G. Garcia. Output feedback robust stabilization of uncertain linear systems with saturating control. Dans *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 193–198, San Diego, USA, Décembre 1997.
- [Kao et al., 2004] C.Y. Kao, A. Megretski, U.T. Jönsson et A. Rantzer. A Matlab toolbox for robustness analysis. Dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 297–302, Taipei, Taiwan, Septembre 2004.
- [Lu et al., 2005] B. Lu, F. Wu et S. Kim. LPV antiwindup compensation for enhanced flight control performance. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 28(3): 494–505, 2005.
- [Marcos et al., 2006] A. Marcos, M.C. Turner, D.G. Bates et I. Postlethwaite. Robustification of static and low order anti-windup designs. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.
- [Megretski et Rantzer, 1997] A. Megretski et A. Rantzer. System analysis via Integral Quadratic Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6): 819–830, 1997.
- [Packard et al., 1991] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey et G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMI's. Dans *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1245–1250, Brighton, Royaume-Uni, Décembre 1991.
- [Roos et Biannic, 2008] C. Roos et J-M. Biannic. A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers. *A paraître dans Automatica*, 2008.
- [Scorletti et El Ghaoui, 1998] G. Scorletti et L. El Ghaoui. Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(10): 845–877, 1998.
- [Turner et al., 2004] M.C. Turner, G. Herrmann et I. Postlethwaite. Accounting for uncertainty in anti-windup synthesis. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 5292–5297, Boston, USA, Juin 2004.
- [Wu et al., 2000] F. Wu, K.M. Grigoriadis et A. Packard. Anti-windup controller design using linear parameter-varying control methods. *International Journal of Control*, 73(12): 1104–1114, 2000.
- [Wu et Lu, 2004] F. Wu et B. Lu. Anti-windup control design for exponentially unstable LTI systems with actuator saturation. *Systems and Control Letters*, 52(3-4): 305–322, 2004.
- [Wu et Soto, 2004] F. Wu et M. Soto. Extended anti-windup control schemes for LTI and LFT systems with actuator saturations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(15): 1255–1281, 2004.

Troisième partie

Application au contrôle latéral
d'un avion au sol

Chapitre 6

MODÉLISATION LFT NON-LINÉAIRE DE LA DYNAMIQUE LATÉRALE D'UN AVION AU SOL

Résumé : L'automatisation de la phase de roulage au sol d'un avion de transport civil représente un enjeu important en termes de sécurité et de décongestion des aéroports. Il faut pour cela disposer d'un modèle suffisamment simple afin de pouvoir appliquer les techniques de l'automatique moderne, mais néanmoins représentatif du comportement de l'avion sur un vaste domaine opérationnel. Ce chapitre décrit les différentes étapes permettant d'obtenir une représentation LFT simplifiée de la dynamique latérale d'un avion au sol à partir d'un modèle non-linéaire complet développé dans un contexte industriel.

Mots clés : dynamique de l'avion au sol, identification des forces de friction, modélisation LFT non-linéaire, saturations.

Sommaire

6.1	Description du modèle non-linéaire initial	124
6.1.1	Architecture générale	124
6.1.2	Nécessité d'un modèle réduit	126
6.2	Construction d'un modèle latéral simplifié	127
6.2.1	Hypothèses simplificatrices	127
6.2.2	Equations latérales	128
6.2.3	Obtention d'un modèle LPV	130
6.3	Représentation des forces de friction	130
6.3.1	Modélisation initiale	130
6.3.2	Identification par inversion du modèle LPV	131
6.3.3	Approximation par des non-linéarités de type saturation	132
6.4	Mise sous forme LFT	133
6.4.1	Modèle aérodynamique	133
6.4.2	Forces de friction	134
6.4.3	Actionneur de la roulette avant	135
6.4.4	Création de l'interconnexion complète	136
6.5	Simulations temporelles et validation	136
6.5.1	Manœuvre basse vitesse	137
6.5.2	Manœuvre haute vitesse	138

Bibliographie

[1] J-M. Biannic, A. Marcos, M. Jeanneau et C. Roos. Nonlinear simplified LFT modelling of an aircraft on ground. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2213-2218, Munich, Allemagne, octobre 2006.

L'utilisation des commandes de vol électriques à bord des avions de transport s'est généralisée depuis une vingtaine d'années. Ce dispositif offre en effet un confort accru en termes de pilotage, de meilleures protections du domaine de vol, et bien d'autres avantages encore. De manière générale, il propose une assistance au pilote tout en apportant des garanties supplémentaires de sécurité. Cependant, si ces progrès permettent une automatisation de la plupart des phases de vol, le pilotage au sol des avions commerciaux est le plus souvent réalisé manuellement par le pilote, qui doit commander simultanément les moteurs, le système de freinage, ainsi que les braquages de la dérive et de la roulette avant. L'automatisation de la phase de roulage apparaît donc comme l'un des objectifs majeurs des années à venir dans le domaine des lois de pilotage. Elle doit permettre de réduire la charge de travail du pilote, d'optimiser les trajectoires sur la piste tout en renforçant la sécurité, et à plus grande échelle de réduire l'engorgement des aéroports.

On dispose pour cela d'un modèle non-linéaire développé dans un contexte industriel et décrivant avec une bonne précision les déplacements d'un avion de transport lors de la phase de roulage au sol, depuis l'atterrissage jusqu'au point de stationnement [Jeanneau, 2007]. S'il est tout à fait représentatif du comportement de l'avion réel, ce qui en fait un outil de validation pertinent, il est en revanche beaucoup trop complexe dans la perspective de synthétiser des lois de commandes. En effet, l'application des techniques de l'automatique moderne nécessite généralement de travailler sur des modèles de structure spécifique et de complexité raisonnable. Une première étape de modélisation et de simplification s'avère alors nécessaire et fait l'objet de ce chapitre.

Plus précisément, une méthodologie complète permettant de modéliser la dynamique latérale d'un avion au sol est proposée. Elle conduit à l'obtention d'un modèle LFT très simplifié compatible avec les outils d'analyse de robustesse et de synthèse de lois de commande développés dans les parties I et II. La principale difficulté consiste à représenter les interactions entre les roues et la piste, qui dépendent de manière fortement non-linéaire de nombreux paramètres tels que l'angle de dérapage au niveau des pneus, la force verticale, la vitesse longitudinale, ou encore l'état de la piste, qui peut être sèche, mouillée, ou même gelée. Une attention particulière est consacrée à ce point particulier et une procédure d'identification s'appuyant sur une technique d'inversion dynamique non-linéaire est proposée. Elle est appliquée avec succès à la détermination des forces de friction latérales, qui sont finalement modélisées avec une bonne précision à l'aide de saturations.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Le modèle non-linéaire initial est présenté au paragraphe 6.1. L'accent est mis sur sa grande complexité et sur la nécessité de réaliser des simplifications. Dans cette optique, un modèle LPV est développé au paragraphe 6.2 dont les entrées correspondant aux forces de friction entre les roues et le sol restent à déterminer. Une procédure d'identification est alors proposée au paragraphe 6.3, qui suggère de modéliser ces forces à l'aide de saturations. Il en résulte au paragraphe 6.4 une représentation LFT non-linéaire simplifiée de la dynamique latérale de l'avion au sol, dont le comportement est comparé à celui du modèle initial au paragraphe 6.5.

6.1 Description du modèle non-linéaire initial

6.1.1 Architecture générale

Le modèle non-linéaire en boucle ouverte étudié dans ce chapitre est représentatif d'un avion de transport civil. Il est constitué de trois blocs principaux détaillés sur la figure 6.1 et dont une description complète est proposée dans [Jeanneau, 2007].

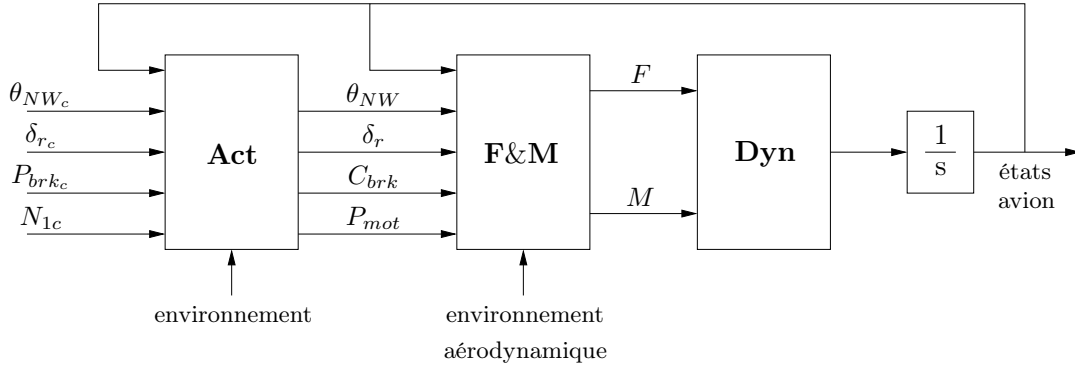


Figure 6.1 Architecture générale du modèle non-linéaire initial.

Le bloc **Dyn** contient les équations du mouvement, qui décrivent en fonction des forces F et des moments M l'évolution des 12 degrés de liberté de l'avion, à savoir :

- la vitesse linéaire $V = [V_x \ V_y \ V_z]^T$ du centre de gravité,
- la vitesse angulaire $\Omega = [p \ q \ r]^T$ constituée des vitesses de roulis, tangage et lacet,
- la position $\Psi = [x \ y \ z]^T$ du centre de gravité,
- l'attitude $\Xi = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ constituée de l'angle de gîte, de l'assiette et du cap.

Les composantes des vitesses V et Ω sont associées aux axes du repère avion alors que les positions Ψ et Ξ sont exprimées par rapport au repère sol, ce qui nécessite de faire intervenir des matrices de transformation T_Ψ et T_Ξ dépendant de l'attitude Ξ . On obtient donc les équations ci-dessous, qui sont indépendantes du type d'avion considéré et sont valables aussi bien au sol qu'en vol :

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{\Xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{m} - \Omega \wedge V \\ I^{-1}(M - \Omega \wedge (I\Omega)) \\ T_\Psi V \\ T_\Xi \Omega \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

La masse de l'avion est notée m , tandis que I désigne la matrice d'inertie. En raison des propriétés de symétrie de l'avion, cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Les forces et les moments qui agissent sur l'avion sont modélisés dans le bloc **F&M** et sont principalement liés aux effets aérodynamiques, à la gravité, à l'action des moteurs et aux interactions avec le sol (freinage, dérapage). Ils dépendent de données aérodynamiques et environnementales diverses, mais également de l'état des actionneurs (braquage de la dérive δ_r , position angulaire de la roulette avant θ_{NW} , couple de freinage C_{brk} , poussée moteur P_{mot}). L'expression des forces dans le repère avion est donnée par l'équation :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S V_a^2 \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ -C_z \end{bmatrix}}_{\text{effets aérodynamiques}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -mg \sin(\theta) \\ mg \sin(\phi) \cos(\theta) \\ mg \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\text{gravité}} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_{mot} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{poussée moteur}} + \underbrace{F_{sol}}_{\text{interactions sol}} \quad (6.3)$$

où ρ représente la masse volumique de l'air, S la surface de référence, V_a la vitesse aérodynamique et g l'accélération de la pesanteur. Les coefficients aérodynamiques C_x , C_y et C_z sont modélisés à l'aide de réseaux de neurones [Lavergne *et al.*, 2004]. Les forces de contact entre les roues et le sol sont quant à elles notées F_{sol} . Leur détermination est complexe car elles dépendent de manière fortement non-linéaire des angles de dérapage locaux β_{NW} et β_{MG} au niveau de la roulette avant et du train principal, mais également de la force verticale F_z , de l'état de la piste (sèche, mouillée, gelée) ou encore de la vitesse longitudinale de l'avion V_x . Un modèle macroscopique présenté en détail au paragraphe 6.3 et combinant différents éléments de [Bakker *et al.*, 1987; Barnes et Yager, 1998; Clot *et al.*, 1998] est utilisé.

Enfin, le bloc **Act** regroupe les modèles des différents actionneurs. Il est constitué de trois sous-systèmes correspondant à la roulette avant, au système de freinage et aux moteurs. L'actionneur de la roulette avant est représenté par un système non-linéaire du premier ordre qui détermine θ_{NW} en fonction du courant de consigne ISV_{NW} envoyé à la servovalve :

$$\dot{\theta}_{NW} = K_1 \sigma_1(ISV_{NW}) \sqrt{\frac{\sigma_2(K_2 - |\Delta P_{NW}|)}{1 + K_3 \sigma_3(ISV_{NW})}} \quad (6.4)$$

Les fonctions $\sigma_i(\cdot)$ représentent des saturations et les coefficients K_i des constantes géométriques et physiques, tandis que ΔP_{NW} est une fonction non-linéaire dépendant de la pression dans les pistons et de θ_{NW} . De manière similaire, le modèle associé au système de freinage détermine la pression P_{brk} en fonction du courant de consigne ISV_{brk} :

$$\dot{P}_{brk} = \frac{\beta_{brk}}{V_{brk}} \eta \sigma(ISV_{brk}, P_{brk}) \sqrt{\Delta P_{brk}} \quad (6.5)$$

β_{brk} est un coefficient de compressibilité dépendant de la différence de pression ΔP_{brk} dans les pistons, qui est elle-même fonction de P_{brk} . V_{brk} est le volume de déplacement des pistons, η le coefficient d'écoulement et $\sigma(\cdot)$ une fonction saturation. L'actionneur de la roulette avant et le système de freinage sont rebouclés par des correcteurs élémentaires permettant de calculer les intensités ISV_{NW} et ISV_{brk} à partir des consignes θ_{NW_c} et P_{brk_c} :

$$\begin{aligned} ISV_{NW} &= k_{NW}(\theta_{NW_c} - \theta_{NW}) \\ ISV_{brk} &= k_{1_{brk}} + k_{2_{brk}} \int_0^t (P_{brk_c} - P_{brk}) dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

et auxquels viennent s'ajouter des saturations. Ainsi, pour la roulette avant, on a :

$$\begin{aligned} |\theta_{NW}| &\leq L_p \\ |\dot{\theta}_{NW}| &\leq L_r \end{aligned} \quad (6.7)$$

avec $L_p = 74$ deg et $L_r = 16.3$ deg/s. Enfin, le comportement des moteurs est modélisé en deux étapes. Un premier bloc détermine à l'aide d'un réseau de neurones la poussée associée à une consigne N_{1c} donnée en fonction des conditions de température, pression, Mach. . . La dynamique est alors modélisée à l'aide d'un système non-linéaire du second ordre.

6.1.2 Nécessité d'un modèle réduit

Le modèle non-linéaire présenté au paragraphe 6.1.1 est décrit à l'aide d'équations différentielles. Il est donc nécessaire de le mettre sous forme LFT afin de pouvoir utiliser les

outils d'analyse et de synthèse développés dans les parties I et II. Une première méthode consiste à le convertir directement en utilisant l'approche LFT symbolique non-linéaire décrite dans [Marcos *et al.*, 2005a]. Une représentation exacte, *i.e.* identique au modèle initial d'un point de vue entrées-sorties, est ainsi proposée dans [Marcos *et al.*, 2006]. Différents algorithmes [Magni, 2006; Hecker *et al.*, 2004; Marcos *et al.*, 2005b] sont comparés et combinés afin de réduire au maximum la complexité du bloc Δ dont les dimensions sont précisées dans le tableau 6.1.

Sous-système	Dimension du bloc Δ
Dyn	43
F&M	134
Act	24
Modèle complet	201

Tableau 6.1 Dimension du bloc Δ de la représentation LFT exacte de l'avion au sol.

Le modèle non-linéaire initial est représentatif du comportement d'un avion au sol et constitue donc un outil pertinent dans la perspective de valider les lois de commande. La grande complexité de la représentation LFT associée le rend cependant inexploitable à des fins d'analyse de robustesse et de synthèse de correcteurs. Il apparaît donc judicieux dans un premier temps d'opérer des simplifications avant de chercher une représentation LFT compatible avec les outils développés dans les chapitres précédents. Ces deux étapes sont détaillées respectivement dans les chapitres 6.2-3 et 6.4, en se limitant à la dynamique latérale de l'avion. La modélisation de la dynamique longitudinale est quant à elle abordée dans [Marcos *et al.*, 2006; Biannic *et al.*, 2007].

6.2 Construction d'un modèle latéral simplifié

Le modèle simplifié doit être représentatif de la dynamique latérale d'un avion au sol :

- sur une large plage de vitesse V_x comprise entre 5 et 150 kts,
- pour des braquages de la roulette avant θ_{NW} pouvant atteindre 50 deg.

D'autre part, il doit permettre de prendre en compte des incertitudes paramétriques sur les coefficients aérodynamiques et être valable quel que soit l'état de la piste.

6.2.1 Hypothèses simplificatrices

Plusieurs hypothèses sont envisagées afin de simplifier les équations générales (6.1). La plupart d'entre elles sont caractéristiques de la phase de roulage au sol.

- (H_1) Le couplage inertiel entre M_x et M_z est négligé, *i.e.* $I_{xz} = 0$.
- (H_2) La piste est parfaitement horizontale. La position du centre de gravité sur l'axe vertical est donc constante, ce qui se traduit par $V_z = 0$ et $\dot{V}_z = 0$.
- (H_3) Les absorbeurs de chocs sont parfaitement rigides. Il n'y a pas de variation des vitesses de roulis et de tangage, *i.e.* $p = q = 0$.
- (H_4) Les expressions des coefficients aérodynamiques sont linéarisées.
- (H_5) Le train principal est assimilé à une roue unique localisée sous le fuselage.

L'hypothèse (H_3) est tout à fait réaliste lorsque l'on s'intéresse au comportement de l'avion au sol. Elle permet en effet de simplifier considérablement les équations tout en

préservant la fidélité du modèle pour la majorité des manœuvres considérées. Elle peut cependant se révéler inadéquate en cas de freinage important (vitesse de tangage non négligeable) ou de poussée différentielle marquée (fort mouvement de roulis et de lacet). Ces cas particuliers ne sont pas étudiés ici et l'hypothèse (H_3) n'est donc pas restrictive. Il en est de même de l'hypothèse (H_5) , qui se révèle pertinente à condition de ne pas étudier certaines manœuvres spécifiques (freinage différentiel notamment).

L'hypothèse (H_4) est quant à elle relativement classique et parfaitement justifiée ici en raison des faibles intervalles de vitesse et d'altitude considérés. D'autre part, les effets aérodynamiques deviennent négligeables par rapport aux forces de contact au fur et à mesure que la vitesse V_x diminue, ce qui rend inutile une modélisation très précise.

6.2.2 Equations latérales

Dynamique de l'avion. Les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) permettent de simplifier les équations initiales (6.1) pour obtenir un modèle à deux degrés de liberté :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{M_z}{I_{zz}} \\ \dot{V}_y &= \frac{F_y}{m} - rV_x \end{cases} \quad (6.8)$$

Forces et moments. D'après l'équation (6.3), la poussée moteur est une force purement longitudinale. Il en est de même pour la gravité en raison des hypothèses (H_2) et (H_3) qui impliquent que $\phi = 0$. La force F_y et le moment M_z proviennent donc uniquement des effets aérodynamiques et des interactions entre les roues et le sol :

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y_a} + F_{y_s} \\ M_z &= M_{z_a} + M_{z_s} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Pour ce qui est des effets aérodynamiques, on a :

$$\begin{aligned} F_{y_a} &= \frac{1}{2}\rho S V_a^2 C_y \\ M_{z_a} &= \frac{1}{2}\rho S c V_a^2 C_n \end{aligned} \quad (6.10)$$

où les coefficients aérodynamiques C_y et C_n se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y_\beta}\beta_a + C_{y_\delta}\delta_r + C_{y_r}\frac{rc}{V_a} \\ C_n &= C_{n_\beta}\beta_a + C_{n_\delta}\delta_r + C_{n_r}\frac{rc}{V_a} \end{aligned} \quad (6.11)$$

en vertu de l'hypothèse (H_4) . Les paramètres C_{y_x} et C_{n_x} sont des constantes calculées à partir des réseaux de neurones du modèle non-linéaire initial et l'angle de dérapage aérodynamique β_a est modélisé par :

$$\beta_a = \frac{V_y}{V_a} + \frac{W_y}{V_a} \quad (6.12)$$

où W_y représente le vent latéral. Les forces de friction entre les roues et le sol peuvent quant à elles être scindées en deux composantes associées respectivement à la roulotte avant (indice NW) et au train principal (indice MG) :

$$F_{y_s} = F_{y_{NW}} + F_{y_{MG}} \quad (6.13)$$

Leurs expressions sont détaillées au paragraphe 6.3 et dépendent principalement des angles de dérapage locaux β_{NW} et β_{MG} dont les expressions simplifiées grâce à l'hypothèse (H_5) sont précisées ci-dessous :

$$\beta_{NW} = \arctan \underbrace{\left(\frac{V_y + d_{NW} \cdot r}{V_x} \right)}_{\tilde{\beta}_{NW}} - \theta_{NW} \quad (6.14)$$

$$\beta_{MG} = \arctan \underbrace{\left(\frac{V_y - d_{MG} \cdot r}{V_x} \right)}_{\tilde{\beta}_{MG}} \quad (6.15)$$

Les paramètres d_{NW} et d_{MG} représentent les distances suivant l'axe du fuselage entre la roulette avant ou le train principal d'une part, et le centre de gravité de l'avion d'autre part. Enfin, les moments générés par les forces de friction sont définis par :

$$M_{z_s} = M_{z_{NW}} + M_{z_{MG}} \quad (6.16)$$

avec :

$$\begin{cases} M_{z_{NW}} = F_{y_{NW}}(\beta_{NW})d_{NW} \\ M_{z_{MG}} = -F_{y_{MG}}(\beta_{MG})d_{MG} \end{cases} \quad (6.17)$$

Actionneurs. Les manœuvres latérales réalisées par poussée ou freinage différentiels n'étant pas envisagées dans la suite de l'étude, il n'est pas nécessaire de disposer de modèles pour les moteurs et le système de freinage. Pour ce qui est de l'actionneur de la roulette avant décrit par la relation (6.4), les simulations réalisées montrent qu'il se comporte comme un système linéaire du premier ordre avec une constante de temps $\lambda^{-1} = 0.1$ s tant que la consigne θ_{NW_c} est suffisamment petite. Lorsque θ_{NW_c} augmente, des saturations en position $L_p = 74$ deg et en vitesse $L_r = 16.3$ deg/s apparaissent. Un petit retard τ et un offset constant $|\theta_0| \leq 1$ deg sur θ_{NW} sont également observés. L'actionneur de la roulette avant peut donc être représenté avec une très bonne précision par la relation :

$$\dot{\theta}_{NW}(t) = \text{sat}_{L_p}(\lambda(\text{sat}_{L_r}(\theta_{NW_c}(t - \tau)) - (\theta_{NW}(t) + \theta_0))) \quad (6.18)$$

En pratique, la saturation en position n'est jamais atteinte et peut être omise. D'autre part, le retard est représenté par un Padé d'ordre 1, ce qui conduit finalement au modèle d'actionneur simplifié suivant :

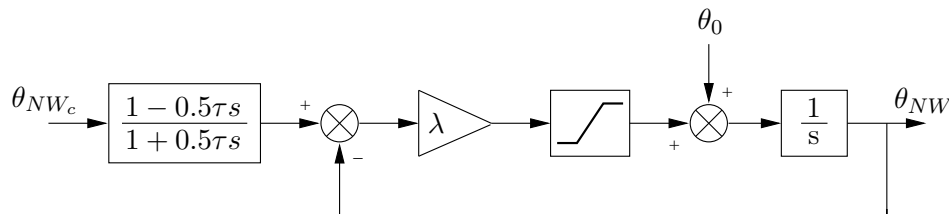


Figure 6.2 Modélisation simplifiée de l'actionneur de la roulette avant.

6.2.3 Obtention d'un modèle LPV

En combinant les équations simplifiées décrivant la dynamique latérale de l'avion et la répartition des forces et moments, on obtient le modèle LPV ci-dessous :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{V}_y \end{bmatrix} = A(\theta) \begin{bmatrix} r \\ V_y \end{bmatrix} + B_a(\theta) \begin{bmatrix} W_y \\ \delta_r \end{bmatrix} + B_s \begin{bmatrix} F_{y_{NW}} \\ F_{y_{MG}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{NW} \\ \tilde{\beta}_{MG} \end{bmatrix} = C_\beta(\theta) \begin{bmatrix} r \\ V_y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.19)$$

où $\theta = [V_a \ V_x]^T$ représente un vecteur de paramètres variants constitué de la vitesse aérodynamique et de la vitesse longitudinale de l'avion. Les matrices d'état A , B_a , B_s et C_β sont quant à elles définies par :

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -V_x & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho S V_a}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^2 C_{n_r}}{I_{zz}} & \frac{c C_{n_\beta}}{I_{zz}} \\ \frac{c C_{y_r}}{m} & \frac{C_{y_\beta}}{m} \end{bmatrix}; \quad B_a = \frac{\rho S V_a}{2} \begin{bmatrix} \frac{c C_{n_\beta}}{I_{zz}} & \frac{c V_a C_{n_\delta}}{I_{zz}} \\ \frac{C_{y_\beta}}{m} & \frac{V_a C_{y_\delta}}{m} \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} \frac{d_{NW}}{I_{zz}} & -\frac{d_{MG}}{I_{zz}} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}; \quad C_\beta = \frac{1}{V_x} \begin{bmatrix} d_{NW} & 1 \\ -d_{MG} & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 6.2.1 Les paramètres V_a et V_x ne sont pas indépendants et peuvent même coïncider en l'absence de vent.

6.3 Représentation des forces de friction

Dans le modèle LPV présenté au paragraphe 6.2.3, les forces de contact entre les roues et le sol sont considérées comme des entrées exogènes. L'étape suivante consiste à les décrire de manière adéquate en fonction des angles de dérapage β_{NW} et β_{MG} , et donc des variables $\tilde{\beta}_{NW}$, $\tilde{\beta}_{MG}$ et θ_{NW} par l'intermédiaire des relations (6.14) et (6.15). L'objectif est ainsi de faire le lien entre les équations (6.19) décrivant la dynamique de l'avion et l'équation (6.18) associée à l'actionneur de la roulette avant afin d'obtenir une représentation simplifiée du comportement latéral de l'avion au sol.

6.3.1 Modélisation initiale

Les composantes latérales $F_{y_{NW}}$ et $F_{y_{MG}}$ des forces de friction apparaissent lorsque l'avion est animé d'un mouvement de lacet ou lorsque sa vitesse n'est plus orientée dans le plan de symétrie des roues, par exemple en cas de dérapage ou de braquage de la roulette avant. Elles dépendent de nombreux paramètres et principalement des angles de dérapage locaux β_{NW} et β_{MG} , de la force verticale F_z et de l'état de la piste λ_{rwy} . Un exemple est présenté sur la figure 6.3.

Dans le modèle non-linéaire initial, les forces de friction latérales au niveau de la roulette avant ou du train principal sont modélisées à l'aide de la relation ci-dessous, dans laquelle les indices NW ou MG sont omis afin d'alléger les notations.

$$F_y(\beta, F_z, \lambda_{rwy}) = G(F_z) \beta \frac{\beta_{opt}^2(\lambda_{rwy})}{\beta_{opt}^2(\lambda_{rwy}) + \beta^2} \quad (6.20)$$

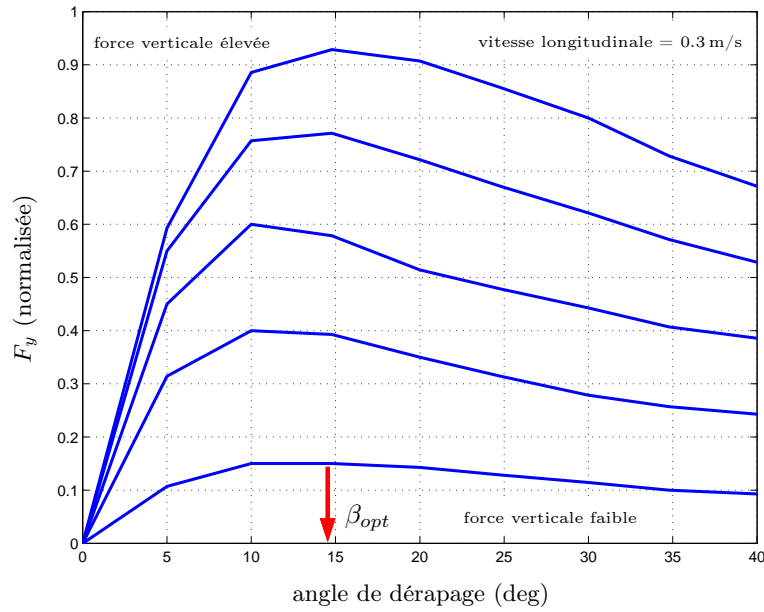


Figure 6.3 Variation de la composante latérale des forces de friction en fonction de l'angle de dérapage et dispersion en fonction de la force verticale.

Lorsque le dérapage reste faible, F_y dépend linéairement de β , la relation de proportionnalité étant matérialisée par le coefficient G , généralement désigné sous le nom de *cornering gain* et fonction de F_z . Lorsque β augmente, F_y finit par décroître après être passé par un maximum pour une valeur $\beta = \beta_{opt}$ dépendant de l'état de la piste. Ce dernier est représenté par un scalaire normalisé λ_{rwy} variant entre 0 (piste gelée) et 1 (piste sèche). Les fonctions non-linéaires $G(F_z)$ et $\beta_{opt}(\lambda_{rwy})$ sont identifiées à partir de tests réalisés par les fabricants de pneus.

La détermination d'un modèle simplifié de ces interactions entre les roues et la piste est réalisée en deux temps :

- Une procédure d'identification s'appuyant sur une technique d'inversion dynamique non-linéaire [Enns *et al.*, 1994] est proposée au paragraphe 6.3.2 afin de calculer les forces F_{yNW} et F_{yMG} qu'il faudrait injecter dans l'équation (6.19) pour que les états du modèle LPV coïncident avec les états du modèle non-linéaire initial.
- Une représentation simplifiée de ces forces est alors proposée au paragraphe 6.3.3.

6.3.2 Identification par inversion du modèle LPV

La procédure d'identification proposée repose sur l'inversion du modèle LPV décrit au paragraphe 6.2.3. Si l'on note $x_{LPV} = [r_{LPV} V_{yLPV}]^T$ le vecteur d'état de ce système et $u_a = [W_y \delta_r]^T$ les entrées aérodynamiques, l'équation (6.19) s'écrit :

$$\dot{x}_{LPV} = A(\theta)x_{LPV} + B_a(\theta)u_a + B_s \begin{bmatrix} F_{yNW} \\ F_{yMG} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Pour une manœuvre donnée, on connaît les entrées u_a et on peut déterminer par simulation du modèle non-linéaire initial le vecteur d'état $x_{NL} = [r_{NL} V_{yNL}]^T$ ainsi que les valeurs des paramètres longitudinaux V_a et V_x , dont on déduit les matrices A , B_a et B_s . Toutes ces grandeurs étant connues et la matrice B_s étant inversible, on constate que le signal

dérivé \dot{x}_{LPV} peut être entièrement contrôlé par un choix approprié de $F_{y_{NW}}$ et $F_{y_{MG}}$. Plus précisément, en injectant :

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{y_{NW}} \\ \hat{F}_{y_{MG}} \end{bmatrix} = B_s^{-1} [\alpha I - A(\theta) - B_a(\theta)] \begin{bmatrix} x_{NL} - x_{LPV} \\ x_{LPV} \\ u_a \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

dans la relation (6.21), on obtient :

$$\dot{x}_{LPV} = \alpha(x_{NL} - x_{LPV}) \quad (6.23)$$

On peut donc contraindre le vecteur d'état du modèle LPV à rester aussi proche qu'on le souhaite de celui du modèle non-linéaire à condition de choisir une valeur de α suffisamment élevée.

Plusieurs manœuvres réalisées à différentes vitesses et pour différentes valeurs de λ_{rwy} sont alors étudiées. Les forces $\hat{F}_{y_{NW}}$ et $\hat{F}_{y_{MG}}$ obtenues par la méthode d'identification ci-dessus sont représentées en traits pleins sur la figure 6.4.

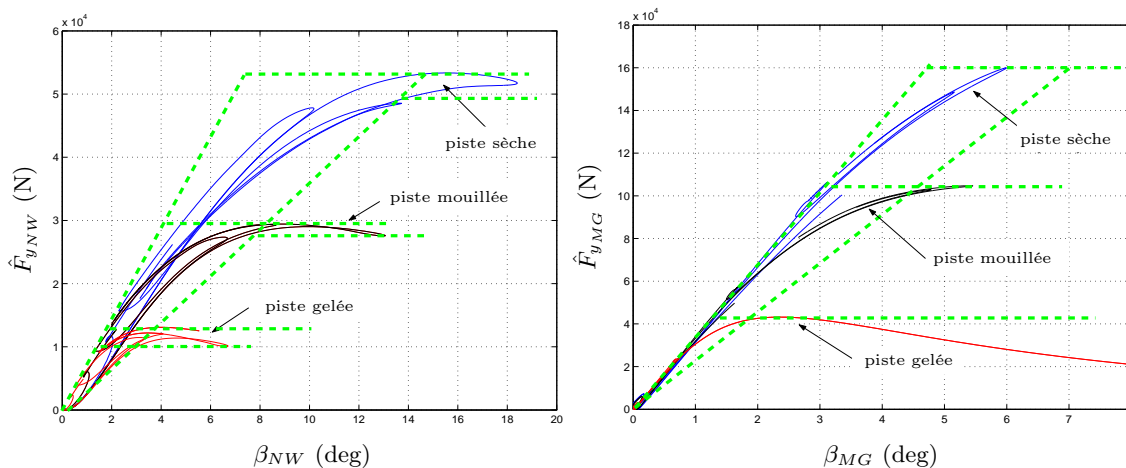


Figure 6.4 Identification des forces de friction et approximation par des fonctions saturation.

Leurs profils sont compatibles avec la relation (6.20). Le modèle LPV simplifié représente donc une bonne approximation du modèle initial, ce qui permet de valider les hypothèses énoncées au paragraphe 6.2.1.

6.3.3 Approximation par des non-linéarités de type saturation

On cherche maintenant à caractériser les forces de friction tracées sur la figure 6.4. Une démarche possible consiste à identifier des fonctions $G(F_z)$ et $\beta_{opt}(\lambda_{rwy})$ afin de se ramener à un modèle similaire à celui de l'équation (6.20). Un tel choix n'apparaît cependant pas judicieux dans la perspective d'obtenir une représentation simplifiée.

Une autre approche consiste à encadrer les faisceaux de courbes identifiées à l'aide de fonctions linéaires par morceaux, qui sont représentées en pointillés sur la figure 6.4. L'influence de la force verticale et de la vitesse n'est alors plus modélisée de manière explicite, mais est prise en compte par l'introduction d'incertitudes multiplicatives $\delta_{G_{NW}}(t)$ et $\delta_{G_{MG}}(t)$ sur les *cornering gains*. D'autre part, l'objectif des lois de commande étant

d'éviter que le dérapage devienne trop important, il n'apparaît pas nécessaire de disposer d'une estimation précise des forces latérales au-delà de β_{opt} . En se limitant aux angles inférieurs à cette valeur, on constate alors que les forces identifiées peuvent être représentées avec une bonne précision par des non-linéarités de type saturation. On obtient ainsi un modèle simple mais néanmoins représentatif de l'évolution réelle des forces de friction :

$$\begin{cases} F_{y_{NW}} \approx \text{sat}_{L_{NW}(\lambda_{rwy})} ((1 + \delta_{G_{NW}}(t))G_{NW_0} \beta_{NW}) \\ F_{y_{MG}} \approx \text{sat}_{L_{MG}(\lambda_{rwy})} ((1 + \delta_{G_{MG}}(t))G_{MG_0} \beta_{MG}) \end{cases} \quad (6.24)$$

où G_{NW_0} et G_{MG_0} représentent les valeurs nominales des *cornering gains*. Les niveaux de saturation L_{NW} et L_{MG} dépendent de l'état de la piste λ_{rwy} et correspondent aux valeurs maximales des forces obtenues respectivement pour des dérapages $\beta_{NW_{opt}}$ et $\beta_{MG_{opt}}$.

Remarque 6.3.1 *Le modèle (6.24) peut être affiné en introduisant des incertitudes sur les niveaux de saturation, ce qui permet de réduire les intervalles de variation de $\delta_{G_{NW}}(t)$ et $\delta_{G_{MG}}(t)$.*

6.4 Mise sous forme LFT

On dispose désormais d'un modèle latéral simplifié de l'avion au sol. La mise sous forme LFT peut alors être réalisée à l'aide de la LFR Toolbox pour Matlab [Magni, 2006; Hecker *et al.*, 2004].

6.4.1 Modèle aérodynamique

L'algorithme proposé par [Cockburn et Morton, 1997] et implanté dans la fonction *symtreed.m* de la LFR Toolbox est utilisé afin d'obtenir une représentation LFT de la dynamique latérale de l'avion. Il nécessite cependant de travailler avec des matrices dépendant de manière polynomiale des paramètres à isoler, et n'est donc pas applicable directement au modèle (6.19) qui fait intervenir l'inverse de la vitesse V_x . Une solution consiste à déclarer V_x et $invV_x$ comme deux variables symboliques indépendantes, ce qui conduit à une expression polynomiale en V_x , $invV_x$, V_a , δ_{C_n} et δ_{C_y} , ces deux derniers paramètres correspondant à des incertitudes multiplicatives LTI introduites sur les coefficients aérodynamiques C_n et C_y . Une fois l'algorithme exécuté, une LFT symbolique d'ordre réduit est obtenue et les deux opérations ci-dessous sont finalement effectuées :

- les variables V_a et V_x sont normalisées, *i.e.* $V_a = \lambda_V V_{a_n} + V_0$ et $V_x = \lambda_V V_{x_n} + V_0$, où V_0 représente la valeur moyenne de V_a et V_x , de telle sorte que $V_{a_n} \in [-1, 1]$ et $V_{x_n} \in [-1, 1]$ correspondent respectivement à $V_a \in [5, 150 \text{ kts}]$ et $V_x \in [5, 150 \text{ kts}]$,
- la variable $invV_x$ est définie explicitement comme l'inverse de V_x .

Le modèle LFT de la dynamique latérale de l'avion est alors directement obtenu à l'aide de la fonction surchargée *eval.m*. Il est représenté sur la figure 6.5, et comporte 2 états (r et V_y), quatre entrées (W_y , δ_{r_c} , $F_{y_{NW}}$, $F_{y_{MG}}$) et quatre sorties (r , V_y , $\tilde{\beta}_{NW}$, $\tilde{\beta}_{MG}$).

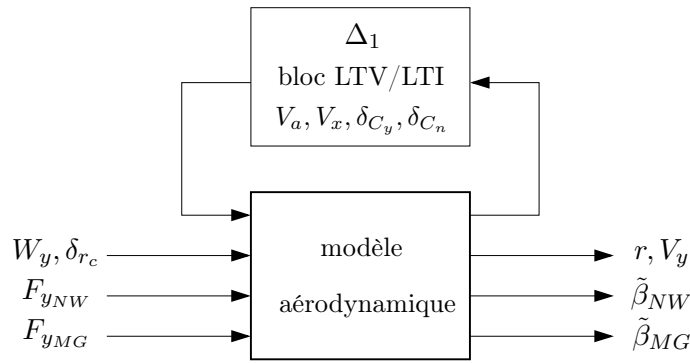


Figure 6.5 Représentation LFT du modèle aérodynamique.

Le bloc Δ associé est de taille 8×8 et est structuré de la manière suivante :

$$\Delta_1 = \text{diag}(\Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \quad (6.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{TV} = \text{diag}(V_{a_n}(t).I_3, V_{x_n}(t).I_3) \\ \Delta_{TI} = \text{diag}(\delta_{C_y}, \delta_{C_n}) \end{cases} \quad (6.26)$$

Remarque 6.4.1 Une méthode numérique classique utilisant la fonction `abcd2lfr.m` de la LFR Toolbox suivie d'une étape de réduction réalisée à l'aide de la fonction `minlfr.m` [D'Andrea et Khatri, 1997] peut également être mise en œuvre. Elle se révèle cependant moins efficace que l'approche symbolique décrite précédemment car elle conduit à un bloc Δ_1 de taille 11×11 .

6.4.2 Forces de friction

La fonction `lfr.m` de la LFR Toolbox permet de définir les saturations $\text{sat}_{L_{NW}}$ et $\text{sat}_{L_{MG}}$ ainsi que les incertitudes $\delta_{G_{NW}}(t)$ et $\delta_{G_{MG}}(t)$ sous forme d'objets LFT élémentaires. Les représentations LFT des forces de friction $F_{y_{NW}}$ et $F_{y_{MG}}$ sont alors construites en connectant ces différents éléments conformément à l'équation (6.24) puis concaténées à l'aide de la fonction surchargée `append.m`. La LFT finalement obtenue est représentée sur la figure 6.6.

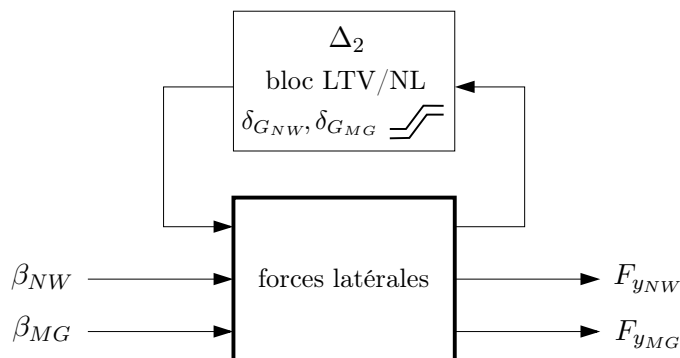


Figure 6.6 Représentation LFT des forces de friction latérales.

Le bloc Δ est constitué de deux saturations et de deux paramètres variants non répétés :

$$\Delta_2 = \text{diag}(\Delta_{NL}, \Delta_{TV}) \quad (6.27)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{NL} = \text{diag}(\text{sat}_{L_{NW}}, \text{sat}_{L_{MG}}) \\ \Delta_{TV} = \text{diag}(\delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t)) \end{cases} \quad (6.28)$$

Il reste alors à déterminer une représentation LFT de la fonction arctan, introduite dans les relations (6.14) et (6.15) afin de calculer les angles de dérapage β_{NW} et β_{MG} . Des simulations temporelles réalisées sur le modèle non-linéaire initial révèlent que l'angle β_{MG} au niveau du train principal ne dépasse jamais 10 deg, ce qui justifie l'approximation :

$$\beta_{MG} = \arctan(\tilde{\beta}_{MG}) \approx \tilde{\beta}_{MG} \quad (6.29)$$

Seule la fonction arctan associée à l'angle β_{NW} doit donc être prise en compte. Pour couvrir l'ensemble des scénarios étudiés, l'approximation proposée doit être valable tant que $|\tilde{\beta}_{NW}| \leq 1.2$, ce qui correspond à des angles de dérapage β_{NW} pouvant atteindre 50 deg. Comme le montre la figure 6.7, un tel objectif peut être atteint avec un niveau de précision inférieur à 5% à l'aide d'une simple fonction linéaire par morceaux :

$$\begin{cases} |x| \leq 0.4 \rightarrow f(x) = x \\ |x| \geq 0.4 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{15} \text{signe}(x) \end{cases} \quad (6.30)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{15} \text{sat}_{L_a} \left(\frac{x}{0.4} \right) \quad (6.31)$$

où $\text{sat}_{L_a}(\cdot)$ représente une saturation normalisée ($L_a = 1$).

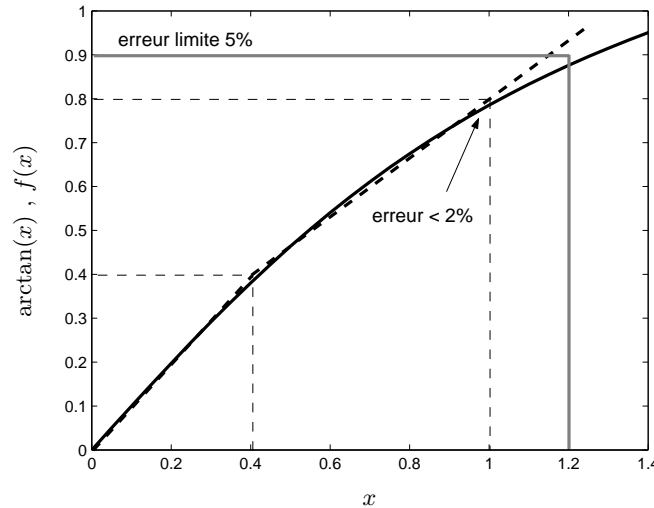


Figure 6.7 Approximation de la fonction arctan.

La fonction arctan peut ainsi être décrite de manière très précise à l'aide d'un objet LFT dont le bloc Δ est constitué d'une unique saturation.

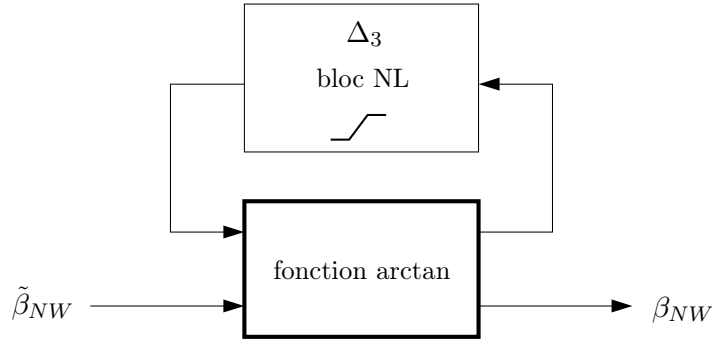


Figure 6.8 Représentation LFT de la fonction arctan.

6.4.3 Actionneur de la roulette avant

La mise sous forme LFT du modèle simplifié de l'actionneur agissant sur la roulette avant est immédiate à partir du schéma de la figure 6.2. Le retard τ étant peu important, on supprime le Padé afin d'obtenir la représentation la plus simple possible.

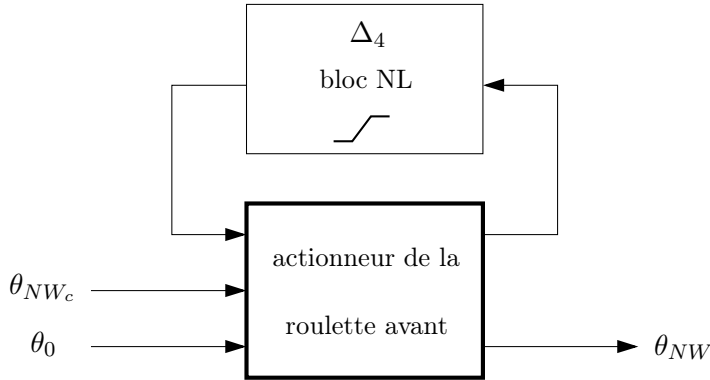


Figure 6.9 Représentation LFT de l'actionneur de la roulette avant.

6.4.4 Création de l'interconnexion complète

La dernière étape conduisant à l'obtention d'un modèle LFT complet consiste à connecter les différents éléments représentés sur les figures 6.5 à 6.9, en notant que toute interconnexion linéaire de LFT est elle-même une LFT. Elle peut être réalisée aisément à l'aide d'outils complémentaires à la LFR Toolbox permettant de créer et de simuler des interconnexions de LFT sous Simulink [Biannic et Döll, 2006; Biannic *et al.*, 2006a]. Le résultat est présenté sur la figure 6.10. Le modèle complet comporte trois états (r, V_y, θ_{NW}) , quatre entrées $(\theta_{NW_c}, \delta_{r_c}, W_y, \theta_0)$ et deux sorties (r, V_y) . Le bloc Δ associé est obtenu par concaténation des blocs Δ_1 à Δ_4 . Il est de taille 14×14 et est structuré de la manière suivante :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{NL}, \Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \quad (6.32)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{NL} = \text{diag}(\text{sat}_{L_r}, \text{sat}_{L_a}, \text{sat}_{L_{NW}}, \text{sat}_{L_{MG}}) \\ \Delta_{TV} = \text{diag}(V_{a_n}(t) \cdot I_3, V_{x_n}(t) \cdot I_3, \delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t)) \\ \Delta_{TI} = \text{diag}(\delta_{C_y}, \delta_{C_n}) \end{cases} \quad (6.33)$$

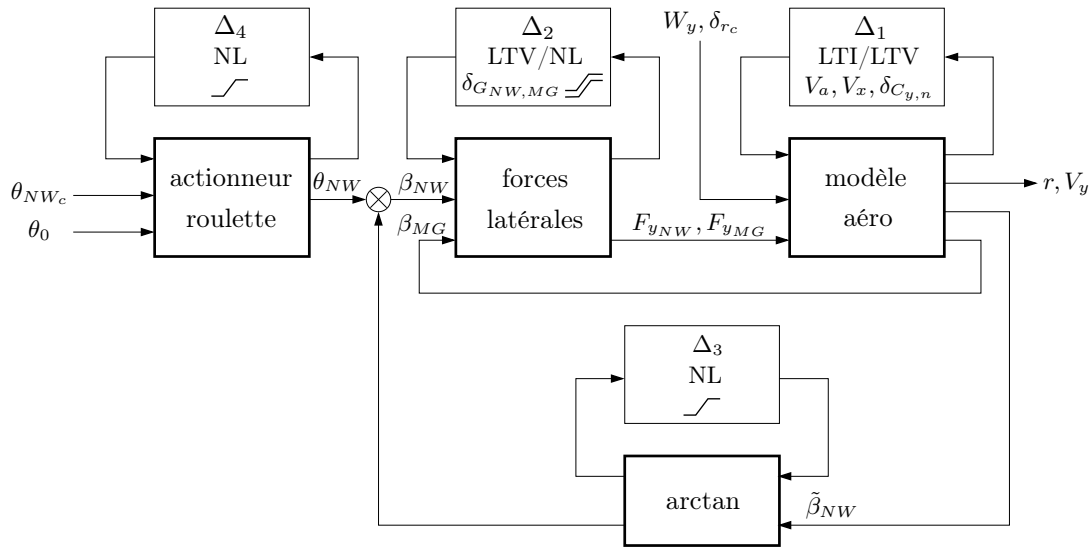


Figure 6.10 Interconnexion des différentes représentations LFT.

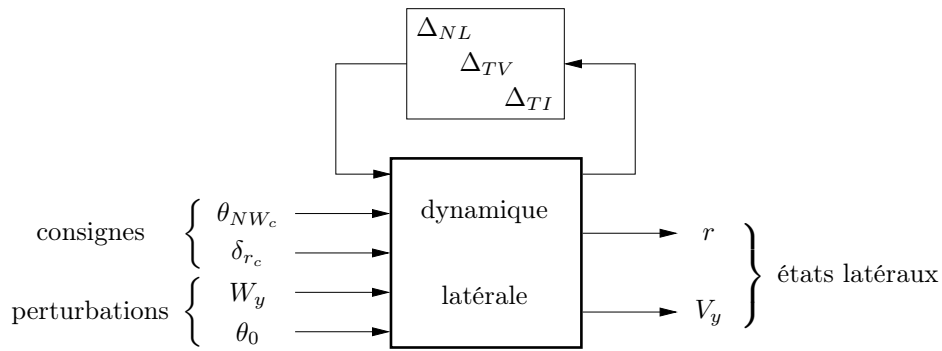


Figure 6.11 Représentation LFT de la dynamique latérale de l'avion au sol.

6.5 Simulations temporelles et validation

De nombreuses simulations ont été réalisées afin de valider les modélisations simplifiées des forces aérodynamiques et des forces de friction. Dans un souci de concision, on se limite ici aux deux manœuvres spécifiques détaillées ci-dessous :

- manœuvre 1 (basse vitesse) : la vitesse longitudinale reste inférieure à 20 kts et des échelons de consigne importants sont envoyés à la roulette avant (40 deg sur piste sèche et 20 deg sur piste mouillée).
- manœuvre 2 (haute vitesse) : la poussée moteur maximale est appliquée jusqu'à atteindre une vitesse de 140 kts, et des consignes de type double créneau sont envoyées à la roulette avant (± 2 deg) puis à la dérive (± 5 deg) lors de la phase d'accélération.

Quelques simulations temporelles sont présentées sur les figures 6.12 à 6.14. Les traits pleins et les pointillés correspondent respectivement au modèle LFT simplifié et au modèle non-linéaire initial.

Remarque 6.5.1 Comme on ne dispose pas ici d'une représentation LFT de la dynamique longitudinale de l'avion, les valeurs de V_a et V_x mesurées sur le modèle non-linéaire sont directement injectées dans le modèle LFT latéral afin de pouvoir évaluer le bloc Δ .

6.5.1 Manœuvre basse vitesse

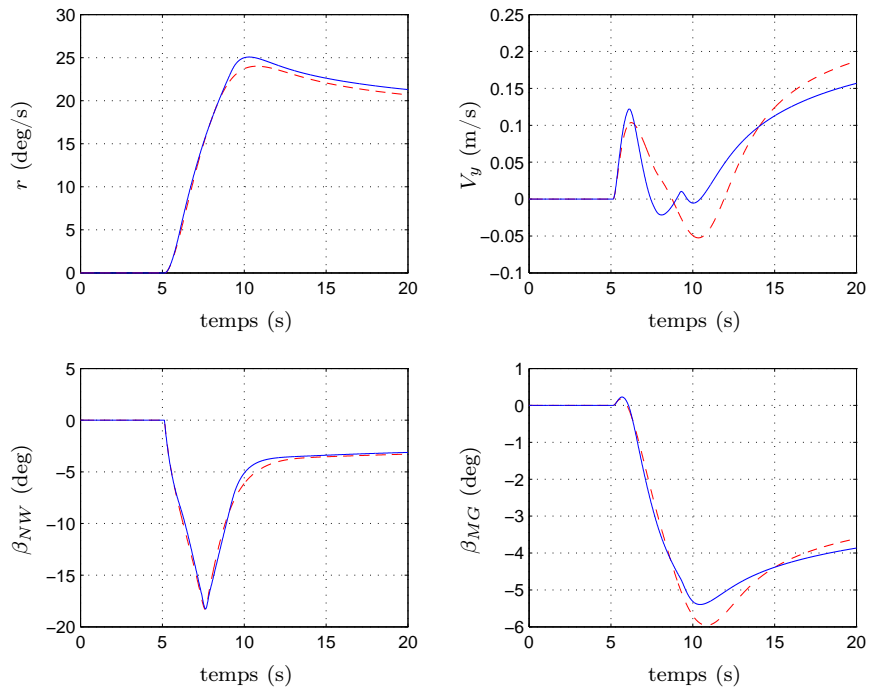


Figure 6.12 Manœuvre 1 réalisée sur piste sèche.

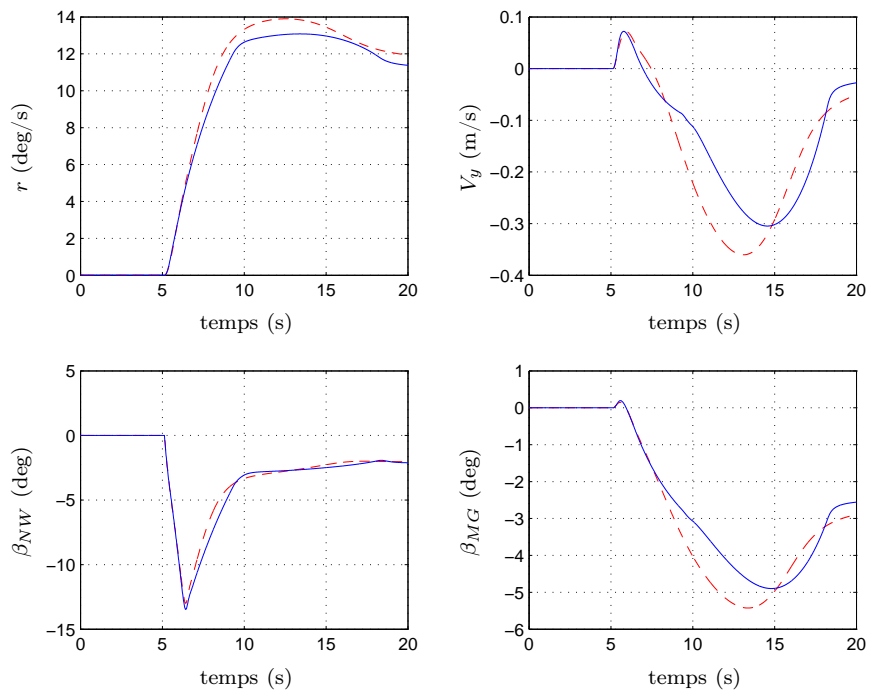


Figure 6.13 Manœuvre 1 réalisée sur piste mouillée.

6.5.2 Manœuvre haute vitesse

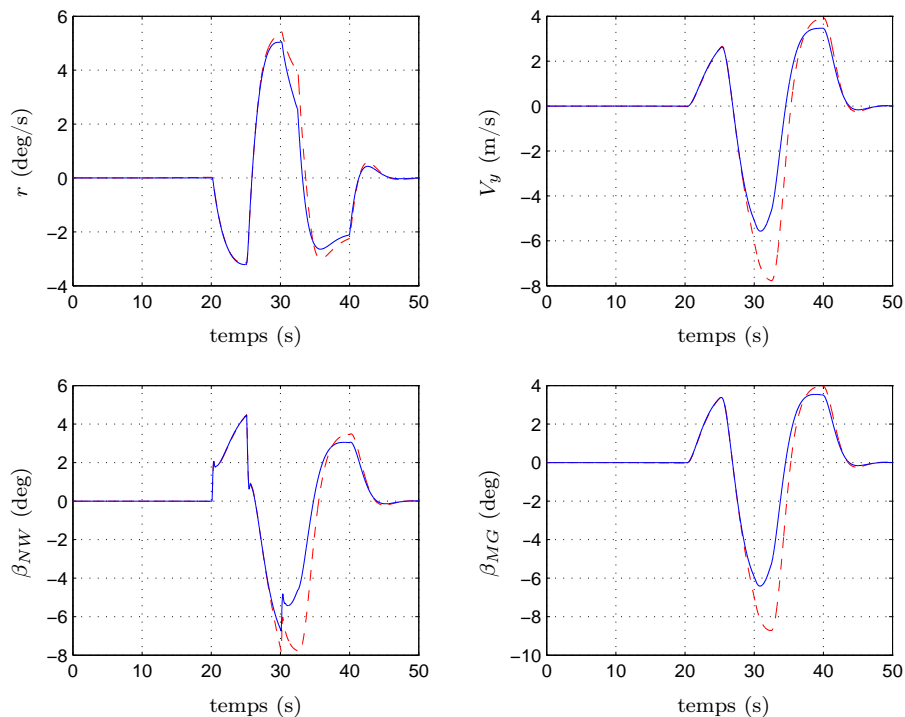


Figure 6.14 Manœuvre 2 réalisée sur piste sèche.

Dans tous les cas, le modèle LFT simplifié a un comportement très proche de celui du modèle initial, notamment en ce qui concerne la vitesse de lacet r . Il est donc particulièrement bien adapté dans l'optique :

- de synthétiser des lois de commande latérales performantes (chapitre 7),
- de réaliser une analyse de robustesse en présence de saturations multiples, d'incertitudes de modèle et de perturbations extérieures (chapitre 8).

Conclusion

Une méthodologie complète est décrite dans ce chapitre afin de modéliser la dynamique latérale de l'avion au sol. Elle est mise en œuvre sur un modèle non-linéaire parfaitement représentatif du comportement de l'avion mais difficilement exploitable en raison de sa complexité, et conduit à l'obtention d'un modèle LFT très simplifié compatible avec les outils d'analyse de robustesse et de synthèse de lois de commande développés dans les parties I et II. Une procédure d'identification s'appuyant sur une technique d'inversion dynamique non-linéaire est notamment proposée. Elle est appliquée avec succès à la détermination des forces de friction latérales entre les roues et la piste, qui sont alors modélisées avec une bonne précision par des fonctions saturation. Les résultats sont concluants, car le comportement du modèle LFT simplifié est très proche de celui du modèle non-linéaire complet sur un vaste domaine opérationnel. De plus, la présence de non-linéarités de type saturation, mais également d'incertitudes et de paramètres variants, suggère une procédure

de synthèse en deux étapes :

- synthétiser un correcteur anti-windup à paramètres variants sur le modèle LFT nominal et l'implanter sur le modèle non-linéaire complet,
- analyser la robustesse du système en boucle fermée aux incertitudes mixtes LTI/LTV qui affectent le modèle afin de valider le schéma de synthèse proposé.

Ces deux étapes sont abordées respectivement dans les chapitres 7 et 8.

Notations

LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
NL	Non-Linéaire
$V = [V_x, V_y, V_z]$	Vitesse linéaire du centre de gravité, m/s
$\Omega = [p, q, r]$	Vitesse angulaire (roulis, tangage et lacet), m/s
$F = [F_x, F_y, F_z]$	Résultante des forces, N
$M = [M_x, M_y, M_z]$	Somme des moments, $N.m$
m	Masse de l'avion, kg
I	Matrice d'inertie de l'avion, $kg.m^2$
ρ	Masse volumique de l'air, kg/m^3
S	Surface de référence, m^2
c	Longueur de référence, m
C_x, C_y, C_z, C_n	Coefficients aérodynamiques
β_a	Angle de dérapage aérodynamique, rad
V_a	Vitesse aérodynamique, m/s
W_y	Vent latéral, m/s
d_x	Distance entre le centre de gravité et les roues, m
β_x	Angle de dérapage local, rad
x_{LPV}, x_{NL}	Etat du modèle LPV, du modèle non-linéaire
F_{y_x}, \hat{F}_{y_x}	Force latérale, force latérale identifiée, N
G_x, G_{x0}	Cornering gain, cornering gain nominal, N/rad
λ_{rwy}	Etat de la piste (sèche, mouillée, gelée)
L_x, L_r, L_p, L_a	Niveaux de saturation
$\theta_{NW}, \theta_{NWc}$	Position angulaire de la roulette avant, rad
θ_0	Offset sur la position angulaire de la roulette avant, rad
δ_r, δ_{rc}	Braquage de la dérive, rad

Dans les notations ci-dessus, le symbole \times vaut NW ou MG selon que le paramètre considéré est associé à la roulette avant ou au train principal. L'indice c désigne quant à lui un signal de référence (ou consigne).

Références

- [Bakker *et al.*, 1987] E. Bakker, L. Nyborg et H.B. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicule dynamic studies. Dans *Proceedings of the SAE International Congress and Expo*, paper 870421, Detroit, USA, Février 1987.
- [Barnes et Yager, 1998] A.G. Barnes et T.J. Yager. Enhancement of aircraft ground handling simulation capability. *Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDograph 333*, 1998.

- [Biannic *et al.*, 2006a] J-M. Biannic, C. Döll et J-F. Magni. Simulink-based tools for creating and simulating interconnected LFR objects. Dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 1922–1927, Munich, Allemagne, Octobre 2006.
- [Biannic *et al.*, 2006b] J-M. Biannic, A. Marcos, M. Jeanneau et C. Roos. Nonlinear simplified LFT modelling of an aircraft on ground. Dans *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2213–2218, Munich, Allemagne, Octobre 2006.
- [Biannic *et al.*, 2007] J-M. Biannic, A. Marcos, D.G. Bates et I. Postlethwaite. Chapter 6: Nonlinear LFT modelling for on-ground aircraft transport. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 93–115. Springer-Verlag, 2007.
- [Biannic et Döll, 2006] J-M. Biannic et C. Döll. Simulink handling of LFR objects. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Biannic/mypage.html>*, 2006.
- [Clot *et al.*, 1998] J. Clot, J. Falipou, T. Sentenac, P. Pebayle, F. Lorenzi et S. Marchand. Systèmes d'alarme et de sécurité active pour la conduite automobile. *Rapport technique LAAS-CNRS n° 98441*, 1998.
- [Cockburn et Morton, 1997] J.C. Cockburn et B.G. Morton. Linear fractional representations of uncertain systems. *Automatica*, 33(7): 1263–1271, 1997.
- [D'Andrea et Khatri, 1997] R. D'Andrea et S. Khatri. Kalman decomposition of Linear Fractional Transformations and minimality. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3557–3561, Albuquerque, USA, Juin 1997.
- [Enns *et al.*, 1994] D. Enns, D. Bugajski, R. Hendrick et G. Stein. Dynamic inversion: an evolving methodology for flight control design. *International Journal of Control*, 59(1): 71–91, 1994.
- [Hecker *et al.*, 2004] S. Hecker, A. Varga et J-F. Magni. Enhanced LFR Toolbox for Matlab. Dans *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 25–29, Taipei, Taiwan, Septembre 2004.
- [Jeanneau, 2007] M. Jeanneau. Chapter 1: The Airbus on-ground transport aircraft benchmark. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 3–24. Springer-Verlag, 2007.
- [Lavergne *et al.*, 2004] F. Lavergne, F. Mora Camino, F. Villaumé et M. Jeanneau. Neural networks contribution to modeling for flight control. Dans *Proceedings of the World Aviation Congress*, Reno, USA, Novembre 2004.
- [Magni, 2006] J-F. Magni. Linear Fractional Representation Toolbox (version 2.0) for use with Matlab. *Disponible à l'adresse <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Magni/>*, 2006.
- [Marcos *et al.*, 2005a] A. Marcos, D.G. Bates et I. Postlethwaite. Exact nonlinear modelling using symbolic Linear Fractional Transformations. Dans *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, Juillet 2005.
- [Marcos *et al.*, 2005b] A. Marcos, D.G. Bates et I. Postlethwaite. A multivariate polynomial matrix order reduction algorithm for Linear Fractional Transformation modelling. Dans *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, Juillet 2005.
- [Marcos *et al.*, 2006] A. Marcos, J-M. Biannic, M. Jeanneau, D. G. Bates et I. Postlethwaite. Aircraft modelling for nonlinear and robust control design and analysis. Dans *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Juillet 2006.

Chapitre 7

SYNTHÈSE ANTI-WINDUP APPLIQUÉE AU CONTRÔLE LATÉRAL D'UN AVION AU SOL

Résumé : Une technique de synthèse anti-windup est proposée pour assurer le contrôle en vitesse de lacet et en cap d'un avion de transport civil lors de la phase de roulage au sol. Pour cela, un correcteur à paramètres variants est synthétisé sur un modèle LFT simplifié de la dynamique latérale. Il est ensuite implanté sur un modèle complet développé dans un contexte industriel grâce à une estimation en ligne des forces de friction latérales. De nombreuses simulations attestent l'efficacité du correcteur adaptatif ainsi obtenu.

Mots clés : contrôle de l'avion au sol, systèmes à paramètres variants, synthèse anti-windup, estimation des niveaux de saturation, implantation d'un correcteur LFT.

Sommaire

7.1	Formulation du problème de synthèse anti-windup	144
7.1.1	Objectifs de la synthèse	144
7.1.2	Structure du correcteur proposé	145
7.2	Synthèse anti-windup sur le modèle LFT simplifié	146
7.2.1	Représentation LFT en boucle ouverte de l'avion au sol	146
7.2.2	Boucle de pilotage	147
7.2.3	Boucle de guidage	148
7.3	Implantation sur le modèle non-linéaire complet	149
7.3.1	Estimation en ligne des niveaux de saturation	149
7.3.2	Intégration du correcteur LFT adaptatif	150
7.4	Simulations temporelles et validation	151
7.4.1	Intérêt d'une approche multidimensionnelle	151
7.4.2	Robustesse à une variation de la force verticale	152
7.4.3	Adaptation à l'état de la piste	152
7.4.4	Réalisation de manœuvres de référence	153

Bibliographie

- [1] C. Roos et J-M. Biannic. Aircraft-on-ground lateral control by an adaptive LFT-based anti-windup approach. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2207-2212, Munich, Allemagne, octobre 2006.
- [2] C. Roos, J-M. Biannic, S. Tarbouriech et C. Prieur. Chapter 7: On-ground aircraft control design using an LPV anti-windup approach. *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 117-145. Springer-Verlag, 2007.

Confrontés à des exigences économiques et de sécurité croissantes, les constructeurs aéronautiques accordent de plus en plus d'importance à l'automatisation des phases de roulage pour les avions de transport civils. Les enjeux consistent à réduire la charge de travail du pilote, à optimiser les trajectoires sur la piste, et à plus grande échelle à réduire l'engorgement des aéroports. Malheureusement, le contrôle de l'avion au sol n'est pas un problème aisé : les techniques classiques d'automatique linéaire ne peuvent en effet pas être directement appliquées en raison des interactions entre les roues et le sol, qui présentent un comportement fortement non-linéaire.

Une première approche fondée sur une technique d'inversion dynamique non-linéaire a été envisagée par [Duprez *et al.*, 2004; Duprez, 2004], puis plus récemment par [Looye, 2007]. Une solution alternative est proposée dans ce chapitre, qui s'appuie sur la représentation LFT simplifiée de la dynamique latérale de l'avion au sol développée au chapitre 6. Cette dernière repose sur une modélisation pertinente des forces de friction latérales à l'aide de non-linéarités de type saturation, ce qui suggère de recourir à des techniques anti-windup. Une application originale des méthodes développées au chapitre 5 est donc proposée, qui conduit à la synthèse d'un correcteur anti-windup à paramètres variants dépendant de la vitesse longitudinale de l'avion.

L'étape suivante consiste à réaliser l'intégration de ce correcteur sur la représentation non-linéaire complète de l'avion au sol décrite au paragraphe 6.1 afin de valider le schéma de commande proposé sur un modèle industriel très représentatif du comportement de l'avion réel. La principale difficulté réside alors dans le fait que les niveaux de saturation introduits dans le modèle LFT simplifié ne sont pas directement accessibles lorsque l'on considère le modèle complet. En outre, ils sont liés à la valeur des forces de friction latérales, dont les caractéristiques dépendent fortement de l'état de la piste et de la force verticale. Dans ce contexte, la seconde contribution de ce chapitre consiste à montrer que ces niveaux de saturation peuvent être identifiés en ligne à l'aide d'un estimateur qui admet une représentation LFT. Il en résulte finalement un correcteur adaptatif facilement implantable dans un calculateur en vue d'une possible utilisation sur un avion réel.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Les objectifs de synthèse sont présentés au paragraphe 7.1. Un correcteur anti-windup à paramètres variants est alors déterminé au paragraphe 7.2 à partir de la représentation LFT du système en boucle ouverte, puis implanté sur le modèle non-linéaire complet au paragraphe 7.3 grâce à un estimateur des forces de friction latérales. De nombreuses simulations temporelles sont finalement réalisées au paragraphe 7.4. Elles permettent de valider la méthode de synthèse proposée et de mettre en évidence le gain significatif de performance lié au choix d'une approche anti-windup.

7.1 Formulation du problème de synthèse anti-windup

7.1.1 Objectifs de la synthèse

On cherche à synthétiser des lois de commande pour contrôler la dynamique latérale d'un avion de transport au cours de la phase de roulage. Deux types de manœuvres peuvent être envisagés :

- les manœuvres réalisées sur la piste principale ont pour but de contrer l'effet du vent latéral afin de maintenir une trajectoire rectiligne lors de la décélération,

- les manœuvres réalisées sur les pistes de déroulement sont exécutées à des vitesses inférieures à 40 kts et consistent à conduire l'avion de la piste principale jusqu'à son point de stationnement.

Seules ces dernières sont étudiées dans ce chapitre, et le problème de synthèse que l'on cherche à résoudre peut alors se résumer de la manière suivante.

Objectifs de la synthèse. Déterminer un correcteur éventuellement non-linéaire permettant d'asservir la vitesse de lacet r et le cap ψ :

- avec un temps de réponse aussi faible que possible,
- sans dépassement de la consigne (principalement en cap),
- quel que soit l'état de la piste (sèche, mouillée, gelée),
- pour toute variation de la vitesse longitudinale V_x entre 5 et 40 kts.

Le scénario de référence suggéré par [Jeanneau, 2007] et décrit sur la figure 7.1 est utilisé pour valider le schéma de commande proposé.

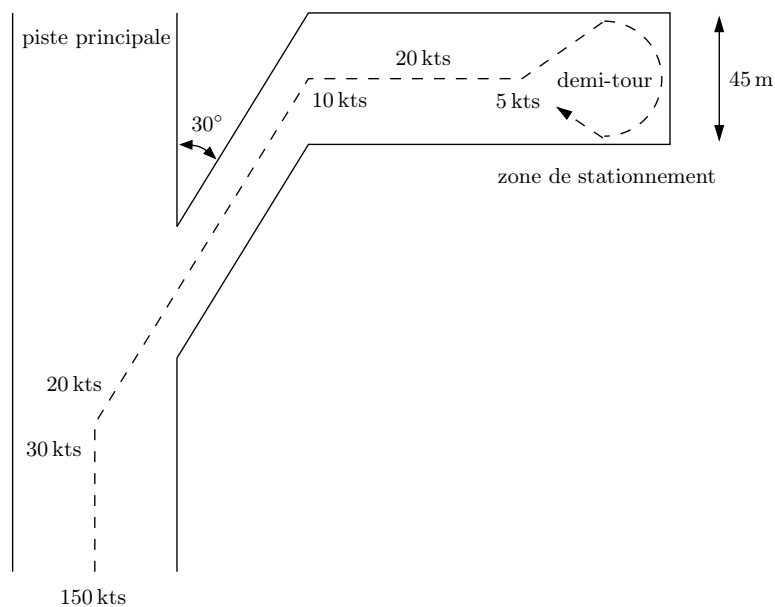


Figure 7.1 Scénario de référence.

Une attention particulière est notamment accordée aux trois séquences ci-dessous :

- *séquence 1* : sortir de la piste principale en réalisant un virage de 30 deg tout en décélérant de 30 kts à 20 kts.
- *séquence 2* : réaliser un virage de 60 deg à une vitesse de 10 kts.
- *séquence 3* : faire demi-tour à une vitesse de 5 kts sur une piste de 45 m de large.

7.1.2 Structure du correcteur proposé

La forte variation des forces de friction latérales en fonction de l'état de la piste constatée sur la figure 6.4 laisse à penser que l'application de techniques linéaires classiques de commande robuste se révélerait fortement conservatrice. Les saturations introduites au chapitre 6 lors de la modélisation LFT de l'avion au sol suggèrent au contraire de privilégier une approche anti-windup.

Une procédure de synthèse en deux étapes est ainsi proposée. Un correcteur nominal dépendant de la vitesse longitudinale V_x est tout d'abord déterminé afin de garantir de bonnes propriétés de stabilité et de performance en l'absence de saturation. Il est constitué d'une boucle interne permettant de contrôler la vitesse de lacet et d'une boucle externe assurant le maintien du cap. Un correcteur anti-windup lui aussi fonction de V_x est alors calculé à l'aide des outils développés dans la partie II. Il agit sur le correcteur nominal afin de réduire les effets négatifs des saturations. La synthèse de ces correcteurs sur la représentation LFT simplifiée de l'avion au sol et leur implantation sur le modèle non-linéaire complet sont détaillées dans les paragraphes 7.2 et 7.3.

7.2 Synthèse anti-windup sur le modèle LFT simplifié

7.2.1 Représentation LFT en boucle ouverte de l'avion au sol

La représentation LFT de la dynamique latérale de l'avion au sol proposée au chapitre 6 peut être simplifiée au vu des objectifs de synthèse énoncés précédemment :

- Seules les manœuvres réalisées à des vitesses inférieures à 40 kts sont considérées, pour lesquelles les effets aérodynamiques sont faibles et la dérive se révèle peu efficace. On suppose ainsi que l'avion est uniquement contrôlé à l'aide de la roulette avant, ce qui permet de supprimer l'entrée δ_r .
- Le modèle aérodynamique initial n'est pas adapté à la prise en compte du vent latéral lorsque la vitesse de l'avion est inférieure à 70 kts. L'entrée W_y est donc elle aussi supprimée et on admet alors que $V_a = V_x$.
- Les incertitudes paramétriques sur les *cornering gains* et les coefficients aérodynamiques sont ignorées lors de la phase de synthèse, et une analyse de robustesse est réalisée *a posteriori* au chapitre 8.

On obtient finalement un modèle en boucle ouverte de complexité tout à fait raisonnable qui comporte trois états (r, V_y, θ_{NW}), une unique entrée (θ_{NW_c}) et une unique sortie (r).

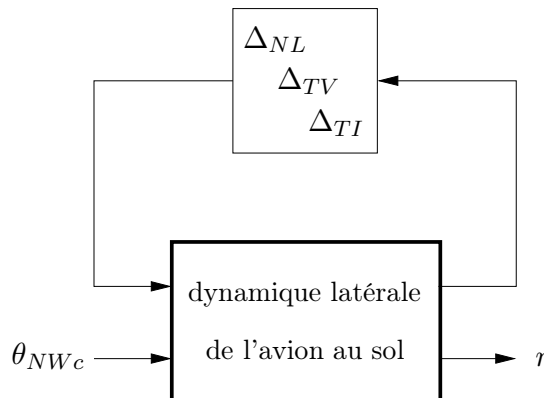


Figure 7.2 Représentation LFT simplifiée de la dynamique latérale de l'avion au sol.

Le bloc Δ associé est de taille 8×8 et est structuré de la manière suivante :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{NL}, \Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \quad (7.1)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{NL} = \text{diag}(\text{sat}_{L_r}, \text{sat}_{L_a}, \text{sat}_{L_{NW}}, \text{sat}_{L_{MG}}) \\ \Delta_{TV} = V_x(t).I_4 \\ \Delta_{TI} = \emptyset \end{cases} \quad (7.2)$$

Les techniques anti-windup proposées au chapitre 5 peuvent alors être appliquées à la représentation LFT simplifiée de la figure 7.2 afin de synthétiser un correcteur conforme aux spécifications du paragraphe 7.1.1.

7.2.2 Boucle de pilotage

On s'intéresse tout d'abord à la boucle de pilotage, également appelée boucle interne, qui assure le contrôle de la vitesse de lacet. Les saturations sont pour le moment ignorées et un correcteur nominal $K_r(s)$ de type PI est synthétisé par une technique modale à l'aide de la LFR Toolbox pour Matlab. Le système en boucle fermée ainsi obtenu est représenté sur la figure 7.3. Il se comporte comme un système du second ordre bien amorti dont la pulsation ω_r est égale à 2.15 rad/s quelle que soit la valeur de V_x entre 5 kts et 40 kts. Le gain K admet une représentation LFT rationnelle d'ordre 3 en V_x , qui correspond à l'ordre minimum permettant de garantir que ω_r reste constante sur tout l'intervalle de fréquences considéré. Une précommande constante H_r vient compléter le dispositif.

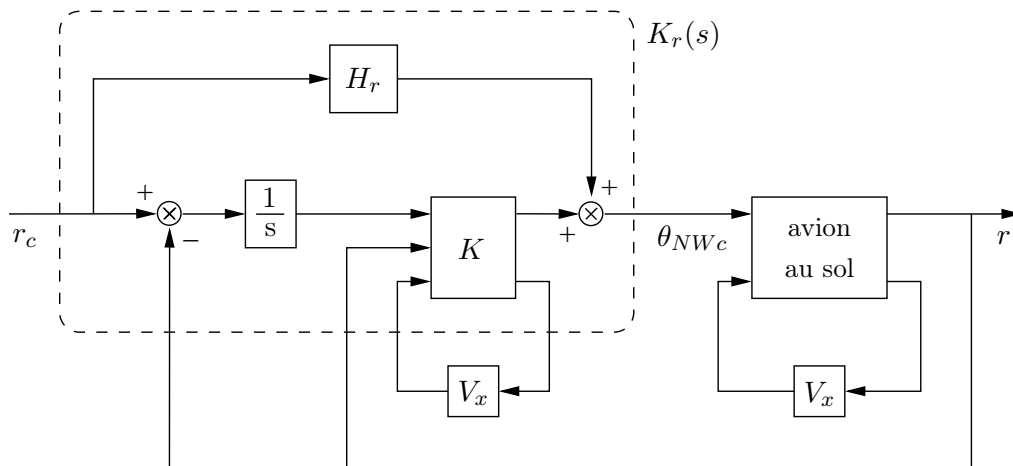


Figure 7.3 Structure du correcteur PI à paramètres variables.

Un tel correcteur assure que l'erreur statique est nulle. Par contre, un dépassement important est observé dans le régime transitoire lorsque les saturations sont actives, comme le montre la courbe en pointillés sur la figure 7.9. Un moyen d'éliminer ce dépassement consiste à réduire fortement la pulsation ω_r du correcteur PI, mais cela conduit à des temps de réponse inacceptables. Une solution bien plus pertinente est apportée par l'introduction d'un correcteur anti-windup dépendant de V_x qui permet d'atténuer l'impact des saturations. Plusieurs correcteurs statiques et dynamiques sont ainsi synthétisés à l'aide des méthodes décrites dans le chapitre 5 pour différents états de la piste, *i.e.* pour différentes valeurs des niveaux de saturation associés aux forces de friction latérales (voir figure 6.4).

Il en ressort les conclusions suivantes :

- un correcteur statique permet de satisfaire les objectifs de synthèse,
- une compensation anti-windup agissant sur $sat_{L_{MG}}$ ou sat_{L_a} n'apporte pas d'amélioration significative,
- les gains obtenus varient peu en fonction de l'état de la piste.

Une simple matrice statique J_r fonction de V_x , optimisée pour une piste mouillée et agissant simultanément sur sat_{L_r} et $sat_{L_{NW}}$ se révèle donc être un bon compromis. La représentation LFT associée est d'ordre 4 en V_x .

7.2.3 Boucle de guidage

Les consignes en vitesse de lacet r_c peuvent être directement envoyées à la boucle interne par le pilote. Elles peuvent aussi être déterminées par un pilote automatique chargé de contrôler le cap de l'avion par l'intermédiaire d'une boucle de guidage. Cette dernière, également appelée boucle externe, est construite suivant le même principe que la boucle de pilotage. Le correcteur nominal $K_\psi(s)$ est un système du premier ordre dont le gain, le zéro et le pôle admettent respectivement une représentation LFT rationnelle d'ordre 1, 2 et 2 en V_x . Le mode dominant du système en boucle fermée ainsi obtenu correspond à un premier ordre de pulsation $\omega_\psi = 1.2 \text{ rad/s}$ en l'absence de saturation. Un correcteur anti-windup J_ψ peut alors être synthétisé mais le gain apporté en termes de performance est minime, le correcteur J_r étant suffisant pour satisfaire les exigences du cahier des charges. Le système complet en boucle fermée avec ses deux boucles d'asservissement est représenté sur la figure 7.4.

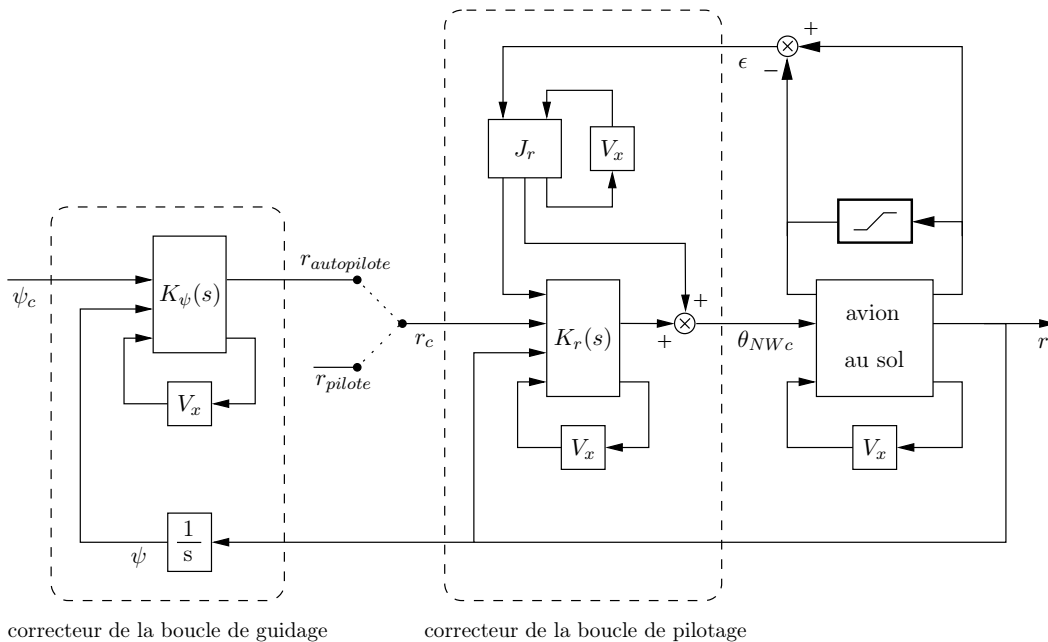


Figure 7.4 Structure complète du système en boucle fermée.

La représentation LFT du correcteur complet est quant à elle représentée sur la figure 7.5.

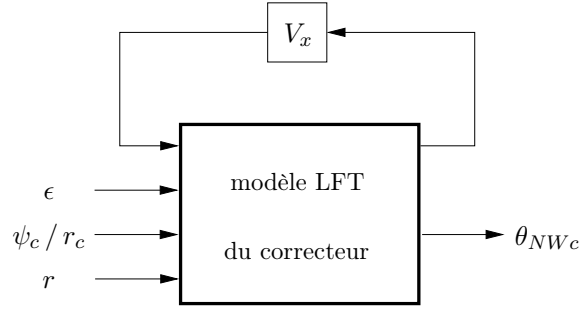


Figure 7.5 Représentation LFT du correcteur anti-windup à paramètres variants.

7.3 Implantation sur le modèle non-linéaire complet

7.3.1 Estimation en ligne des niveaux de saturation

L'étape suivante consiste à implanter ce correcteur anti-windup sur le modèle non-linéaire complet de l'avion au sol décrit au paragraphe 6.1. La principale difficulté réside dans le fait que les niveaux de saturation introduits dans le modèle LFT simplifié ne sont pas directement accessibles lorsque l'on considère le modèle complet. En outre, ils sont liés à la valeur des forces de friction latérales, dont les caractéristiques dépendent fortement de l'état de la piste et de la force verticale. Il apparaît donc nécessaire d'identifier ces forces en ligne afin de détecter si les saturations sont actives ou non.

On utilise pour cela la procédure mise au point au paragraphe 6.3.2. Elle repose sur l'inversion du modèle LPV décrit au paragraphe 6.2.3 et simplifié au paragraphe 7.2.1, dont la dynamique est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{x}_{LPV} = A(V_x) x_{LPV} + B_s \begin{bmatrix} F_{y_{NW}} \\ F_{y_{MG}} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

L'expression des forces de friction latérales estimées est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{y_{NW}} \\ \hat{F}_{y_{MG}} \end{bmatrix} = B_s^{-1} [\alpha I - A(V_x)] \begin{bmatrix} x_{NL} - x_{LPV} \\ x_{LPV} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

où α est un scalaire positif suffisamment grand par rapport à la dynamique du système (7.3). En reprenant les résultats du paragraphe 6.2.2, les angles de dérapages sont quant à eux déterminés par les relations :

$$\begin{cases} \beta_{NW} = \arctan(\tilde{\beta}_{NW}) - \theta_{NW} \\ \beta_{MG} = \tilde{\beta}_{MG} \end{cases} \quad (7.5)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{NW} \\ \tilde{\beta}_{MG} \end{bmatrix} = C_\beta(V_x) x_{LPV} \quad (7.6)$$

Les saturations sont actives dès que les forces estimées grâce à la relation (7.4) deviennent plus petites que leur approximation linéaire. Les niveaux de saturation peuvent donc être estimés à l'aide de deux signaux ϵ_{NW} et ϵ_{MG} de la manière suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_{NW} = \text{sign}(\beta_{NW}) \max(|G_{NW_0} \beta_{NW}| - |\hat{F}_{y_{NW}}|, 0) \\ \epsilon_{MG} = \text{sign}(\beta_{MG}) \max(|G_{MG_0} \beta_{MG}| - |\hat{F}_{y_{MG}}|, 0) \end{cases} \quad (7.7)$$

ou G_{NW_0} et G_{MG_0} représentent les valeurs nominales des *cornering gains* déterminées au paragraphe 6.3.3. En combinant les relations (7.3) à (7.7) avec le modèle actionneur de la roulette avant détaillé sur la figure 7.6, on obtient finalement un estimateur dont la représentation LFT est donnée par la figure 7.7.

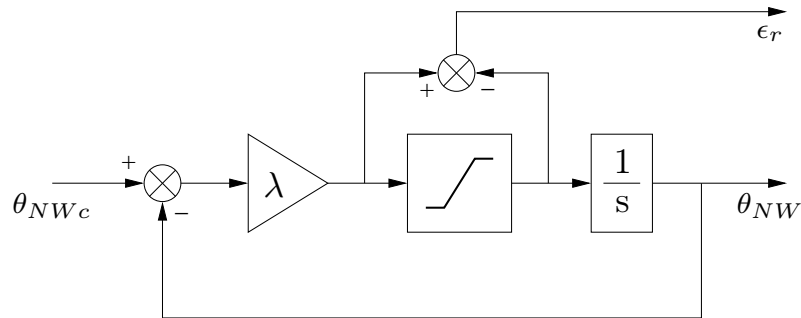


Figure 7.6 Estimation du niveau de saturation de l'actionneur de la roulette avant.

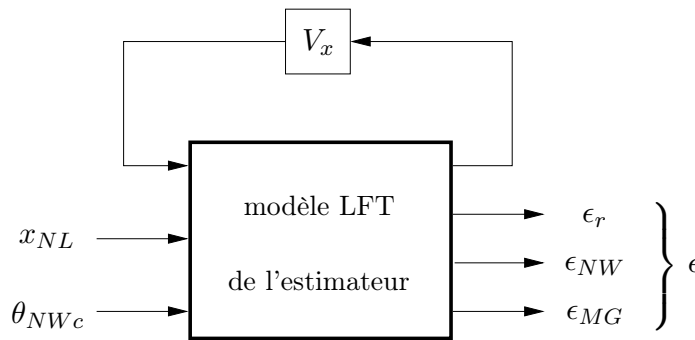


Figure 7.7 Représentation LFT de l'estimateur des niveaux de saturation.

7.3.2 Intégration du correcteur LFT adaptatif

Le correcteur adaptatif finalement obtenu est constitué du correcteur anti-windup à paramètres variants synthétisé au paragraphe 7.2 et de l'estimateur des niveaux de saturation construit précédemment. Son implantation sur le modèle non-linéaire complet de l'avion au sol est réalisée conformément à la figure 7.8. Un tel correcteur présente plusieurs avantages :

- il donne des résultats pertinents quelle que soit la vitesse de l'avion entre 5 kts et 40 kts et quel que soit l'état de la piste, comme le montrent les simulations temporelles réalisées au paragraphe 7.4,
- il conserve une structure simple et logique faisant intervenir des paramètres physiques, ce qui est fortement apprécié dans un contexte industriel,
- il est décrit sous forme LFT, ce qui le rend facilement intégrable dans un calculateur en vue d'une possible utilisation sur un avion réel,
- sa complexité reste modérée comparée à celle du modèle non-linéaire complet, comme le résume le tableau 7.1.

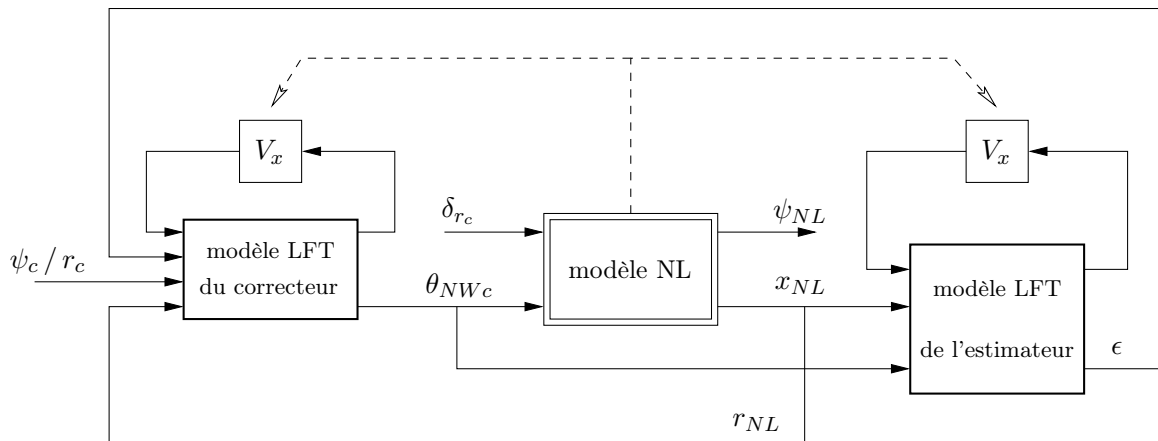


Figure 7.8 Intégration du correcteur sur le modèle non-linéaire complet.

Correcteur	Ordre	Dimension du bloc Δ
Boucle interne (nominal)	1	3
Boucle interne (anti-windup)	0	4
Boucle externe (nominal)	2	5
Estimateur	3	4
Total	6	16

Tableau 7.1 Complexité du correcteur adaptatif.

7.4 Simulations temporelles et validation

Les paragraphes 7.4.1 à 7.4.3 permettent de démontrer l'apport de la structure anti-windup et la capacité du correcteur proposé à s'adapter quels que soient la valeur de la force verticale et l'état de la piste. Le paragraphe 7.4.4 est quant à lui consacré à la validation du schéma de commande sur la base du scénario de référence représenté sur la figure 7.1.

7.4.1 Intérêt d'une approche multidimensionnelle

La figure 7.9 montre la réponse de l'avion à un échelon de vitesse de lacet obtenue sur une piste mouillée et pour une vitesse longitudinale $V_x \approx 8$ m/s. Sans correction anti-windup (pointillés), le correcteur PI garantit l'absence d'erreur statique. Cependant, un dépassement important est observé au cours du régime transitoire et le régime permanent n'est atteint qu'au bout de 7s, ce qui est inacceptable. Si seule la correction anti-windup associée à la saturation en vitesse de la roulette avant est active (tirets), le dépassement est réduit de manière significative mais subsiste néanmoins. Enfin, lorsque le correcteur complet est implanté (trait plein), le suivi de la consigne est excellent avec un temps de réponse de 3s et un dépassement négligeable. Il apparaît donc que chaque partie du correcteur apporte sa propre contribution, ce qui atteste la pertinence de la structure multidimensionnelle proposée.

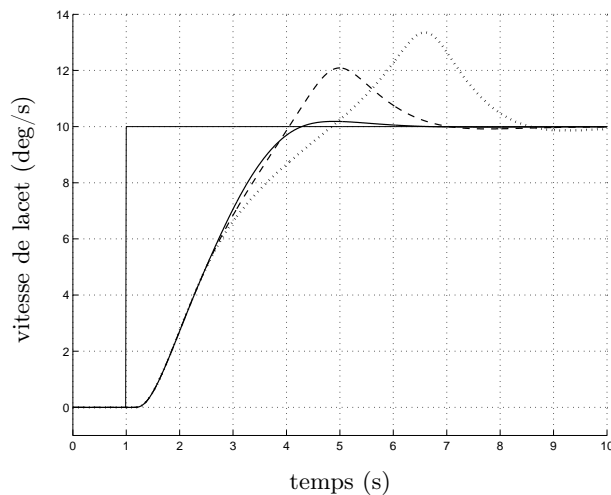


Figure 7.9 Réponses à un échelon de vitesse de lacet sans correction anti-windup (pointillés), avec une correction partielle (tirets) et avec une correction complète (trait plein).

8.4.2 Robustesse à une variation de la force verticale

La figure 7.10 montre les réponses à un échelon de vitesse de lacet obtenues sur une piste mouillée pour différentes valeurs de la masse de l'avion et pour une vitesse longitudinale $V_x \approx 8$ m/s. La courbe en trait plein correspond à la masse nominale, tandis que les tirets et les pointillés sont associés respectivement à une valeur inférieure ou supérieure de 30%. Le comportement de l'avion ne varie pas de manière significative, ce qui témoigne de la bonne robustesse du système à de fortes variations de la masse, et donc de la force verticale.

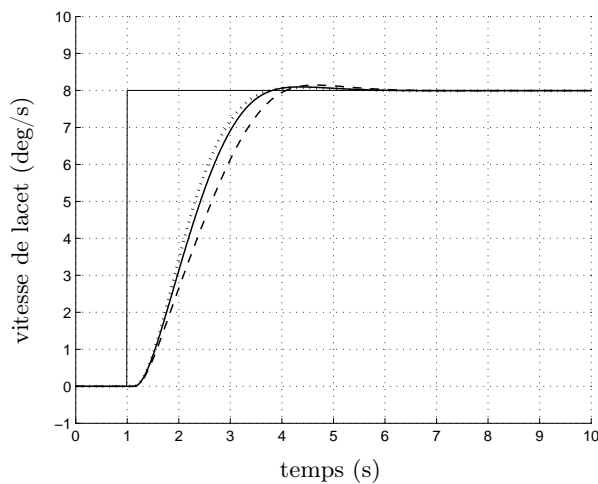


Figure 7.10 Réponses à un échelon de vitesse de lacet pour différentes valeurs de la masse.

7.4.3 Adaptation à l'état de la piste

La figure 7.11 présente les réponses à des échelons de vitesse de lacet et de cap obtenues sur des pistes sèches, mouillées et gelées. La vitesse longitudinale de l'avion est la même qu'aux paragraphes précédents, *i.e.* $V_x \approx 8$ m/s. Le correcteur s'adapte parfaitement à l'état de la piste : le dépassement reste en effet négligeable dans tous les cas, tandis que le

temps de réponse augmente légèrement sur piste gelée, mais dans des proportions tout à fait acceptables.

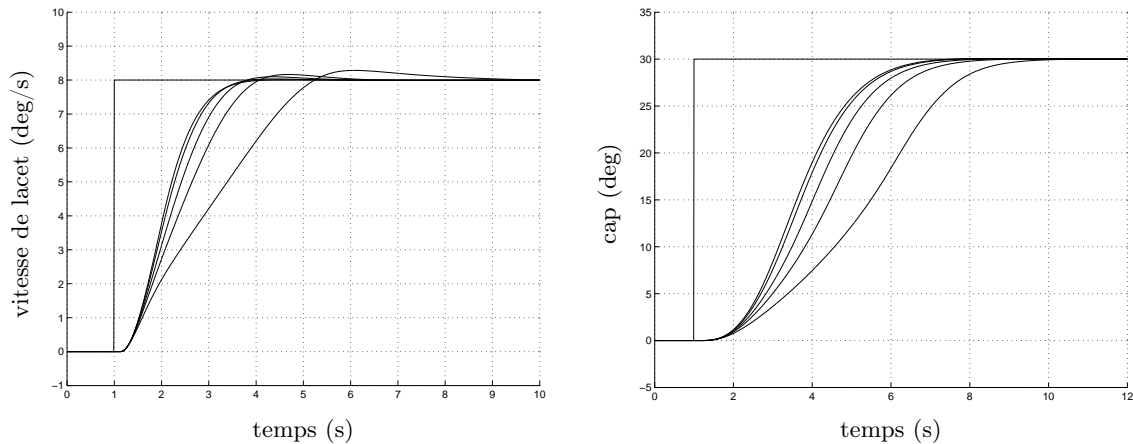


Figure 7.11 Réponses à un échelon de vitesse de lacet ou de cap pour différents états de la piste.

7.4.4 Réalisation de manœuvres de référence

On s'intéresse maintenant au scénario de référence illustré sur la figure 7.1, et plus particulièrement aux trois séquences latérales détaillées au paragraphe 7.1.1, afin de valider dans un contexte réaliste le schéma de commande proposé précédemment. Dans un souci de concision, seul le cas où l'avion est piloté en vitesse de lacet est détaillé ici, car il correspond à la stratégie généralement adoptée en pratique. En outre, le parti pris consiste à ne considérer que des profils de consignes simples pouvant être reproduits aisément par un pilote humain. Chaque manœuvre envisagée se déroule donc en deux étapes :

- un échelon de vitesse de lacet dont l'amplitude dépend de l'état de la piste et de la vitesse est appliqué afin de permettre à l'avion d'engager le virage,
- la consigne en vitesse de lacet est remise à zéro à l'instant adéquat de manière à atteindre le cap souhaité.

Les simulations sont systématiquement réalisées pour différents états de la piste : dans la suite de l'étude, les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent respectivement à des pistes sèches, mouillées et gelées. Pour chacune des deux premières séquences, cinq graphiques sont représentés (voir figures 7.12 à 7.15) :

- les réponses en cap,
- les consignes et les réponses en vitesse de lacet,
- les valeurs commandées et effectives du braquage de la roulette avant,
- les trajectoires de l'avion dans le plan horizontal,
- les entrées ϵ_{NW} et ϵ_r du correcteur anti-windup, qui correspondent aux différences entre les signaux saturés et non saturés.

Bien que l'avion soit piloté en vitesse de lacet, l'accent est mis sur les réponses en cap, car ce dernier correspond à la grandeur que l'on souhaite contrôler en pratique.

Remarque 7.4.1 *Un pilotage direct en cap est possible. Il est alors facile d'atteindre l'objectif souhaité, mais la maîtrise des consignes en vitesse de lacet envoyées à la boucle interne est parfois délicate. Ces dernières peuvent en effet devenir très élevées et entraîner un dépassement que le correcteur anti-windup a du mal à contrer.*

Séquence 1 : réaliser un virage de 30 deg en décélérant de 30 kts à 20 kts.

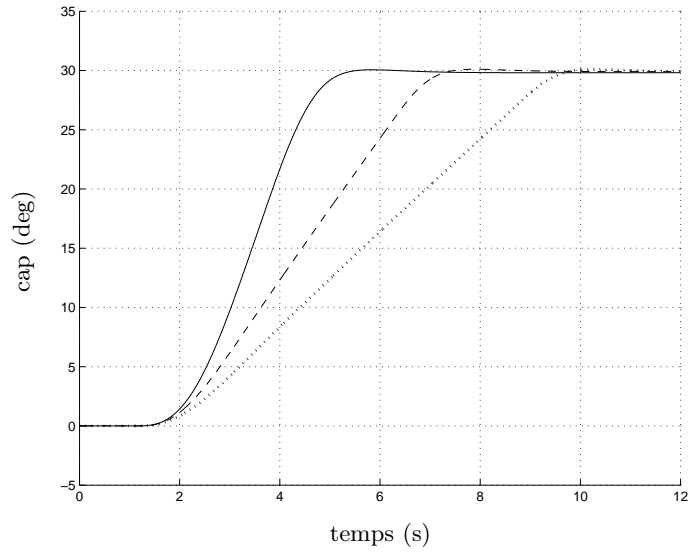


Figure 7.12 – Réponses en cap sur piste sèche (trait plein), mouillée (tirets) ou gelée (pointillés).

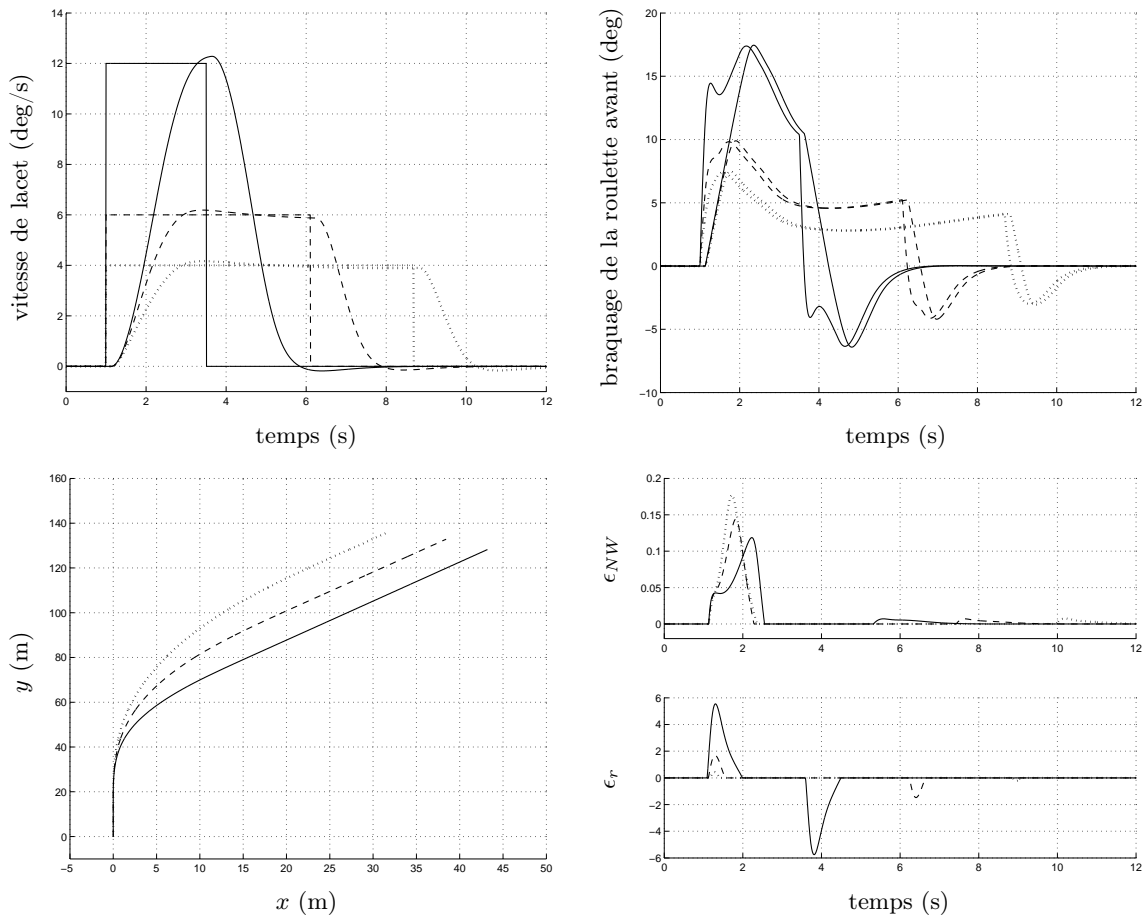


Figure 7.13 – Vitesses de lacet et braquages de la roulette avant commandés et effectifs (en haut), trajectoire de l'avion dans le plan x-y (en bas à gauche) et activité des saturations (en bas à droite).

Séquence 2 : réaliser un virage de 60 deg à une vitesse de 10 kts.

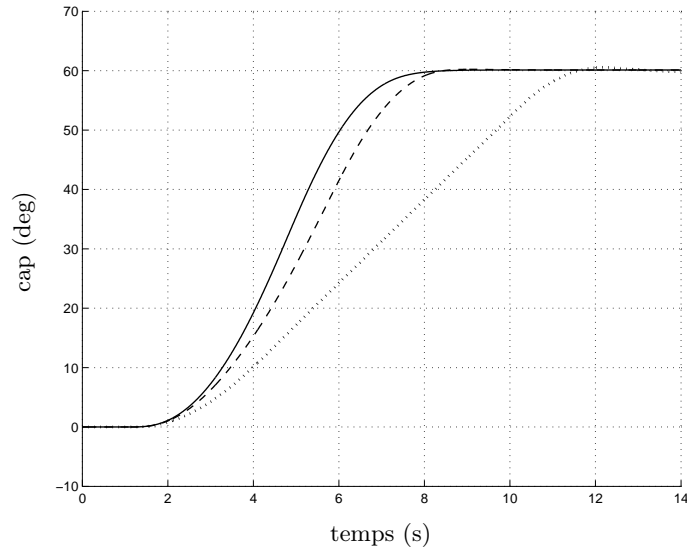


Figure 7.14 – Réponses en cap sur piste sèche (trait plein), mouillée (tirets) ou gelée (pointillés).

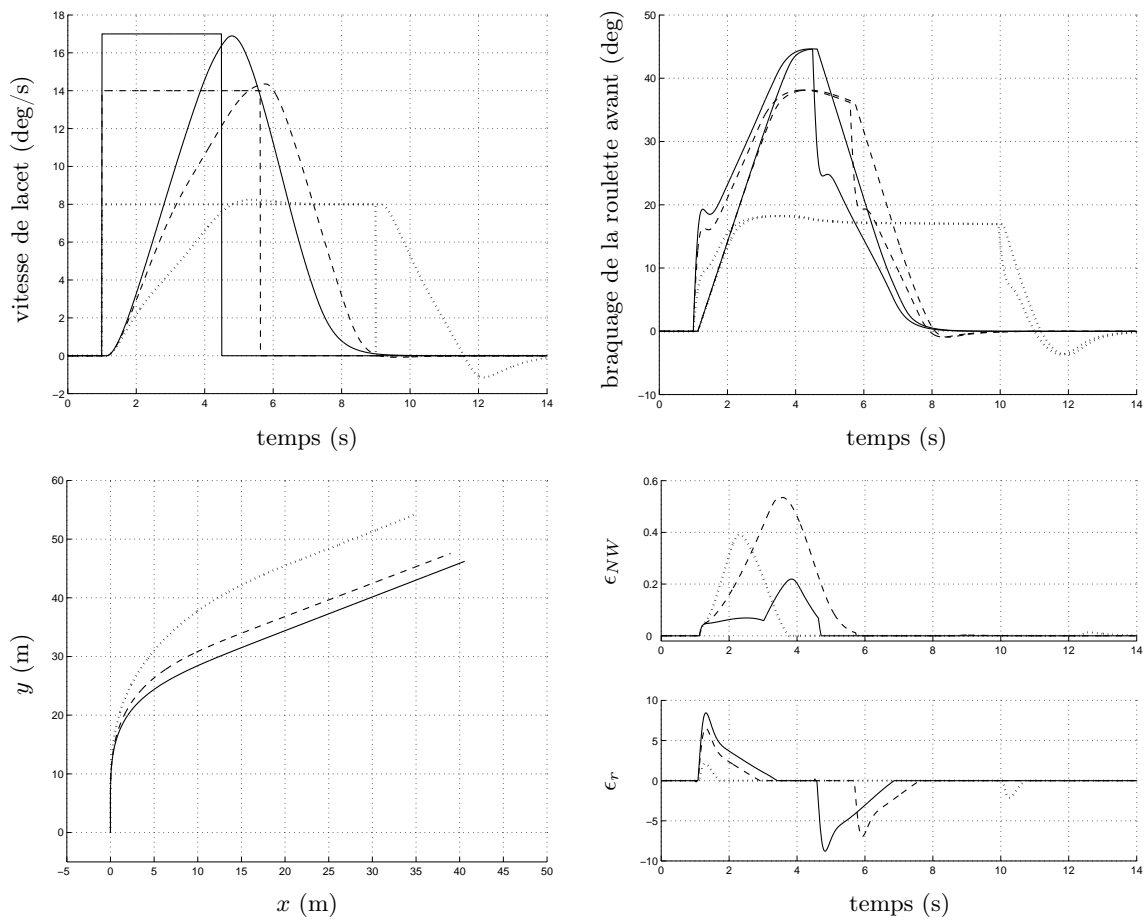


Figure 7.15 – Vitesses de lacet et braquages de la roulette avant commandés et effectifs (en haut), trajectoire de l'avion dans le plan x - y (en bas à gauche) et activité des saturations (en bas à droite).

Le correcteur anti-windup devient actif dès que ϵ_r ou ϵ_{NW} est non nul. Les ordres envoyés à l'actionneur de la roulette avant sont alors réduits, ce qui permet d'éviter une augmentation trop importante de l'angle de dérapage et donc un glissement latéral de l'avion sur la piste. Le dispositif anti-windup joue ici un rôle capital : sans son introduction, le dérapage n'est plus contrôlé et le système devient instable dans la majorité des cas.

Séquence 3 : faire demi-tour à une vitesse de 5 kts sur une piste de 45 m de large.

Au début de la manœuvre, l'avion fait un angle de 30 deg avec l'axe de la piste. Le demi-tour consiste alors à réaliser un virage de 240 deg puis à retourner à la position initiale en maintenant un angle de 30 deg avec l'axe de la piste. La séquence complète dure 34.0 s sur une piste sèche, 34.3 s sur une piste mouillée et 43.0 s sur une piste gelée.

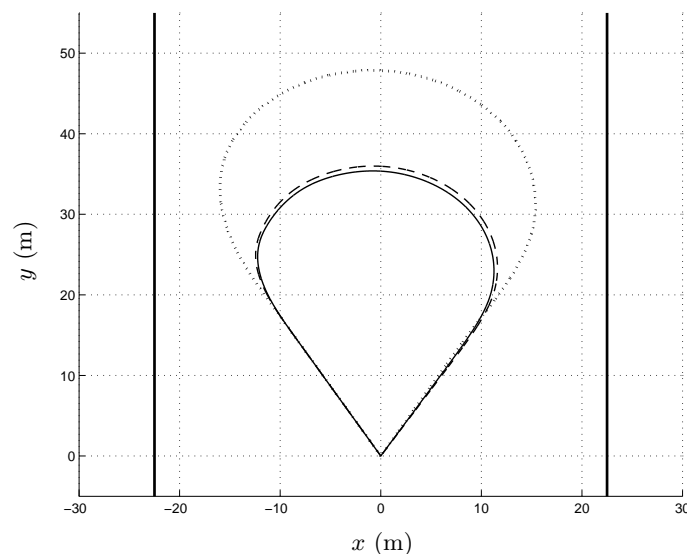


Figure 7.16 Trajectoires de l'avion dans le plan x - y lors d'une manœuvre de demi-tour.

Les résultats obtenus sur les différentes séquences étudiées montrent que le cap de l'avion est parfaitement contrôlé quels que soient l'état de la piste et la vitesse longitudinale de l'avion, ce qui est conforme aux objectifs de synthèse définis au paragraphe 7.1.1 et atteste la pertinence de la stratégie de commande proposée.

Conclusion

La technique de synthèse anti-windup proposée dans le chapitre 5 est ici mise en œuvre dans un contexte non-conventionnel, à savoir le contrôle de la dynamique latérale de l'avion au sol. Dans la majorité des applications de ce type, les saturations apparaissent en effet au niveau de la dynamique des actionneurs et sont parfaitement définies. Mais dans le cas étudié ici, elles sont introduites afin de modéliser les interactions entre les roues et le sol, qui varient fortement en fonction de l'état de la piste. Les niveaux de saturation associés sont donc *a priori* inconnus et doivent être identifiés en ligne, ce qui est réalisé de manière efficace à l'aide d'un estimateur sous forme LFT. Un correcteur adaptatif à paramètres variants est finalement obtenu puis implanté sur un modèle non-linéaire développé dans un contexte industriel. Les nombreuses simulations réalisées démontrent la capacité du

correcteur proposé à réaliser diverses manœuvres latérales à des vitesses pouvant varier de 5 kts à 40 kts, et ce quel que soit l'état de la piste. Grâce à l'action anti-windup, la roulette avant est sollicitée au maximum de ses possibilités, tout en évitant un dérapage trop important de l'avion. Il en résulte des réponses en vitesse de lacet et en cap rapides, sans dépassement ni erreur statique.

L'approche proposée dans ce chapitre peut être généralisée à des vitesses allant jusqu'à 150 kts, afin de prendre par exemple en compte des manœuvres de réjection de vent latéral lors de la phase de décélération. Dans ce cas, les forces aérodynamiques ne peuvent plus être négligées et l'avion doit être piloté simultanément avec la roulette avant et la dérive. La point clé consiste alors à déterminer une bonne répartition de l'utilisation de ces gouvernes en fonction de la vitesse longitudinale de l'avion. Enfin, les forces de friction longitudinales pouvant elles aussi être modélisées à l'aide de saturations, une méthodologie similaire peut être appliquée afin de contrôler la dynamique longitudinale de l'avion au sol. Une attention toute particulière doit cependant être apportée à l'influence de la force verticale sur les niveaux de saturation.

Notations

LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
NL	Non-Linéaire
PI	Proportionnel Intégral
$\theta_{NW}, \theta_{NWc}$	Position angulaire de la roulette avant, <i>rad</i>
r, r_c	Vitesse de lacet, <i>rad/s</i>
ψ, ψ_c	Cap, <i>rad</i>
V_x, V_y	Vitesse longitudinale, vitesse latérale, <i>m/s</i>
V_a	Vitesse aérodynamique, <i>m/s</i>
W_y	Vent latéral, <i>m/s</i>
δ_r, δ_{rc}	Braquage de la dérive, <i>rad</i>
$F_{y\times}, \hat{F}_{y\times}$	Force latérale, force latérale estimée, <i>N</i>
$G_{\times 0}$	Cornering gain nominal, <i>N/rad</i>
β_{\times}	Angle de dérapage local, <i>rad</i>
L_{\times}, L_r, L_a	Niveaux de saturation
ϵ	Signal d'entrée du correcteur anti-windup

Dans les notations ci-dessus, le symbole \times vaut *NW* ou *MG* selon que le paramètre considéré est associé à la roulette avant ou au train principal. L'indice *c* désigne quant à lui un signal de référence (ou consigne).

Références

[Duprez *et al.*, 2004] J. Duprez, F. Mora-Camino et F. Villaumé. Aircraft-on-ground lateral control for low speed maneuvers. Dans *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Saint-Pétersbourg, Russie, Juin 2004.

- [Duprez, 2004] J. Duprez. Automatisation du pilotage au sol pour la navigation aéroportuaire. *Doctorat, Université Paul Sabatier, Rapport technique LAAS-CNRS n° 04633*, 2004.
- [Jeanneau, 2007] M. Jeanneau. Chapter 2: On-ground transport aircraft nonlinear control design and analysis challenges. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 25–33. Springer-Verlag, 2007.
- [Looye, 2007] G. Looye. Chapter 8: Rapid prototyping using inversion-based control and object-oriented modelling. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 147–173. Springer-Verlag, 2007.
- [Roos *et al.*, 2007] C. Roos, J-M. Biannic, S. Tarbouriech et C. Prieur. Chapter 7: On-ground aircraft control design using an LPV anti-windup approach. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 117–145. Springer-Verlag, 2007.
- [Roos et Biannic, 2006] C. Roos et J-M. Biannic. Aircraft-on-ground lateral control by an adaptive LFT-based anti-windup approach. Dans *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2207–2212, Munich, Allemagne, Octobre 2006.

Chapitre 8

PROPRIÉTÉS DE ROBUSTESSE DU SYSTÈME DE COMMANDE LATÉRAL D'UN AVION AU SOL

Résumé : Les propriétés de robustesse du correcteur anti-windup synthétisé au chapitre 7 pour assurer le contrôle latéral d'un avion au sol sont évaluées. Une attention particulière est notamment accordée aux incertitudes qui affectent l'estimation des interactions entre les roues et la piste. Afin de pouvoir appliquer les techniques d'analyse de robustesse mixte LTI/LTV développées dans la première partie, les saturations introduites au chapitre 6 lors de la modélisation de la dynamique latérale de l'avion sont représentées par des paramètres variants. Une telle stratégie se révèle pertinente car elle permet de garantir la stabilité du système en boucle fermée en présence d'incertitudes diverses, quel que soit l'état de la piste, et sur une large plage de vitesse.

Mots clés : représentation des non-linéarités par des paramètres variants, incertitudes mixtes LTI/LTV, stabilité robuste, robustesse en performance.

Sommaire

8.1	Formulation du problème d'analyse de robustesse	160
8.1.1	Prise en compte d'incertitudes LTI/LTV réelles	160
8.1.2	Obtention d'une représentation LFT linéaire de l'avion au sol	161
8.2	Analyse de stabilité robuste	162
8.2.1	Hypothèses préliminaires	162
8.2.2	Manœuvres réalisées sur les pistes de déroulement	163
8.2.3	Manœuvres réalisées sur la zone de stationnement	166
8.3	Robustesse en performance	167
8.3.1	Définition du niveau de performance	167
8.3.2	Sensibilité aux incertitudes	168
8.4	Evaluation du conservatisme	169

Bibliographie

[1] C. Roos et J-M. Biannic. Chapter 9: Robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties for on-ground aircraft. *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 175-194. Springer-Verlag, 2007.

Un correcteur anti-windup à paramètres variants a été synthétisé au chapitre 7 à partir de la représentation LFT simplifiée d'un avion au sol proposée au chapitre 6. De nombreuses simulations temporelles ont alors permis de montrer que le mouvement latéral, *i.e.* le cap et la vitesse de lacet, pouvait être parfaitement contrôlé au cours de diverses manœuvres de référence réalisées sur les pistes de déroulement. En outre, ce bon comportement a été observé quel que soit l'état de la piste et sur une large plage de vitesse, ce qui a permis de valider le schéma de commande proposé.

Cette étape de synthèse a cependant été réalisée sans prendre en compte les incertitudes qui affectent le modèle de l'avion au sol, notamment au niveau des interactions entre les roues et la piste. Ces dernières ne sont en effet pas connues de manière précise en pratique et peuvent changer fortement d'un atterrissage à l'autre. Il apparaît donc essentiel de s'assurer de la stabilité et de la robustesse en performance de l'asservissement proposé, qui s'appuie sur une estimation en ligne nécessairement imparfaite des forces de friction latérales.

Il s'agit là d'un problème d'analyse de robustesse non-linéaire difficile, qui peut néanmoins être simplifié en représentant les saturations introduites lors de la modélisation de l'avion au sol par des paramètres variant dans le temps. Une telle substitution permet au prix d'un conservatisme raisonnable de se ramener à un problème classique d'analyse de robustesse en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV compatible avec les outils développées dans la première partie.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Le problème d'analyse non-linéaire est formulé au paragraphe 8.1. L'accent est notamment mis sur la nécessité de prendre en compte simultanément des paramètres variants et des incertitudes LTI, puis sur la stratégie permettant de se ramener à un problème linéaire pour lequel on dispose de méthodes de résolution efficaces. Les paragraphes 8.2 et 8.3 sont alors consacrés à l'évaluation des propriétés de stabilité et de performance robustes du système en boucle fermée.

8.1 Formulation du problème d'analyse de robustesse

8.1.1 Prise en compte d'incertitudes LTI/LTV réelles

L'objectif principal de ce chapitre consiste à déterminer si le comportement latéral de l'avion rebouclé par le correcteur anti-windup adaptatif synthétisé au chapitre 7 est stable :

- quel que soit l'état de la piste et
- pour toute variation de la vitesse longitudinale V_x dans l'intervalle $[5, 40 \text{ kts}]$

malgré la présence d'incertitudes de modèle :

- sur les *cornering gains* et
- sur le signal d'entrée du correcteur anti-windup.

Il apparaît essentiel de considérer ces deux sources d'incertitudes. Le chapitre 6 montre en effet que de nombreux paramètres influent sur les *cornering gains*, mais seuls le dérapage et l'état de la piste sont pris en compte explicitement lors de la synthèse. L'introduction d'incertitudes paramétriques proposée au paragraphe 6.3.3 permet donc de modéliser les dépendances à d'autres variables telles la force verticale et la vitesse longitudinale de l'avion. D'autre part, on suppose lors de la synthèse anti-windup que les forces de friction latérales, et donc les niveaux de saturation, sont parfaitement connus. Une telle hypothèse n'est cependant pas acceptable en pratique, car l'implantation du correcteur sur le modèle non-linéaire complet fait intervenir un estimateur. La prise en compte d'incertitudes sur le

signal d'entrée ϵ du correcteur anti-windup permet donc d'étudier la robustesse du système en boucle fermée à une détermination imparfaite des forces.

Une première manière d'aborder ce problème d'analyse consiste à exploiter les résultats obtenus dans le chapitre 5, qui permettent de calculer une marge de stabilité ou d'évaluer la robustesse en performance d'un système présentant des saturations et des paramètres variants complexes. Une telle approche se révèle cependant conservatrice car le modèle d'avion au sol considéré ici dépend non seulement de paramètres variants, mais également d'incertitudes LTI réelles, comme le met en évidence le tableau ci-dessous.

Paramètre	Nom	Type
Vitesse longitudinale de l'avion	V_x	LTV réel
Incertitudes sur les cornering gains	$\delta_{G_{NW}}, \delta_{G_{MG}}$	LTV réel
Incertitude sur l'entrée du correcteur anti-windup	δ_ϵ	LTI réel
Retard sur l'entrée du correcteur anti-windup	τ_ϵ	LTI réel

Tableau 8.1 Paramètres LTI et LTV pris en compte pour l'analyse de robustesse.

Une telle observation suggère plutôt de privilégier les outils d'analyse de robustesse mixte LTI/LTV développés dans les chapitres 2 et 3, qui nécessitent de disposer d'une représentation LFT linéaire de la dynamique latérale de l'avion au sol. Le modèle LFT simplifié construit au chapitre 6 n'est pas exploitable en l'état et doit donc être adapté, car le bloc Δ associé comporte quatre non-linéarités de type saturation.

8.1.2 Obtention d'une représentation LFT linéaire de l'avion au sol

La figure 8.1 met en évidence le fait que toute fonction saturation $sat(\cdot)$ vérifie la condition de secteur :

$$sat(z)(sat(z) - z) \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

et peut donc être représentée par un paramètre $\delta(t) \in [0, 1]$ à variations arbitrairement rapides en posant $sat(z) = \delta(t)z$.

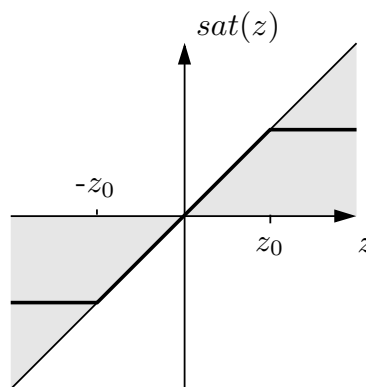


Figure 8.1 Représentation d'une fonction saturation par un paramètre variant.

Les saturations présentes dans le modèle latéral simplifié de la figure 6.11 sont alors transformées de la sorte, ce qui conduit à introduire quatre paramètres variants notés $\delta_r(t)$, $\delta_a(t)$, $\delta_{NW}(t)$ et $\delta_{MG}(t)$. La représentation LFT en boucle fermée qui en résulte est

constituée de la boucle ouverte ainsi linéarisée et du modèle du correcteur anti-windup décrit sur la figure 7.5. On se limite ici à la boucle interne, ce qui conduit finalement à l'interconnexion de la figure 8.2.

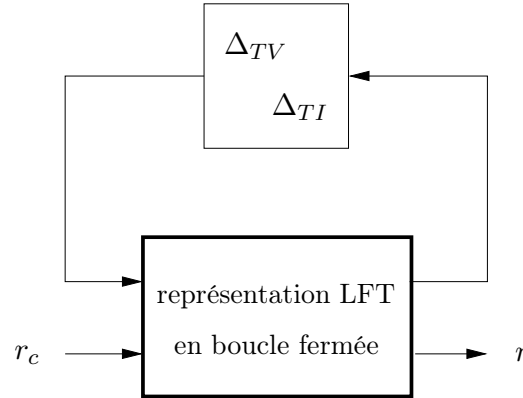


Figure 8.2 Représentation LFT linéaire en boucle fermée de l'avion au sol.

Cette dernière comporte quatre états (r , V_y , θ_{NW} et l'état du correcteur), une unique entrée (r_c) et une unique sortie (r). Le bloc Δ associé est de taille 19×19 et est structuré de la manière suivante :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \quad (8.2)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{TV} = \text{diag}(\delta_{NL}(t), V_x(t) \cdot I_{11}, \delta_{GNW}(t), \delta_{GMG}(t)) \\ \Delta_{TI} = \text{diag}(\delta_\epsilon, \tau_\epsilon) \end{cases} \quad (8.3)$$

et :

$$\delta_{NL}(t) = \text{diag}(\delta_r(t), \delta_a(t), \delta_{NW}(t), \delta_{MG}(t)) \quad (8.4)$$

La représentation LFT décrite ci-dessus ne contient plus d'éléments non-linéaires, ce qui la rend compatible avec les outils d'analyse développés aux chapitres 2 et 3. Il devient notamment possible d'étudier la robustesse du système par rapport à l'état de la piste par l'intermédiaire des paramètres $\delta_{NW}(t)$ et $\delta_{MG}(t)$.

8.2 Analyse de stabilité robuste

8.2.1 Hypothèses préliminaires

L'intervalle de vitesse considéré pour l'analyse de robustesse est scindé en deux parties :

- les vitesses comprises entre 10 kts et 40 kts correspondent à l'ensemble des manœuvres réalisées sur les pistes de déroulement, qui consistent à conduire l'avion de la piste principale jusqu'à l'aire de stationnement,
- les vitesses comprises entre 5 kts et 10 kts sont quant à elles associées aux manœuvres réalisées sur l'aire de stationnement.

Dans le premier cas, la vitesse longitudinale de l'avion est susceptible de varier considérablement, et il apparaît donc pertinent de la considérer comme un paramètre variant. À l'inverse, lorsque l'avion évolue à proximité de son point de stationnement, on peut admettre en première approximation que V_x reste constante. Une analyse de stabilité robuste est réalisée indépendamment sur ces deux intervalles dans les paragraphes 8.2.2 et 8.2.3.

8.2.2 Manœuvres réalisées sur les pistes de déroulement

Les incertitudes sur les *cornering gains* et sur le signal d'entrée du correcteur anti-windup ne sont pour l'instant pas prises en compte. On cherche donc à déterminer dans un premier temps si la stabilité du système en boucle fermée représenté sur la figure 8.2 est assurée quel que soit l'état de la piste et pour toute variation de la vitesse V_x dans l'intervalle $[10, 40 \text{ kts}]$. Pour cela, on calcule à l'aide des outils présentés dans la partie I la plus petite valeur k_{min} pour laquelle la stabilité est garantie sous la condition :

$$k_{min} \cdot I_4 \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \quad \forall t \geq 0 \quad (8.5)$$

Le bloc Δ du modèle LFT associé à ce problème admet la structure suivante :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_{NL}(t), V_x(t) \cdot I_{11}) \quad (8.6)$$

avec :

$$\begin{cases} k_{min} \cdot I_4 \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \\ V_x(t) \in [10, 40 \text{ kts}] \end{cases} \quad (8.7)$$

On obtient $k_{min} = 0.25$. Cette valeur est strictement supérieure à 0, ce qui signifie que la stabilité ne peut pas être garantie pour des valeurs quelconques des signaux d'entrée z_r , z_a , z_{NW} et z_{MG} des saturations présentes dans le modèle LFT non-linéaire de la figure 6.11, comme le montre la figure 8.3.

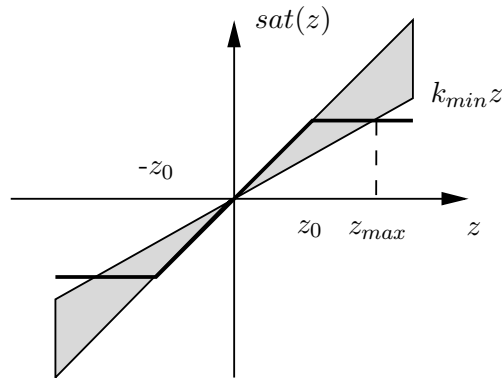


Figure 8.3 Existence d'une borne supérieure sur les signaux d'entrée des saturations.

Il existe en effet une borne supérieure z_{max} sur ces signaux, au-delà de laquelle aucune conclusion ne peut être tirée, et dont l'expression est donnée par :

$$z_{max} = \frac{z_0}{k_{min}} \quad (8.8)$$

Le comportement de l'avion au sol est alors analysé au cours de nombreuses manœuvres de référence, et notamment celles décrites au paragraphe 7.1.1. Il est ainsi possible de déterminer pour chacune des quatre saturations sat_{L_r} , sat_{L_a} , $sat_{L_{NW}}$ et $sat_{L_{MG}}$ l'amplitude

maximale effective z_{sat} du signal d'entrée z , et donc la limite inférieure k_{sat} du secteur qui inclut la saturation pour tout $z \in [-z_{sat}, z_{sat}]$. A titre d'exemple, les figures 8.4 et 8.5 montrent les signaux d'entrée des quatre saturations et la réponse de l'avion en cap lors d'un virage de 60 deg réalisé à une vitesse de 10 kts.

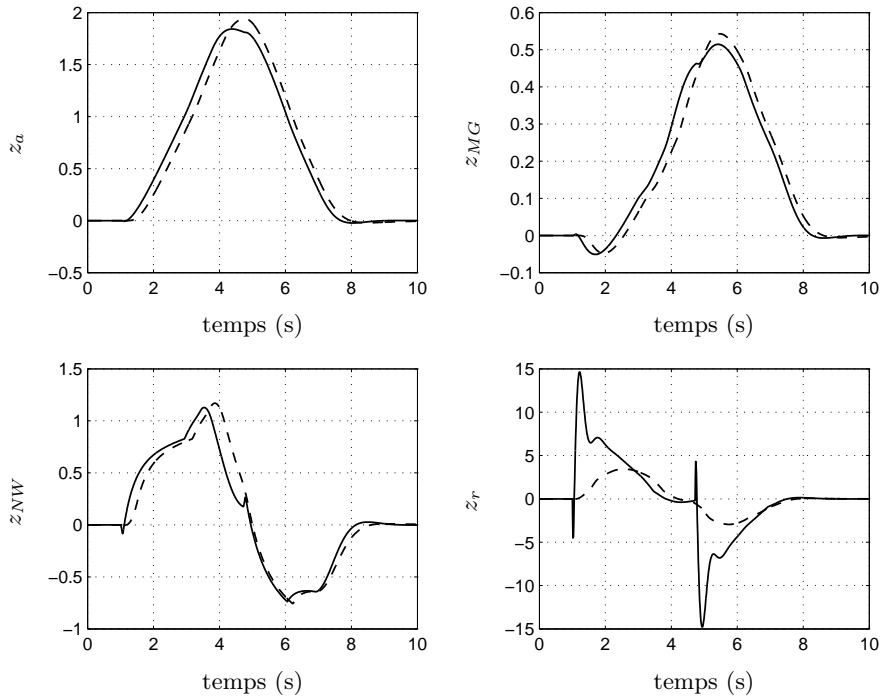


Figure 8.4 Signaux d'entrée des quatre saturations normalisées.

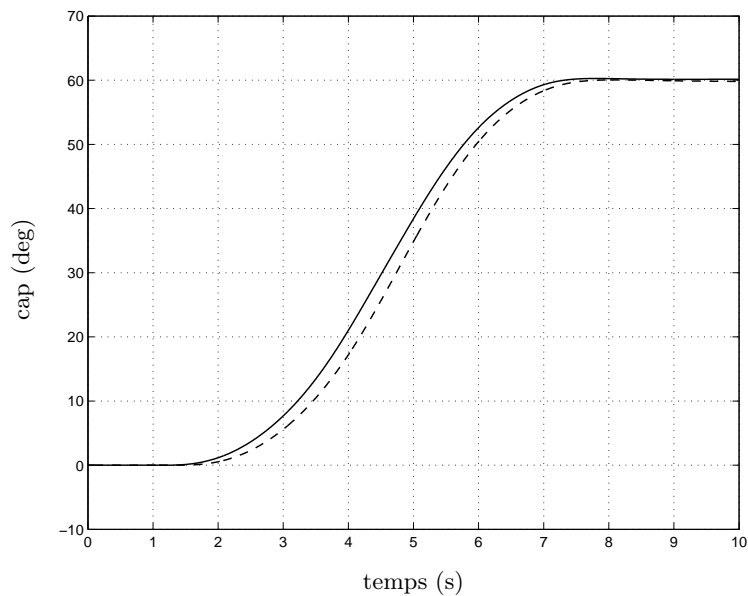


Figure 8.5 Réponse en cap lors d'un virage de 60 deg réalisé à 10 kts.

Les traits pleins correspondent au comportement de l'avion obtenu avec le correcteur anti-windup synthétisé au paragraphe 7.2. On observe que la non-linéarité associée à l'actionneur de la roulette avant est de loin la plus active. Il en résulte une valeur très élevée de l'amplitude z_{sat} associée, ce qui n'est pas souhaitable du point de vue de l'analyse de stabilité. Ce problème peut être résolu par l'introduction d'une précommande permettant de lisser les ordres en vitesse de lacet envoyés par le pilote. Les résultats obtenus à l'aide d'un filtre du second ordre bien amorti sont représentés par des tirets sur les figures 8.4 et 8.5. Comme on pouvait s'y attendre, le pic observé précédemment sur le signal d'entrée de la roulette avant est fortement atténué, ce qui conduit à une activité plus équilibrée des différentes non-linéarités. De plus, l'impact sur la réponse en cap est modérée, car seule une très légère augmentation du temps de réponse est observée. Après avoir étudié les manœuvres les plus dimensionnantes, les valeurs de k_{sat} associées à sat_{L_r} , sat_{L_a} , $sat_{L_{NW}}$ et $sat_{L_{MG}}$ valent respectivement 0.28, 0.51, 0.37 et 1. On constate que $k_{sat} > k_{min}$ pour chacune des quatre saturations, ce qui permet de conclure que ces dernières sont correctement modélisées par des paramètres variants vérifiant la relation (8.5) et que la stabilité de la boucle fermée non-linéaire est garantie quelles que soient les variations de vitesse longitudinale entre 10 kts et 40 kts. L'utilisation d'une précommande linéaire en complément du correcteur calculé au paragraphe 7.2 s'avère pertinente, car elle permet de conclure quant à la stabilité sans pour autant dégrader le comportement de l'avion.

L'étape suivante consiste à déterminer dans quelle mesure la stabilité du système en boucle fermée peut être maintenue en présence d'incertitudes de modèle structurées. On suppose tout d'abord que :

$$\begin{cases} G_{MG}(t) = (1 + \delta_{G_{MG}}(t)) G_{MG_0}, & |\delta_{G_{MG}}(t)| \leq 0.1 \\ G_{NW}(t) = (1 + \delta_{G_{NW}}(t)) G_{NW_0}, & |\delta_{G_{NW}}(t)| \leq 0.1 \end{cases} \quad (8.9)$$

où $G_{MG}(t)$ et $G_{NW}(t)$ représentent les *cornering gains*, qui peuvent varier de $\pm 10\%$ autour de leurs valeurs nominales G_{MG_0} et G_{NW_0} . Le bloc Δ de la représentation LFT associé est structuré de la manière suivante :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_{NL}(t), V_x(t).I_{11}, \delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t)) \quad (8.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{diag}(0.28, 0.51, 0.37, 1) \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \\ V_x(t) \in [10, 40 \text{ kts}] \\ \delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t) \in [-0.1, 0.1] \end{cases} \quad (8.11)$$

Une nouvelle analyse est réalisée et montre que la stabilité est préservée.

Des paramètres supplémentaires sont finalement introduits afin de prendre en compte l'estimation imparfaite des forces de friction latérales, sous la forme d'une incertitude LTI δ_ϵ ou d'un retard τ_ϵ agissant sur le signal d'entrée ϵ du correcteur anti-windup.

$$\begin{cases} \epsilon(t) = (1 + \delta_\epsilon) \epsilon_0(t) \\ \epsilon(t) = \epsilon_0(t - \tau_\epsilon) \end{cases} \quad (8.12)$$

Le bloc Δ s'écrit maintenant :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_{NL}(t), V_x(t).I_{11}, \delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t), \delta_\epsilon/\tau_\epsilon) \quad (8.13)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{diag}(0.28, 0.51, 0.37, 1) \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \\ V_x(t) \in [10, 40 \text{ kts}] \\ \delta_{GNW}(t), \delta_{G_MG}(t) \in [-0.1, 0.1] \\ \delta_\epsilon \in [-\delta_{\epsilon_{max}}, \delta_{\epsilon_{max}}] / \tau_\epsilon \in [0, \tau_{\epsilon_{max}}] \end{cases} \quad (8.14)$$

Les valeurs maximales $\delta_{\epsilon_{max}}$ et $\tau_{\epsilon_{max}}$ de δ_ϵ et τ_ϵ pour lesquelles la stabilité peut être garantie sont regroupées dans le tableau 8.2.

Paramètre	Valeur maximale
Incertitude δ_ϵ	0.13
Retard τ_ϵ	0.10 s

Tableau 8.2 Valeurs de $\delta_{\epsilon_{max}}$ et $\tau_{\epsilon_{max}}$ pour lesquelles la stabilité est garantie.

Ces résultats sont concluants et permettent de montrer que l'avion au sol est stable malgré la présence d'incertitudes sur les *cornering gains* et le signal d'entrée du correcteur anti-windup, et ce quels que soient l'état de la piste et les variations de vitesse longitudinale entre 10 kts et 40 kts.

Cependant, cette analyse de stabilité globale peut se révéler conservatrice, car aucune hypothèse n'est faite sur la vitesse de variation de V_x , ce qui n'est pas très réaliste. Une autre approche consiste à formuler l'hypothèse que chaque manœuvre est réalisée dans un intervalle de vitesse réduit, voire même que la vitesse reste constante. Il devient alors possible de retirer V_x du bloc Δ et de réaliser une nouvelle analyse de robustesse. On a ainsi :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_{NL}(t), \delta_{GNW}(t), \delta_{G_MG}(t), \delta_\epsilon/\tau_\epsilon) \quad (8.15)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{diag}(0.28, 0.51, 0.37, 1) \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \\ \delta_{GNW}(t), \delta_{G_MG}(t) \in [-0.1, 0.1] \\ \delta_\epsilon \in [-\delta_{\epsilon_{max}}, \delta_{\epsilon_{max}}] / \tau_\epsilon \in [0, \tau_{\epsilon_{max}}] \end{cases} \quad (8.16)$$

Dans un souci de concision, les résultats sont présentés uniquement pour l'une des manœuvres les plus contraignantes, à savoir la réalisation d'un virage de 60 deg à une vitesse de 10 kts. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats sont bien moins conservatifs que précédemment, puisque la stabilité est assurée tant que $\delta_\epsilon \leq 0.95$ ou $\tau_\epsilon \leq 0.44$ s. On peut donc conclure qu'il est inutile d'estimer les forces de friction latérales de manière très précise, ce qui valide l'utilisation de l'estimateur simplifié introduit au paragraphe 7.3.1.

8.2.3 Manœuvres réalisées sur la zone de stationnement

Les manœuvres réalisées sur la zone de stationnement à des vitesses inférieures à 10 kts peuvent être analysées de la même manière, *i.e.* à vitesse fixée. Le tableau 8.3 indique ainsi pour différentes valeurs de V_x les valeurs de $\delta_{\epsilon_{max}}$ et $\tau_{\epsilon_{max}}$ obtenues lors de la réalisation d'un demi-tour similaire à celui décrit au paragraphe 7.4.4.

Paramètre	Valeur maximale		
	$V_x = 5 \text{ kts}$	$V_x = 7 \text{ kts}$	$V_x = 9 \text{ kts}$
Incertitude δ_ϵ	0.54	0.60	0.72
Retard τ_ϵ	0.26 s	0.30 s	0.36 s

Tableau 8.3 Valeurs de $\delta_{\epsilon_{max}}$ et $\tau_{\epsilon_{max}}$ garantissant la stabilité lors d'un demi-tour.

On constate ici encore qu'il est inutile d'estimer précisément les forces de friction latérales.

8.3 Robustesse en performance

8.3.1 Définition du niveau de performance

Une fois la stabilité robuste du système évaluée, il apparaît intéressant de déterminer quels niveaux de performance peuvent être garantis. Dans cette optique, la réponse en vitesse de lacet r obtenue en présence d'incertitudes sur les *cornering gains* et sur le signal d'entrée du correcteur anti-windup est comparée à la réponse nominale r_0 . Une borne supérieure γ de la norme \mathcal{L}_2 -induite du transfert entre la consigne en vitesse de lacet r_c et le signal d'erreur $r - r_0$ est alors calculée. L'interconnexion LFT associée à ce calcul de performance est décrite sur la figure 8.6.

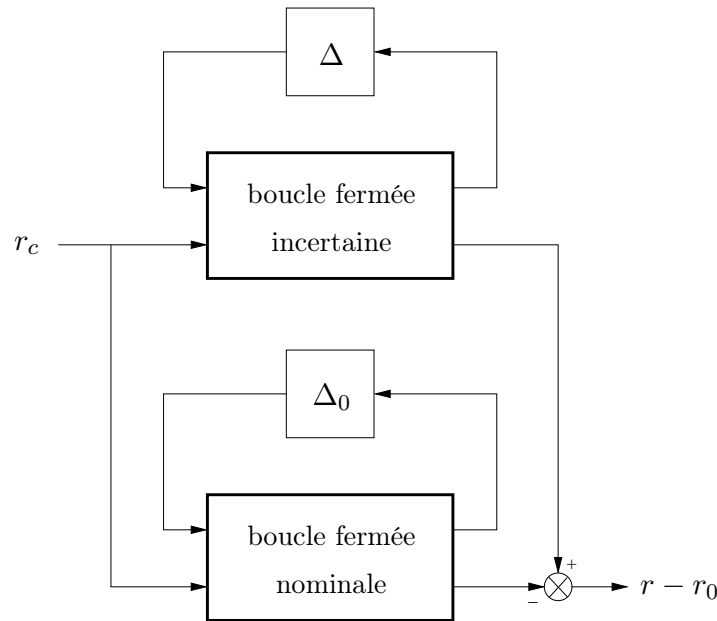


Figure 8.6 Interconnexion LFT pour l'analyse de performance robuste.

La vitesse longitudinale V_x est fixée dans le reste de l'étude et les blocs Δ associés respectivement au modèle incertain et au modèle nominal sont définis par :

$$\begin{cases} \Delta = \text{diag}(\delta_{NL}(t), \delta_{GNW}(t), \delta_{GMG}(t), \delta_\epsilon) \\ \Delta_0 = \delta_{NL}(t) \end{cases} \quad (8.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{diag}(0.28, 0.51, 0.37, 1) \leq \delta_{NL}(t) \leq I_4 \\ \delta_{G_{NW}}(t), \delta_{G_{MG}}(t) \in [-0.1, 0.1] \\ \delta_\epsilon \in [-\delta_{\epsilon_{max}}, \delta_{\epsilon_{max}}] \end{cases} \quad (8.18)$$

8.3.2 Sensibilité aux incertitudes

L'indice de performance γ est tracé sur la figure 8.7 en fonction de la valeur de $\delta_{\epsilon_{max}}$. La courbe en trait plein correspond au cas décrit par les relations (8.17) et (8.18). Les tirets sont quant à eux obtenus en imposant $\delta_{G_{NW}}(t) = \delta_{G_{MG}}(t) = 0 \forall t \geq 0$.

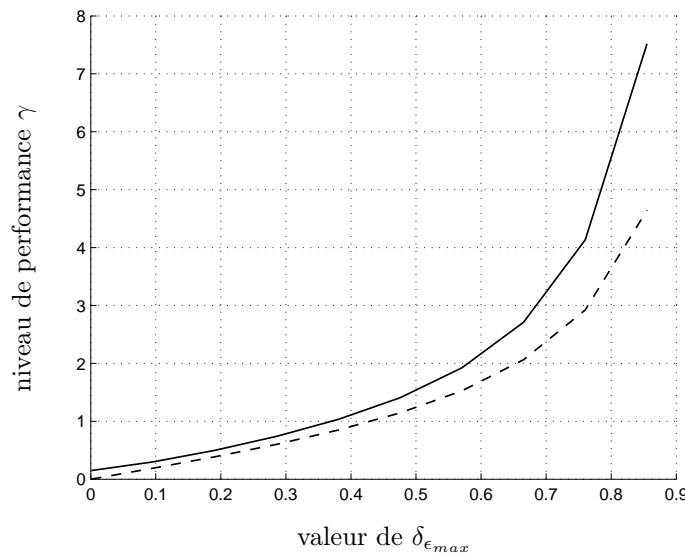


Figure 8.7 Evolution du niveau de performance en fonction de la valeur de $\delta_{\epsilon_{max}}$.

L'augmentation de γ reste modérée pour des valeurs de $\delta_{\epsilon_{max}}$ inférieures à 0.3, ce qui indique que la réponse en vitesse de lacet n'est pas trop altérée si l'incertitude sur ϵ demeure raisonnablement faible. On peut donc penser que la réponse en cap de l'avion au sol est peu sensible à la présence d'incertitudes sur la modélisation et l'estimation des forces de friction latérales, ce qui est effectivement le cas lorsque l'on réalise des simulations sur le modèle non-linéaire complet. La figure 8.8 montre par exemple le comportement de l'avion lors d'un virage de 60 deg réalisé à 10 kts pour différentes valeurs de δ_ϵ . Les réponses correspondant à des incertitudes $\delta_\epsilon = -0.5$, $\delta_\epsilon = 0$ et $\delta_\epsilon = 1$, *i.e.* à des signaux $\epsilon = 0.5\epsilon_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ et $\epsilon = 2\epsilon_0$, sont représentées en traits pleins. Elles sont quasiment superposées, ce qui illustre la quasi insensibilité du système en boucle fermée à une mauvaise estimation des niveaux de saturation, et donc des forces de friction. Si $\delta_\epsilon = -0.9$, *i.e.* $\epsilon = 0.1\epsilon_0$, on observe seulement un léger dépassement (tirets) bien que le signal d'entrée du correcteur anti-windup soit dix fois inférieur à sa valeur nominale. La réponse temporelle de l'avion reste donc satisfaisante, ce qui confirme les bonnes propriétés de robustesse du correcteur anti-windup mises en évidence au paragraphe 8.3.1. Enfin, en l'absence de compensation anti-windup, ce qui correspond à $\epsilon = 0$, l'avion reste stable mais la réponse en cap présente de très fortes oscillations (pointillés).

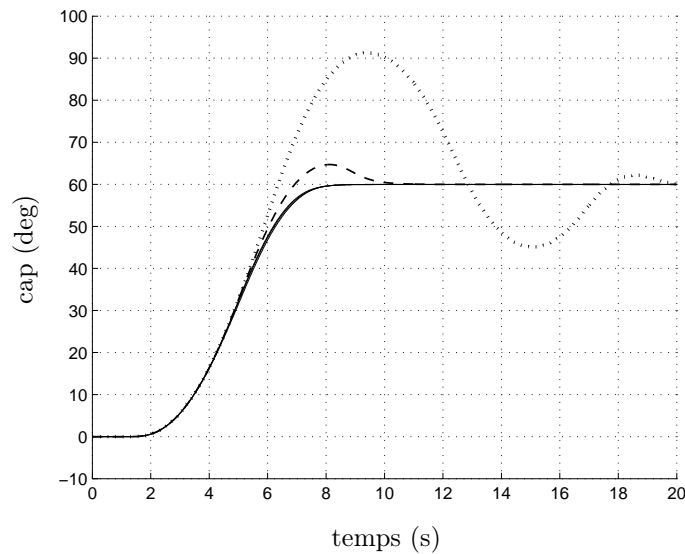


Figure 8.8 Réponses en cap pour différentes valeurs de δ_ϵ .

8.4 Evaluation du conservatisme

L'analyse de robustesse présentée dans ce chapitre peut se révéler conservatrice pour diverses raisons :

- La première source de conservatisme est inhérente aux méthodes proposées dans la partie I et donc indépendante de l'application considérée ici. Les nombreux exemples étudiés dans les chapitres 2 et 3 montrent cependant qu'elle reste le plus souvent modérée en pratique.
- Les non-linéarités introduites au chapitre 6 afin de modéliser la dynamique latérale de l'avion au sol sont représentées de manière conservatrice au paragraphe 8.1.2 par des paramètres variants, ce qui permet de convertir le problème d'analyse de robustesse non-linéaire initial en un problème mixte LTI/LTV standard. De nombreuses simulations réalisées pour un ensemble de manœuvres de référence permettent néanmoins de réduire le plus possible la taille des secteurs dans lesquels évoluent ces paramètres variants, de manière à minimiser le conservatisme.
- Enfin, la vitesse longitudinale de l'avion est considérée comme un paramètre à variations arbitrairement rapides, ce qui est loin d'être le cas en pratique. Toutefois, considérer V_x comme un paramètre LTI ne permet de garantir la stabilité que jusqu'à $k_{min} = 0.23$. La différence par rapport à la valeur $k_{min} = 0.25$ obtenue au paragraphe 8.2.2 dans le cas LTV reste minime, ce qui indique que l'hypothèse faite sur V_x est presque non-conservatrice.

Le conservatisme de la méthode d'analyse de robustesse proposée dans ce chapitre reste donc modéré. De bonnes garanties théoriques de stabilité et de performances robustes peuvent ainsi être obtenues, ce qui démontre la pertinence de l'approche anti-windup proposée au chapitre 7. D'un point de vue pratique, les simulations temporelles réalisées sur le modèle non-linéaire complet de l'avion au sol confirment que le cap peut être parfaitement contrôlé même si l'estimation des forces de friction latérales est médiocre.

Conclusion

Les non-linéarités de type saturation introduites au chapitre 6 afin de modéliser la dynamique latérale de l'avion au sol sont remplacées ici par des paramètres variants, ce qui permet d'obtenir une représentation LFT linéaire dépendant uniquement de paramètres LTV et d'incertitudes mixtes LTI/LTV. Les outils d'analyse de robustesse mis au point dans les chapitres 2 et 3 sont alors appliqués afin d'évaluer les propriétés de stabilité et de performance obtenues lorsque ce modèle est rebouclé par le correcteur anti-windup synthétisé au chapitre 7. Les résultats sont concluants, car la stabilité de l'avion en boucle fermée est garantie quel que soit l'état de la piste, pour toute variation de la vitesse longitudinale V_x dans l'intervalle $[5, 40 \text{ kts}]$, et ce malgré la présence d'incertitudes diverses. La stratégie proposée peut être généralisée à des vitesses allant jusqu'à 150 kts en prenant en compte les efforts aérodynamiques, et notamment des incertitudes LTI sur les coefficients C_n et C_y .

Notations

LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Linéaire Variant dans le Temps
NL	Non-Linéaire
$sat(\cdot)$	Fonction saturation
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
r, r_c, r_0	Vitesse de lacet, rad/s
V_x, V_y	Vitesse longitudinale, vitesse latérale, m/s
θ_{NW}	Position angulaire de la roulette avant, rad
G_{\times}, G_{\times_0}	Cornering gain, N/rad
ϵ, ϵ_0	Signal d'entrée du correcteur anti-windup
δ	Incertitude ou paramètre variant
τ	Retard

Dans les notations ci-dessus, le symbole \times vaut NW ou MG selon que le paramètre considéré est associé à la roulette avant ou au train principal. Les indices c et 0 désignent quant à eux respectivement un signal de référence (ou consigne) et une grandeur nominale.

Référence

[Roos et Biannic, 2007] C. Roos et J-M. Biannic. Chapter 9: Robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties for on-ground aircraft. Dans *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 175–194. Springer-Verlag, 2007.

Conclusion et perspectives

Contributions personnelles

La première contribution des travaux de thèse consiste à apporter des solutions permettant d'analyser la robustesse d'un système LTI soumis à des incertitudes mixtes LTI/LTV. Une approche fréquentielle est tout d'abord introduite au chapitre 2. Plus précisément, un algorithme capable de calculer le minimum global de ce problème d'optimisation de dimension infinie est mis au point et sa convergence est démontrée. Une technique de résolution sous-optimale mais plus attractive en termes de complexité numérique est également présentée. Le chapitre 3 propose quant à lui une approche état. La notion de semi-positivité réelle pour un système à données complexes est ainsi définie. Elle se révèle particulièrement pertinente dans un contexte d'analyse de robustesse, car elle permet d'obtenir une formulation d'état convexe et de dimension finie d'une borne supérieure de la valeur singulière structurée μ . De plus, l'extension à l'analyse de robustesse en présence d'incertitudes mixtes LTI/LTV s'avère aisée. Il est important de souligner que les résultats d'analyse obtenus dans ces deux chapitres s'expriment tous sous forme de problèmes d'optimisation convexes pour lesquels il existe des solveurs performants. En outre, les outils développés sont généralisés au problème de synthèse de précommande robuste, dont on montre qu'il est lui aussi convexe à l'unique condition de fixer les pôles de la précommande. Une procédure itérative est enfin mise au point afin de synthétiser un correcteur robuste d'ordre et de structure très généraux.

La seconde contribution consiste à proposer un ensemble d'outils permettant de synthétiser un correcteur anti-windup d'ordre quelconque. Une formulation convexe du problème d'ordre plein est ainsi établie au chapitre 5. La convexité est perdue dans le cas général mais peut être restaurée dès que la dynamique du correcteur est fixée. Dans ce contexte, un algorithme permettant de déterminer un ensemble de pôles pertinents puis un correcteur d'ordre réduit adéquat est alors introduit. Une stratégie est ensuite élaborée afin de contraindre les pôles du correcteur et d'éviter ainsi l'apparition de dynamiques lentes susceptibles de dégrader les performances temporelles. Les résultats obtenus sont finalement généralisés aux systèmes variants et/ou incertains. Dans tous les cas, la convexité est préservée pour des correcteurs d'ordre plein.

Enfin, la dernière contribution est d'ordre méthodologique, puisqu'une stratégie complète est développée afin de réaliser l'asservissement en vitesse de lacet et en cap d'un avion de transport civil lors de la phase de roulage au sol. Une application judicieuse des différents outils théoriques développés au cours de la thèse conduit en effet à l'obtention d'un correcteur de complexité modérée, dont la structure relativement simple dépend de paramètres physiques, et qui admet en outre une représentation LFT le rendant facilement implantable dans un calculateur en vue d'une possible utilisation sur avion réel. De nombreuses simulations révèlent que l'avion est parfaitement contrôlé sur une large plage de

vitesse, quel que soit l'état de la piste, et ce malgré la présence de paramètres incertains et de fortes non-linéarités.

Bilan et perspectives

Des outils d'analyse de robustesse et de synthèse de lois de commande en présence de saturations, d'incertitudes et de variations paramétriques ont été développés. Ils ont été implantés de manière à pouvoir être directement exploités dans un contexte très général et sur des applications variées. A titre d'exemple, la mise au point d'une stratégie permettant de contrôler la dynamique latérale d'un avion au sol a démontré que de tels outils étaient capables d'apporter une réponse efficace à des problématiques industrielles très spécifiques. L'accent a notamment été mis sur le fait que les techniques anti-windup, dont l'objectif est généralement de minimiser la dégradation de performance due à la présence d'actionneurs saturés, pouvaient se montrer tout à fait pertinentes dans un contexte bien moins conventionnel, à savoir la maîtrise du dérapage d'un avion au sol.

Pour autant, plusieurs pistes restent à creuser et pourront faire l'objet de travaux futurs. Il existe en effet peu de paramètres physiques susceptibles de varier arbitrairement vite dans le temps et il serait pertinent de pouvoir définir explicitement une borne sur la vitesse de variation de certains d'entre eux. D'autre part, les résultats obtenus dans la première partie du manuscrit permettent certes de considérer des incertitudes quelconques - réelles ou complexes, LTI ou LTV - ainsi que diverses catégories de non-linéarités, mais ils ne sont pas directement applicables aux systèmes présentant des saturations. Ces dernières doivent en effet être modélisées par des paramètres variants afin d'être étudiées, ce qui est source de conservatisme. A l'inverse, les résultats obtenus dans la deuxième partie du manuscrit s'appuient sur une représentation adéquate des non-linéarités de type saturation, mais il n'est possible de considérer dans le même temps que des variations paramétriques complexes, ce qui là encore revient à introduire du conservatisme. Il serait donc souhaitable de parvenir à prendre en compte simultanément des incertitudes, des paramètres variants et des non-linéarités de type saturation au cours d'une même analyse ou synthèse, et ce sans aucune hypothèse spécifique sur leur nature. Cela permettrait par exemple de simplifier la procédure en deux étapes proposée dans la troisième partie du manuscrit et d'éviter ainsi de réaliser *a posteriori* une analyse de robustesse pouvant parfois se révéler délicate.

Des améliorations sont donc possibles, mais l'application en l'état des méthodes proposées au contrôle latéral de l'avion au sol indique que le conservatisme évoqué ci-dessus demeure tout à fait raisonnable en pratique. Les travaux menés au cours de la thèse montrent donc qu'un nombre limité d'outils développés dans un contexte suffisamment général est en mesure d'apporter des réponses pertinentes à des problématiques ambitieuses auxquelles se retrouve aujourd'hui confrontée l'industrie aéronautique.

Annexe

DÉFINITIONS ET RÉSULTATS TECHNIQUES

L'objectif de cette annexe est de regrouper les définitions et les résultats techniques utiles à la compréhension du manuscrit. Le parti pris consiste à se concentrer sur l'essentiel puis à proposer quelques références pour les lecteurs désireux d'en savoir plus.

Transformations Fractionnaires Linéaires (LFT)

LFT supérieure et inférieure

On distingue deux transformations fractionnaires linéaires qui correspondent aux deux interconnexions représentées sur la figure A.1.

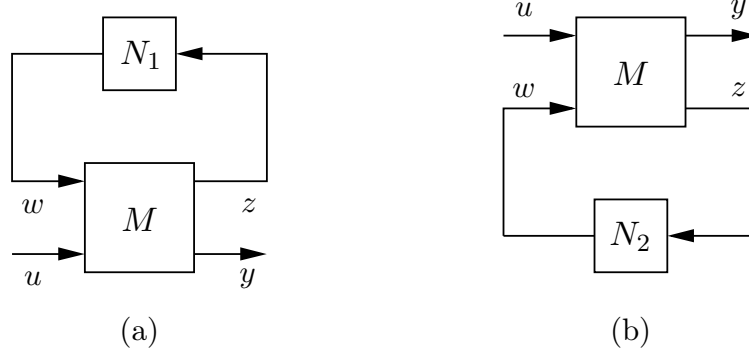


Figure A.1 LFT supérieure (a) et inférieure (b).

Elles sont définies formellement de la manière suivante [Zhou *et al.*, 1996].

Définition A.1 (LFT) Soient $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$, $N_1 \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ et $N_2 \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$.

- Si la matrice $(I - M_{11}N_1)^{-1}$ existe, la LFT supérieure est la fonction \mathcal{F}_u définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(M, \bullet) &: \mathbb{C}^{q_1 \times p_1} \rightarrow \mathbb{C}^{p_2 \times q_2} \\ \mathcal{F}_u(M, N_1) &= M_{22} + M_{21}N_1(I - M_{11}N_1)^{-1}M_{12} \end{aligned} \tag{A.1}$$

- Si la matrice $(I - M_{22}N_2)^{-1}$ existe, la LFT inférieure est la fonction \mathcal{F}_l définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(M, \bullet) &: \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \rightarrow \mathbb{C}^{p_1 \times q_1} \\ \mathcal{F}_l(M, N_2) &= M_{11} + M_{12}N_2(I - M_{22}N_2)^{-1}M_{21} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Produit de Redheffer

Le produit de Redheffer est associé à l'interconnexion représentée sur la figure A.2.

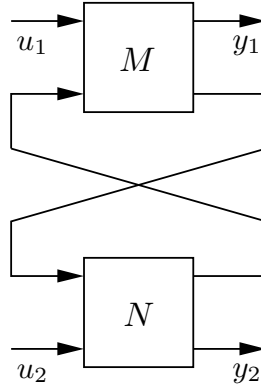


Figure A.2 *Produit de Redheffer.*

Il est défini formellement de la manière suivante [Zhou *et al.*, 1996].

Définition A.2 (produit de Redheffer) Soient $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$

et $N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(q_2+q_3) \times (p_2+p_3)}$. Si les matrices $(I - M_{22}N_{11})^{-1}$ et $(I - N_{11}M_{22})^{-1}$ existent, le produit de Redheffer est la fonction \mathcal{R} définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bullet, \bullet) &: \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)} \times \mathbb{C}^{(q_2+q_3) \times (p_2+p_3)} \rightarrow \mathbb{C}^{(p_1+q_3) \times (q_1+p_3)} \\ \mathcal{R}(M, N) &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_l(M, N_{11}) & M_{12}(I - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \\ N_{21}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} & \mathcal{F}_u(N, M_{22}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)

Quelques éléments historiques

L'origine des LMI remonte à la fin du 19^{ème} siècle, lorsque Lyapunov publie ses travaux sur la stabilité des systèmes [Lyapunov, 1992]. Il montre en particulier qu'un système régi par l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que $A^T P + P A < 0$, et que cette inégalité peut être résolue analytiquement. Lur'e et Postnikov sont les premiers dans les années 1940 à appliquer cette théorie à des problèmes pratiques dans le domaine de l'automatique. Ils proposent un critère de stabilité qui se présente sous forme de LMI et permet notamment d'étudier des systèmes dont l'actionneur présente une non-linéarité [Lur'e et Postnikov, 1944]. Les inégalités obtenues sont résolues à la main, ce qui limite leur utilisation à des systèmes de petite taille.

Néanmoins, leurs travaux montrent que la théorie de Lyapunov a un brillant avenir devant elle [Lur'e, 1957]. Des avancées significatives sont alors réalisées dans les années 1960, notamment sous l'impulsion de Yakubovich :

- le lemme positif réel, ou lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [Kalman, 1963; Popov, 1962; Yakubovich, 1962], conduit à des techniques graphiques de résolution pour des systèmes présentant une seule non-linéarité (critères du cercle, de Popov, de Tsytkin),
- le problème LMI associé à ce même lemme est résolu quelques années plus tard à partir des solutions symétriques d'une équation de Riccati algébrique [Willems, 1971].

Ces travaux permettent peu à peu de considérer des problèmes de taille plus importante, mais ils ne sont généralement applicables qu'à des familles particulières de LMI. C'est finalement au début des années 1980 que l'on prend conscience qu'il est possible de résoudre des LMI de forme beaucoup plus générale par des techniques d'optimisation convexe. Le développement de méthodes de points intérieurs très efficaces [Nesterov et Nemirovskii, 1994] et l'augmentation constante de la puissance des calculateurs ont motivé la reformulation de nombreux problèmes sous forme d'inégalités matricielles linéaires, qui représentent aujourd'hui l'un des outils privilégiés de l'automaticien [Boyd *et al.*, 1994; Scherer et Weiland, 2005; Boyd et Vandenberghe, 2004].

Définition formelle et formulation pratique

Définition A.3 (inégalité matricielle linéaire) *On appelle inégalité matricielle linéaire toute équation du type :*

$$F(z) > 0 \tag{A.4}$$

où $F : V \rightarrow S^N$ représente une fonction affine définie sur un espace vectoriel V et à valeurs dans l'ensemble $S^N = \{M \in \mathbb{R}^{N \times N} : M = M^T\}$.

Remarque A.4 *L'inégalité $F(z) > 0$ signifie que la matrice symétrique $F(z)$ est définie positive, i.e. $u^T F(z) u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. De manière équivalente, la plus petite valeur propre de $F(z)$ est positive.*

Remarque A.5 *Un ensemble de LMI peut être traité comme une seule LMI structurée. Les deux assertions ci-dessous sont en effet équivalentes :*

1. $F_i(z) > 0$ pour tout $i \in [1, m]$
2. $\text{diag}(F_1(z), \dots, F_m(z)) > 0$

Remarque A.6 *En pratique, les variables de décision z sont généralement stockées sous forme matricielle. Il existe alors deux scalaires p et q tels que $V = \mathbb{R}^{p \times q}$.*

Problèmes génériques et méthodes de résolution

Soient $F, G : V \rightarrow S^{N_1}$ et $H : V \rightarrow S^{N_2}$ des fonctions affines. Soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, où $\mathcal{S} = \{z \in V : F(z) > 0\}$. Il existe trois problèmes génériques faisant intervenir des LMI :

- Le problème de faisabilité consiste à trouver une valeur de $z \in V$ telle que $F(z) > 0$. En pratique, on cherche généralement un vecteur z qui minimise le scalaire $t \in \mathbb{R}$ sous la contrainte $-F(z) < t I_{N_1}$. Si la valeur minimale de t obtenue est négative, le problème est faisable.

- Le problème aux valeurs propres consiste à déterminer la valeur de $z \in V$ qui minimise $f(z)$ sous la contrainte $F(z) > 0$.
- Le problème aux valeurs propres généralisé consiste à minimiser le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} \lambda F(z) - G(z) > 0 \\ F(z) > 0 \\ H(z) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Remarque A.7 Dans tous les cas, les inégalités sont strictes. Ce n'est cependant pas restrictif, car toute LMI non stricte peut se ramener à une LMI stricte [Boyd et al., 1994].

La plupart des problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans les domaines de la commande, de l'identification ou du traitement du signal peuvent s'exprimer à l'aide d'inégalités matricielles linéaires sous l'une des trois formes ci-dessus. Par exemple, étudier la stabilité du système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ revient à déterminer s'il existe une matrice $P \in S^n$ telle que $F(P) > 0$, avec $F(P) = \text{diag}(P, -A^T P - PA) \in S^{2n}$. Il s'agit donc d'un problème de faisabilité.

Remarque A.8 Les trois problèmes énoncés ci-dessus sont convexes ou quasi-convexes, ce qui garantit l'existence d'un optimum global, mais ils ne sont en revanche pas différentiables. Il existe principalement deux familles de méthodes permettant de les résoudre :

- les méthodes des plans sécants, introduites dans le cadre de la programmation convexe au cours des années 1970 [Elzinga et Moore, 1975], puis appliquées une quinzaine d'années plus tard dans le domaine de la commande robuste [Geromel et al., 1991].
- les méthodes de points intérieurs, développées dans le cadre de la résolution de LMI par deux mathématiciens russes [Nesterov et Nemirovskii, 1994].

Elles permettent toutes les deux de calculer l'optimum global du problème en temps polynomial. Les méthodes de points intérieurs présentent cependant l'avantage d'être sensiblement plus rapides et de traiter efficacement des problèmes de taille relativement grande comportant quelques centaines voire milliers de variables. Elles sont d'ailleurs implantées dans la Robust Control Toolbox pour Matlab [Balas et al., 2007].

Complément de Schur

Le complément de Schur permet d'écrire sous forme de LMI certaines inégalités matricielles non-linéaires.

Lemme A.9 (complément de Schur) Soient $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ des matrices symétriques et $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 1. & \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & S \end{bmatrix} > 0 \\ 2. & \begin{cases} R > 0 \\ S - M^T R^{-1} M > 0 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} S > 0 \\ R - M S^{-1} M^T > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme de projection

Le lemme de projection a été introduit par [Gahinet et Apkarian, 1994]. Il permet de transformer une BMI en LMI en éliminant certaines variables, qui correspondent généralement aux matrices d'état du correcteur que l'on cherche à optimiser.

Lemme A.10 (lemme de projection) Soient $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique et $P \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{q \times m}$ deux matrices quelconques. Il existe une matrice $\Theta \in \mathbb{R}^{q \times p}$ telle que :

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 \quad (\text{A.6})$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} N_P^T \Psi N_P < 0 \\ N_Q^T \Psi N_Q < 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où N_P et N_Q représentent n'importe quelles matrices dont les colonnes forment des bases des noyaux de P et Q .

L'idée est de regrouper toutes les variables à éliminer dans la matrice Θ puis d'appliquer le lemme de projection. Une fois le problème (A.7) résolu, la matrice Ψ obtenue permet de construire explicitement Θ en s'appuyant sur le lemme de complétion matricielle rappelé ci-dessous [Packard *et al.*, 1991].

Lemme A.11 (lemme de complétion matricielle) Soient $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices hermitiennes définies positives. Soit m un entier positif. Il existe une matrice $X_2 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ et une matrice hermitienne $X_3 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

où les symboles \bullet désignent des éléments quelconques, si et seulement si :

$$X - Y^{-1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}(X - Y^{-1}) \leq m \quad (\text{A.9})$$

Remarque A.12 Une extension du lemme A.10 ainsi qu'une paramétrisation de l'ensemble des solutions sont proposés par [Skelton *et al.*, 1997] sous le nom de théorème de Finsler généralisé. On notera que le résultat initial obtenu par Finsler et rappelé dans [Jacobson, 1977] se limite à l'énoncé de la condition nécessaire (A.6) \Rightarrow (A.7).

Remarque A.13 Une autre technique fréquemment mise en œuvre pour transformer une BMI en LMI consiste à appliquer le changement de variable introduit par [Scherer *et al.*, 1997]. Elle permet notamment de faire disparaître les produits entre les matrices de Lyapunov et les matrices d'état du correcteur recherché.

Lemme positif réel et lemme de Kalman-Yakubovich-Popov

On considère dans ce paragraphe un système linéaire décrit par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$, ou par sa matrice de transfert :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.11})$$

Le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) est issu des travaux de [Kalman, 1963; Popov, 1962; Yakubovich, 1962], généralisés quelques années après par [Anderson, 1967].

Proposition A.14 (lemme KYP) *Soit un système linéaire gouvernable décrit par sa représentation d'état (A.10). Soit $M = M^T \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'inégalité $\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \geq 0$ est satisfaite pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant $\det(j\omega I - A) \neq 0$,*
2. *il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - M \leq 0$.*

Une preuve de ce résultat est proposée par [Rantzer, 1996].

Remarque A.15 *La proposition A.14 reste valable si les inégalités sont strictes. Dans ce cas, l'hypothèse de gouvernabilité n'est plus nécessaire.*

Remarque A.16 *Lorsque la matrice A est Hurwitz, P est nécessairement positive.*

Le lemme positif réel est un cas particulier du lemme KYP qui consiste à choisir :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Proposition A.17 (lemme positif réel) *Soit un système linéaire gouvernable décrit par sa représentation d'état (A.10) ou sa fonction de transfert (A.11). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$G(j\omega) + G(j\omega)^* \geq 0$ pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant $\det(j\omega I - A) \neq 0$,*
2. *il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D - D^T \end{bmatrix} \leq 0$.*

Des généralisations du lemme KYP à des intervalles de pulsations quelconques ont récemment été proposées par [Iwasaki et Hara, 2005].

S-procédure

La \mathcal{S} -procédure, dont la dénomination aurait été introduite par [Aizerman et Gantmacher, 1964], est fréquemment utilisée en automatique pour étudier la stabilité et le niveau de performance des systèmes non-linéaires ou incertains. Elle permet de remplacer une condition non convexe par une condition suffisante et donc conservatrice, mais qui admet quant à elle une formulation convexe. Une telle démarche a été utilisée de manière implicite dès les années 1950, mais les premiers résultats marquants sont l'œuvre de Yakubovich dans les années 1970.

Le principe de la \mathcal{S} -procédure est le suivant. Soient des fonctions $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_i : V \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$. On considère les deux conditions ci-dessous :

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{0\} \quad \text{tel que} \quad h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (\text{A.13})$$

$$\exists \tau_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, m \quad \text{tels que} \quad f(x) - \sum_{i=1}^m \tau_i h_i(x) > 0 \quad (\text{A.14})$$

Ces deux conditions ne sont pas équivalentes en général, mais il est évident que (A.14) implique toujours (A.13). La réciproque est vraie sous certaines hypothèses. On dit alors que la \mathcal{S} -procédure est non pessimiste ou *lossless*. La proposition A.19 présente quelques résultats particulièrement utiles en pratique.

Définition A.18 (contrainte régulière) *La contrainte $h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$ est dite régulière s'il existe $x_0 \in V$ tel que $h_i(x_0) > 0, i = 1, \dots, m$.*

Proposition A.19 (non pessimisme de la \mathcal{S} -procédure) *On suppose que la contrainte $h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$ est régulière.*

- Si les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéaires, la \mathcal{S} -procédure est non pessimiste quelle que soit la valeur de m .
- Si les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont quadratiques, la \mathcal{S} -procédure est non pessimiste pour $m = 1$ [Yakubovich, 1971; 1973].
- Si les fonctions $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont quadratiques, la \mathcal{S} -procédure est non pessimiste pour $m \leq 2$ [Fradkov et Yakubovich, 1979].

Remarque A.20 *Le cas des fonctions quadratiques se révèle pertinent lorsque l'on étudie la stabilité d'un système à l'aide de la théorie de Lyapunov. Dans ce cas, la condition (A.14) s'exprime généralement sous la forme d'une LMI que l'on peut résoudre aisément.*

De nombreuses extensions ont été proposées par [Yakubovich, 1992; Megretski et Treil, 1993], et plus récemment par [Iwasaki *et al.*, 2000], qui propose notamment le résultat ci-dessous dans le cas de fonctions quadratiques complexes.

Définition A.21 *Un ensemble \mathcal{Q} de matrices hermitiennes de taille $n \times n$ est dit non conservatif si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. \mathcal{Q} est convexe,
2. $Q \in \mathcal{Q} \Rightarrow \tau Q \in \mathcal{Q} \forall \tau > 0$,
3. pour toute matrice non nulle $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $H = H^* \geq 0$ et $\text{trace}(QH) \leq 0 \forall Q \in \mathcal{Q}$, il existe des vecteurs $x_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, r$ tels que $H = \sum_{i=1}^r x_i x_i^*$ et $x_i^* Q x_i \leq 0 \forall Q \in \mathcal{Q}$.

Proposition A.22 (\mathcal{S} -procédure généralisée) *Soient P une matrice hermitienne et \mathcal{Q} un ensemble de matrices hermitiennes non conservatif. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $x^* P x > 0 \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $x^* Q x \geq 0 \forall Q \in \mathcal{Q}$
2. $\exists Q \in \mathcal{Q}$ telle que $P - Q > 0$

On ne relie donc plus le caractère non pessimiste de la \mathcal{S} -procédure au nombre m de contraintes, qui peut être quelconque du moment que les matrices Q vérifient les propriétés énoncées dans la définition A.21.

Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI)

De nombreux problèmes d'optimisation rencontrés en automatique s'expriment naturellement sous forme de BMI, mais peuvent être transformés à l'aide des techniques présentées ci-dessus de manière à ne faire intervenir que des LMI. Cependant, lorsque le conservatisme qui en résulte est trop important ou tout simplement qu'une telle reformulation n'est

pas possible et que l'on souhaite éviter une démarche itérative n'offrant aucune garantie de converger vers l'optimum recherché, on peut envisager la résolution directe de ces problèmes BMI. Cela permet de traiter une classe beaucoup plus large de problèmes d'optimisation. Cependant, cette généralisation a un prix car la perte de la convexité qui en résulte pose des difficultés considérables, notamment en termes de complexité numérique.

Théorème A.23 [Toker et Ozbay, 1995] *Le problème de déterminer un élément qui vérifie un ensemble de contraintes BMI est NP-difficile.*

Il existe aujourd'hui des solveurs BMI. Malheureusement, les techniques de résolution sont encore loin d'être matures et ne permettent généralement pas de traiter efficacement des problèmes faisant intervenir plus de quelques dizaines de variables. Elles sont donc difficilement exploitables dès que l'on cherche à optimiser des matrices de type Lyapunov, ce qui est généralement le cas des problèmes rencontrés au cours de la thèse.

Références

- [Aizerman et Gantmacher, 1964] M.A. Aizerman et F.R. Gantmacher. *Absolute stability of control systems*. Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [Anderson, 1967] B.D.O. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM Journal of Control*, 5(2): 171–182, 1967.
- [Balas et al., 2007] G. Balas, R. Chiang, A. Packard et M. Safonov. *Robust Control Toolbox user's guide*. The MathWorks, Inc., 2007.
- [Boyd et al., 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in systems and control theory*. Studies in Applied Mathematics 15, SIAM, 1994.
- [Boyd et Vandenberghe, 2004] S. Boyd et L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [Elzinga et Moore, 1975] J. Elzinga et T.G. Moore. A central cutting plane algorithm for the convex programming problem. *Mathematical Programming*, 8(2): 134–145, 1975.
- [Fradkov et Yakubovich, 1979] A.L. Fradkov et V.A. Yakubovich. The S-procedure and a duality relations in nonconvex problems of quadratic programming. *Vestnik Leningrad University*, 6: 101–109, 1979.
- [Gahinet et Apkarian, 1994] P. Gahinet et P. Apkarian. A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4: 421–448, 1994.
- [Geromel et al., 1991] J.C. Geromel, P. Peres et J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29(2): 381–402, 1991.
- [Iwasaki et al., 2000] T. Iwasaki, G. Meinsma et M. Fu. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6(2-3): 305–320, 2000.
- [Iwasaki et Hara, 2005] T. Iwasaki et S. Hara. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1): 41–59, 2005.
- [Jacobson, 1977] D.H. Jacobson. *Extension of linear-quadratic control, optimization and matrix theory*. Academic Press, New York, 1977.
- [Kalman, 1963] R.E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 49(2): 201–205, 1963.

- [Lur'e et Postnikov, 1944] A.I. Lur'e et V.N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 8(3), 1944.
- [Lur'e, 1957] A.I. Lur'e. *Some nonlinear problems in the theory of automatic control*. H.M. Stationary Office, Londres, 1957.
- [Lyapunov, 1992] A.M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 55(3): 531–773, 1992.
- [Megretski et Treil, 1993] A. Megretski et S. Treil. Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 3(3): 310–319, 1993.
- [Nesterov et Nemirovskii, 1994] Y.E. Nesterov et A.S. Nemirovskii. *Interior-point polynomial methods in convex programming: theory and applications*. Studies in Applied Mathematics 13, SIAM, 1994.
- [Packard *et al.*, 1991] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey et G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMI's. Dans *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1245–1250, Brighton, Royaume-Uni, Décembre 1991.
- [Popov, 1962] V.M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 22: 857–875, 1962.
- [Rantzer, 1996] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28(1): 7–10, 1996.
- [Scherer *et al.*, 1997] C. Scherer, P. Gahinet et M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7): 896–911, 1997.
- [Scherer et Weiland, 2005] C. Scherer et S. Weiland. Linear Matrix Inequalities in control. Disponible à l'adresse <http://www.dsc.tudelft.nl/%7Ecscherer/2416/lmi.html>, 2005.
- [Skelton *et al.*, 1997] R.E. Skelton, T. Iwasaki et K. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor and Francis, Londres, 1997.
- [Toker et Ozbay, 1995] O. Toker et H. Ozbay. On the NP-hardness of solving Bilinear Matrix Inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2056–2064, Seattle, USA, Juin 1995.
- [Willems, 1971] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6): 621–634, 1971.
- [Yakubovich, 1962] V.A. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Mathematics Doklady*, 3: 620–623, 1962.
- [Yakubovich, 1971] V.A. Yakubovich. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad University*, 1: 62–77, 1971.
- [Yakubovich, 1973] V.A. Yakubovich. Minimization of quadratic functionals under quadratic constraints and the necessity of a frequency condition in the quadratic criterion for absolute stability of nonlinear control systems. *Soviet Mathematics Doklady*, 14(2): 593–597, 1973.
- [Yakubovich, 1992] V.A. Yakubovich. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints. *Systems and Control Letters*, 19(1): 13–22, 1992.
- [Zhou *et al.*, 1996] K. Zhou, J. Doyle et K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

Liste des publications

Journaux

- [1] J-M. Biannic, C. Roos et A. Knauf. Design and robustness analysis of fighter aircraft flight control laws. *European Journal of Control*, 12(1) : 71-85, 2006.
- [2] S. Gaulocher, C. Roos et C. Cumer. Aircraft load alleviation during maneuvers using optimal control surface combinations. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 30(2) : 591-600, 2007.
- [3] G. Ferreres et C. Roos. Robust feedforward design in the presence of LTI/LTV uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(14) : 1278-1293, 2007.
- [4] C. Roos et J-M. Biannic. A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers. *A paraître dans Automatica*, 2008.

Chapitres de livre

- [5] C. Roos, J-M. Biannic, S. Tarbouriech et C. Prieur. Chapter 7: On-ground aircraft control design using an LPV anti-windup approach. *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 117-145. Springer-Verlag, 2007.
- [6] C. Roos et J-M. Biannic. Chapter 9: Robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties for on-ground aircraft. *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, pages 175-194. Springer-Verlag, 2007.

Conférences

- [7] G. Ferreres et C. Roos. Efficient convex design of robust feedforward controllers. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6460-6465, Séville, Espagne, décembre 2005.
- [8] C. Roos et J-M Biannic. A positivity approach to robust controllers analysis and synthesis versus mixed LTI/LTV uncertainties. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3661-3666, Minneapolis, USA, juin 2006.
- [9] C. Roos et J-M Biannic. On robustness analysis versus mixed LTI/LTV uncertainties. *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, juillet 2006.
- [10] J-M. Biannic, A. Marcos, M. Jeanneau et C. Roos. Nonlinear simplified LFT modelling of an aircraft on ground. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2213-2218, Munich, Allemagne, octobre 2006.

- [11] C. Roos et J-M. Biannic. Aircraft-on-ground lateral control by an adaptive LFT-based anti-windup approach. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 2207-2212, Munich, Allemagne, octobre 2006.
- [12] J-M. Biannic, C. Roos et S. Tarbouriech. A practical method for fixed-order anti-windup design. *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 527-532, Pretoria, Afrique du Sud, août 2007.