On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On note $I = [1, 2]$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur I. Dresser le tableau de ses variations sur I.
2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
3. Montrer avec soin que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite l appartient à I et vérifie $f(l) = l$.
4. En déduire que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est $\sqrt{2}$.
5. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
8. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
9. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{2}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-2} ?