

EXERCICE 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I .
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I .

On note α ce nombre.