Notation

- $\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
- $M_n(\mathbb{C})$ représente l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.
- 0_n est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{C})$.
- $Gl_n(\mathbb{C})$ représente l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, on note P^{-1} son inverse.
- $\mathscr{D}$ est l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$
- $\mathscr{N}$ est l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$. L'indice de nilpotence d'une matrice $N \in \mathscr{N}$ est le plus petit entier p tel que $N^p = 0_n$.
- Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note $P_M(X) = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique.
- On appelle norme d'algèbre toute norme de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

- $L(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.
- Pour tout $f \in L(E)$ et pour tout V sous-ensemble de E, on définit l'application f restreinte à V par $f_{|V} : V \to E$ telle que $f_{|V}(x) = f(x)$ pour tout $x \in V$.
- Enfin, on rappelle (théorème de Bézout) que deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.

Partie 1 Définition de l'exponentielle de matrice

On se place dans $M_n(\mathbb{C})$. Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est telle que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose $\|A\| = n \cdot \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Cette application définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre.
2. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$, on dit que $\sum_k A_k$ converge s'il existe une matrice $L \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} \| \sum_{j=0}^{k} A_j - L \| = 0.$$

On admettra qu'une série de matrice $\sum_k A_k$ converge si la série numérique de terme général $\|A_k\|$ converge. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\displaystyle\sum_k \frac{A^k}{k!}$ converge. On note $\exp(A)$ ou e^A la limite $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.