Degré topologique de Brouwer

Seirios

Août 2013

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce document est de faire davantage connaître un outil très puissant dans l'étude des propriétés topologiques des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$, à savoir le degré topologique de Brouwer. En effet, la plupart des propriétés topologiques telles que le théorème de Jordan, le théorème d'invariance du domaine ou le théorème de la boule chevelue, que l'on démontre le plus souvent grâce à une théorie homologique, peuvent également être démontrés en utilisant le degré topologique de Brouwer ; qui plus est, cette dernière théorie nécessite moins de travaille pour être introduite.

Le problème initial est le suivant : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et $p \in \mathbb{R}^n$. L'équation $f(x) = p$ admet-elle une solution ?

Lorsque f est linéaire, une condition suffisante évidente pour que l'équation ait une solution est que $\det(f) \neq 0$. De manière analogue, le degré $\deg(f, \Omega, p)$ de f au point p sur l'ouvert Ω sera un entier de sorte que si $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ alors l'équation $f(x) = p$ admettra une solution dans Ω.

L'observation clef est que la quantité $\sum_{x\in f^{-1}(p)} \mathrm{sign}(J_f(x))$, où J_f est le jacobien de f, est bien plus facile à calculer que $\mathrm{card} f^{-1}(p)$, et qui plus est se trouve être une propriété topologique plutôt que différentielle, dans le sens où celle-ci est (presque) invariante par homotopie. Bien sûr, si cette quantité est non nulle, l'équation $f(x) = p$ a clairement une solution.

La difficulté est alors d'étendre cette définition aux fonctions continues, qui ne sont a priori pas différentiables. Ce problème sera résolu dans la troisième section, où nous exposerons une construction possible du degré topologique de Brouwer. Les deux sections précédentes seront réservées à une approche axiomatique du degré topologique.

La quatrième section est entièrement consacrée aux applications possibles du degré topologique de Brouwer. On pourra y trouver des résultats liés à la résolution d'équations du type $f(x) = p$, comme des problèmes de surjectivité ou de point fixe, ou bien des résultats en topologie et en analyse complexe.

1 Définition axiomatique

Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des triplets (f, Ω, p) où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ est une application continue et $p \in \mathbb{R}^n$ est un point tel que $p \notin f(\partial\Omega)$.

Définition 1.1 : Un degré topologique est une application $\deg : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ vérifiant :
 (*normalité*) $\deg(\mathrm{Id}, \Omega, p) = 1$ si $p \in \Omega$,
 (*additivité*) Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ sont deux ouverts disjoints tels que $p \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$,
 (*invariance homotopique*) Si $H : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ et $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sont continues avec $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $\deg(H(0,\cdot), \Omega, y(0)) = \deg(H(1,\cdot), \Omega, y(1))$.

Commençons par montrer quelques propriétés d'un tel degré :

Propriété 1.2 : Soit $d : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ un degré. Alors :
 (i) Si $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, alors il existe $y \in \Omega$ tel que $f(y) = p$.
 (ii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - z, \Omega, p - z)$.
 (iii) Si $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continue et $q \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $\sup_{x\in\partial\Omega} \|f(x) - g(x)\| + \|p - q\| < d(p, f(\partial\Omega))$, alors $\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, q)$.
 (iv) $\deg(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$.
 (v) Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Preuve : Montrons (i). Raisonnons par contraposition et suppose que $x \notin f^{-1}(\Omega)$. Alors $p \notin f^{-1}(\overline{\Omega}\backslash\emptyset \cup \emptyset)$, d'où $\deg(f, \Omega, p) = 2\deg(f, \emptyset, p)$ par additivité. De même, $p \notin f^{-1}(\emptyset\backslash\emptyset \cup \emptyset)$ d'où $\deg(f, \emptyset, p) = 2\deg(f, \emptyset, p)$, ie. $\deg(f, \emptyset, p) = 0$. On en déduit que $\deg(f, \Omega, p) = 0$.

Montrons (ii). Introduisons $H : (t, x) \mapsto f(x) - tz$ et $y : t \mapsto p - tz$. Remarquons que s'il existe $t \in [0,1]$ tel que $y(t) \in H(t, \partial\Omega)$, alors $p \in f(\partial\Omega)$, ce qui est impossible puisque $(f, \Omega, p) \in \mathcal{A}_n$ par hypothèse. Par invariance homotopique, on en déduit que $\deg(f, \Omega, p) = \deg(H(0,\cdot), \Omega, y(0)) = \deg(H(1,\cdot), \Omega, y(1)) = \deg(f - z, \Omega, p - z)$.

Montrons (iii). Introduisons $H : (t, x) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x)$ et $y : t \mapsto (1 - t)p + tq$. S'il existe $t \in [0,1]$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $y(t) = H(t, x)$, on aurait $p - f(x) = t(p - q) + t(g(x) - f(x))$, d'où $d(p, \partial\Omega) \leq \|p - q\| + \sup_{x\in\partial\Omega} \|g(x) - f(x)\|$, ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi, par invariance homotopique, $\deg(f, \Omega, p) = \deg(H(0,\cdot), \Omega, y(0)) = \deg(H(1,\cdot), \Omega, y(1)) = \deg(g, \Omega, q)$.

Le point (iv) est une conséquence de (iii), montrant notamment que $\deg(f, \Omega, \cdot)$ est localement constante.

Montrons (v). Notons $T_{f,\Omega,y}(z) = \deg(f(\cdot - z), z+\Omega, y)$; cette application est bien définie puisque $y \notin f(\partial\Omega) = f(\partial(z+\Omega) - z)$. Montrons que $T_{f,\Omega,y}$ est localement constante en 0.

Nous déduirons alors que $T_{f,\Omega,y}$ est localement constante en tout point puisque $T_{f,\Omega,y}(z + z_0) = T_{f(\cdot - z_0), z_0+\Omega, y}(z)$, et donc constante par connexité de $\mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$\deg(f(\cdot - z), z + \Omega, y) = T_{f,\Omega,y}(z) = T_{f,\Omega,y}(0) = \deg(f, \Omega, y).$$

Notons $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > s\}$ et supposons par l'absurde que $y \in f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_s)$ pour tout $s > 0$, ie. $y = f(x_s)$ pour un certain $x_s \notin \Omega_s$.

Par compacité de $\overline{\Omega}$, nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(x_{1/n})_n$ converge vers un $x \in \overline{\Omega}$. Puisque $d(x_{1/n}, \partial\Omega) \leq 1/n$, on en déduit que $d(x, \partial\Omega) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(x_{1/n}, \partial\Omega) = 0$ ie. $x \in \partial\Omega$. Ainsi, $y = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{1/n}) = f(x) \in f(\partial\Omega)$, une contradiction.

Soit donc $s > 0$ tel que $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$. En particulier, $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_s \cup \emptyset)$ d'où par additivité

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_s, y) + \underbrace{\deg(f, \emptyset, y)}_{=0} = \deg(f, \Omega_s, y).$$

Ensuite, si $z \in B(0, s)$, alors $\Omega_s \subset z + \Omega$ d'où $\overline{z + \Omega} \backslash \Omega_z - z = \overline{\Omega} \backslash (\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s}$. Comme $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$, on en déduit $y \notin f(\overline{z + \Omega} \backslash \Omega_s - z)$, d'où par additivité

$$\deg(f(\cdot - z), z + \Omega, y) = \deg(f(\cdot - z), \Omega_s, y)$$

À $z \in B(0, s)$ fixé, introduisons l'homotopie $h : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] \times \Omega_s & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & f(x - tz) \end{array} \right.$ entre f et $f(\cdot - z)$. Pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in \partial\Omega_s$, $d(x - tz, \partial\Omega) \leq d(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s$, donc $x - tz \in \overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s}$, d'où $y \neq h(t, x)$ puisque $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$.

On déduit par invariance homotopique $\deg(f, \Omega_s, y) = \deg(f(\cdot - z), \Omega_s, y)$.

Ainsi, pour tout $z \in B(0, s)$,

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, y) &= \deg(f, \Omega_s, y) = \deg(f(\cdot - z), \Omega_s, y) \\ &= \deg(f(\cdot, -z), z + \Omega, y) = T_{f,\Omega,y}(z) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

2 Unicité du degré de Brouwer

Théorème 2.1 : Il existe un unique degré topologique $d : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$, dit degré de Brouwer.

Preuve : Pour que la preuve soit aussi claire que possible, procédons par étape.

Étape 1 : Soit $(f, \Omega, p) \in \mathcal{A}_n$. D'après le point (iii) de la propriété 1.2, si $(f_n)_n$ est une de fonctions convergeant uniformément vers f, alors $\deg(f_n, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p)$ à partir d'un certain rang. Ainsi, il nous est possible de restreindre la classe des fonctions considérées à un sous-espace dense de $C(\overline{\Omega})$ (pour la norme infinie). D'après le théorème de Stone-Weierstrass [1], on peut donc supposer f de classe C^∞.

D'après le théorème de Sard [2], il existe alors une suite $(p_n)_n$ de points singuliers de f convergeant vers p. D'après le point (iii) de la proprriété 1.2, $\deg(f,\Omega,p_n) = \deg(f,\Omega,p)$ à partir d'un certain rang.

Ainsi, on se ramène au cas où f est de classe C^∞ et où p est un point singulier de f.

Étape 2 : D'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en chacun des points de $f^{-1}(p)$, donc les points de $f^{-1}(p)$ sont isolés. Or $f^{-1}(p)$ est compact puisque fermé dans le compact $\overline{\Omega}$, d'où on déduit que $f^{-1}(p)$ est fini.

Notons $f^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_i,\delta) \subset \Omega$ et $B(x_i,\delta) \cap f^{-1}(p) = \{x_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq m$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\deg(f,\Omega,p) &= \sum_{i=1}^{m} \deg(f, B(x_i,\delta), p) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \deg(f-p, B(x_i,\delta), 0) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \deg(f(\cdot + x_i) - p, B(0,\delta), 0)
\end{aligned}$$

On remarquera que l'égalité reste correcte si l'on remplace δ par un élément de $]0,\delta]$. Fixons un indice $1 \leq i \leq m$ et introduisons l'homotopie $H : (t,x) \mapsto t(f(x+x_i) - p) + (1-t)f'(x_i) \cdot x$. Supposons qu'il existe $x \in \partial B(0,\delta)$ et $t \in [0,1]$ tel que $H(t,x) = 0$. Alors $\|f'(x_i) \cdot x\| \leq \|f(x+x_i) - f(x_i) - f'(x_i) \cdot x\| = o(\delta)$. D'un autre côté, $f'(x_i)$ est inversible, donc minorée par une constante $C(x_i) > 0$ sur le compact $S(0,1)$. Par conséquent, $\|f'(x_i) \cdot x\| \geq C(x_i) \cdot \|x\| = C(x_i)\delta$. Puisque $C(x_i)$ ne dépend pas de δ, on peut donc supposer que $0 \notin H(t, \partial B(0,\delta))$ pour tout $t \in [0,1]$, quitte à prendre un δ plus petit.

Ainsi, $\deg(f(\cdot + x_i) - p, B(0,\delta), 0) = \deg(f'(x_i), B(0,\delta), 0)$ et finalement $\deg(f,\Omega,p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \deg(f'(x), B(0,\delta), 0)$. On se ramène donc à étudier le cas où f est un isomorphisme, Ω est de la forme $B(0,\delta)$ et $p = 0$.

Étape 3 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Par décomposition polaire, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Comme S est diagonalisable orthogonalement, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$. Notons $S(t) = Q \begin{pmatrix} (1-t)\lambda_1 + t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-t)\lambda_n + t \end{pmatrix} Q^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

La matrice O peut se réécrire sous la forme $O = P \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\det(O)) & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1}$

où les $R(\theta_i)$ sont des matrices de rotations planes et $P \in O_n(\mathbb{R})$.

1. cf. théorème 7.32 de [4].
2. cf. lemme 1.1.4 de [2].

Notons $O(t) = P \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\det(O)) & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & R((1-t)\theta_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & R((1-t)\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Alors l'application $t \mapsto O(t)S(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ permet de définir une homotopie d'isomorphismes entre A et $J_A = P \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\det(A)) & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ (on notera que $\det(A) = \det(O)$). Ainsi, $\deg(A, B(0,\delta), 0) = \deg(J_A, B(0,\delta), 0)$.

Si $\det(A) > 0$, $J_A = \mathrm{Id}$ et $\deg(J_A, B(0,\delta), 0) = 1$. Supposons donc $\det(A) < 0$. Dans la suite, on se place dans les coordonnées associées à P.

Par additivité, on peut remplacer $B(0,\delta)$ par $]-\delta,\delta[^n$ sans perturber le degré. Notons $C_\delta =]-3\delta,\delta[\times]-\delta,\delta[^{n-1}$, $g(x) = (\mathbf{1}_{[-3\delta,-\delta[}(x_1)(x_1+2\delta) - \mathbf{1}_{[-\delta,\delta]}(x_1)x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $w(x) = (-\delta, x_2, \ldots, x_n)$.

Considérons l'homotopie $H : (t,x) \mapsto (1-t)g(x) + tw(x)$. Remarquons que :
- Si $x_1 = -3\delta$, la première coordonnées de $H(t,x)$ est $-(1-t)\delta - t\delta = -\delta \neq 0$.
- Si $x_1 = \delta$, la première coordonnées de $H(t,x)$ est $-(1-t)\delta - t\delta = -\delta \neq 0$.
- Si $x_i = \pm\delta$ avec $2 \leq i \leq n$, la i-ème coordonnées de $H(t,x)$ est $\pm(1-t)\delta \mp t\delta = \pm\delta \neq 0$.

On en déduit que $0 \neq H(t, \partial C_\delta)$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, $\deg(g, C_\delta, 0) = \deg(w, C_\delta, 0)$. Or $w(x) \neq 0$ pour tout $x \in C_\delta$, donc $\deg(w, C_\delta, 0) = 0$.

De plus, par additivité, $\deg(g, C_\delta, 0) = \deg(g,]-3\delta,-\delta[\times]-\delta,\delta|^{n-1}, 0) + \deg(g,]-\delta,\delta[^n, 0)$, et $\deg(g,]-\delta,\delta[^n, 0) = \deg(J_A,]-\delta,\delta[^n, 0)$ puisque g coïncide avec J_A sur $]-\delta,\delta[^n$, et :

$$\begin{aligned} \deg(g,]-3\delta,-\delta[\times]-\delta,\delta[^{n-1}, 0) &= \deg(\mathrm{Id} + (2\delta, 0, \ldots, 0),]-3\delta,-\delta[\times]-\delta,\delta[^{n-1}, 0) \\ &= \deg(\mathrm{Id},]-\delta,\delta[\times]-\delta,\delta[^{n-1}, 0) = 1 \end{aligned}$$

Finalement, $\deg(J_A,]-\delta,\delta[^n, 0) = -\deg(g,]-3\delta,-\delta[\times]-\delta,\delta[^{n-1}, 0) = -1$.

Par conséquent, nous avons $\deg(A, B(0,\delta,0) = \mathrm{sign}(\det(A))$, ce qui conclut la preuve puisque nous avons montrer aux étapes 1 et 2 qu'un degré topologique est uniquement déterminé par les valeurs qu'il prend sur les isomorphismes, ce que nous venons de déterminer. □

Corollaire 2.2 : Un degré topologique est à valeur dans $\mathbb{Z}$.

3 Construction du degré de Brouwer

Nous allons définir le degré de Brouwer de manière moins explicite que ce qui est suggéré par la preuve de l'unicité du degré.

Propriété 3.1 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue C^2 sur Ω, $p \notin y(\partial\Omega)$ et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) Φ est continue sur $[0,+\infty[$ et s'annule en un voisinage de 0 et sur $[\epsilon,+\infty[$ où

$\epsilon < d(p, y(\partial\Omega))$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\|x\|)dx = 1$.

Alors l'expression $\displaystyle\int_\Omega \Phi(\|y(x)-p\|)J_y(x)dx$ ne dépend pas de Φ.

Lemme 3.2 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue C^2 sur Ω et $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :

(i) $\|y(x)\| > \epsilon > 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$,

(ii) φ s'annule sur un voisinage de 0 et sur $[\epsilon, +\infty[$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}\varphi(r)dr = 0$.

Alors $\displaystyle\int_\Omega \varphi(\|y(x)\|)J_y(x)dx = 0$.

Preuve : Introduisons $\psi : r \mapsto \begin{cases} r^{-n}\int_0^r \rho^{n-1}\varphi(\rho)d\rho \text{ si } r > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $f^j : x \mapsto \psi(\|x\|)x_j$ pour $1 \le j \le n$. Notons également A_{ij} les cofacteurs de la matrice jacobienne de y.

Tout d'abord, on remarquera que ψ est nulle en un voisinage de 0, donc elle est nécessairement C^1. De plus, si $r > \epsilon$, $\psi(r) = r^{-n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \rho^{n-1}\varphi(\rho)d\rho = 0$, donc $f^j(y(x))$ est nulle sur un voisinage de $\partial\Omega$, ce qui nous permet de prolonger $x \mapsto A_{ij}(x)f^j(y(x))$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier par 0. On a (en utilisant l'annexe B) :

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^n A_{ij}(x)f^j(y(x)) \\
&= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i}(x)\right)}_{=0} f^j(y(x)) + \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n A_{ij}(x)\frac{\partial y_k(x)}{\partial x_i}\right)}_{=\delta_{k,j}J_y(x)} \frac{\partial f^j}{\partial x_k}(y(x)) \\
&= J_y(x)\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x_j}(y(x)) = J_y(x)\left(n\psi(\|y(x)\|) + \|y(x)\|\psi'(\|y(x)\|)\right) \\
&= J_y(x)\varphi(\|y(x)\|)
\end{aligned}$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(\|y(x)\|)J_y(x)dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)f^j(y(x))\right)dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)f^j(y(x))\right)dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)f^j(y(x))\right)dx_i\right)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Preuve de la propriété : Notons D l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (i) et introduisons les formes linéaires

$$L\Phi = \int_0^{+\infty} r^{n-1}\Phi(r)dr,\ M\Phi = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\|x\|)dx,\ N\Phi = \int_\Omega \Phi(\|y(x)-p\|)J_y(x)dx.$$

En appliquant le lemme à $y(x)-p$ et $y(x)$, on trouve que $L\Phi = 0$ implique $M\Phi = N\Phi = 0$. Soient $\Phi_1, \Phi_2 \in D$ vérifiant $M\Phi_1 = M\Phi_2 = 1$. Comme $L(L\Phi_1 \cdot \Phi_2 - L\Phi_2 \cdot \Phi_1) = 0$, on en déduit que $0 = M(L\Phi_1 \cdot \Phi_2 - L\Phi_2 \cdot \Phi_1) = L(\Phi_1 - \Phi_2)$, d'où $N(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$ ie. $N\Phi_1 = N\Phi_2$. $\square$

Définition 3.3 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue C^2 sur Ω et $p \notin f(\partial\Omega)$. Avec les notations de la propriété précédente, on définit $\deg(f, \Omega, p) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(\|f(x) - p\|) J_f(x) dx$.

Ayant montré l'unicité du degré topologique, il nous suffit d'étendre notre définition aux fonctions continues puis de vérifier qu'il s'agit bien d'un degré topologique pour montrer que $\deg(f, \Omega, p) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}(J_f(x))$ si p est un point régulier d'une fonction f de classe C^1. Néanmoins, nous pouvons d'ores et déjà le montrer pour les fonctions de classe C^2 :

Propriété 3.4 : Soit $(f, \Omega, p) \in \mathcal{A}$ où f est de classe C^1 avec p un point régulier de f. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel, que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ et $\phi(x) = 0$ lorsque $\|x\| \geq \epsilon_0$, $\deg(f, \Omega, p) = \displaystyle\int_\Omega \phi(f(x) - p) J_f(x) dx$.

Preuve : Notons $f^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Il existe $\delta > 0$ tel que la restriction de f à chaque $B(x_i, \delta)$ soit un difféomorphisme et $B(x_i, \delta) \cap B(x_j, \delta) = \emptyset$ si $i \neq j$. Soit $\eta > 0$ tel que $B(p, \eta) \subset \displaystyle\bigcap_{i=1}^m f(B(x_i, \delta))$ et posons $U_i = f^{-1}(B(p, \eta)) \cap B(x_i, \delta)$.

Montrons que tout $\epsilon_0 < \eta$ convient. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ et $\phi(x) = 0$ lorsque $\|x\| \geq \epsilon_0$. Remarquons que si $x \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^m U_i = f^{-1}(B(p, \eta))$, alors $\|f(x) - p\| \geq \eta > \epsilon_0$ et donc $\phi(f(x) - p) = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_\Omega \phi(f(x) - p) J_f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \phi(f(x) - p) J_f(x) dx$.

Or J_f est de signe constant sur chaque U_i, d'où, grâce à la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(f(x) - p) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \phi(f(x) - p) J_f(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)) \int_{U_i} \phi(f(x) - p) \cdot |J_f(x)| dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)) \int_{U_i} \phi(f(x) - p) \cdot |J_{f-p}(x)| dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)) \int_{f(U_i)-p} \phi(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)) \int_{B(0,\eta)} \phi(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(J_f(x_i)). \ \square
\end{aligned}$$

Corollaire 3.5 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue C^2 sur Ω dont $p \notin f(\partial\Omega)$ est un point régulier. Alors $\deg(f, \Omega, p) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}(J_f(x))$.

Pour étendre notre définition aux fonctions continues, nous aurons besoin du résultat suivant :

Propriété 3.6 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $y_1, y_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues C^2 sur Ω, $p \in \mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$ tels que :
(i) $\|y_i(x) - p\| > 7\epsilon$ pour tout $x \in \partial\Omega$,
(ii) $\|y_1 - y_2\|_\infty < \epsilon$.
Alors $\deg(y_1, \Omega, p) = \deg(y_2, \Omega, p)$.

Preuve : Puisque $\deg(y_i, \Omega, p) = \deg(y_i - p, \Omega, 0)$, on supposera dans la suite que $p = 0$.

Introduisons $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction C^1 telle que $f(r) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 \leq r \leq 2\epsilon \\ 0 \text{ si } 2\epsilon \leq r \leq 3\epsilon \end{array} \right.$, et posons $y_3 : x \mapsto (1 - f(\|y_1(x)\|))y_1(x) + f(\|y_1(x)\|)y_2(x)$.

En particulier, $y_3(x) = \left\{ \begin{array}{l} y_1(x) \text{ si } \|y_1(x)\| \geq 3\epsilon \\ y_2(x) \text{ si } \|y_(x)\| \leq 2\epsilon \end{array} \right.$.

Soient $\Phi_1, \Phi_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux applications continues s'annulant sur un voisinage de 0 telles que $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(r) = 0 \text{ si } r \leq 4\epsilon \text{ ou } r \geq 5\epsilon \\ \Phi_2(r) = 0 \text{ si } r \geq \epsilon \end{array} \right.$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1(\|x\|)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_2(\|x\|)dx = 1$.

Remarquons que $\Phi_2(\|y_3(x)\|)J_{y_3}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \Phi_2(\|y_2(x)\|)J_{y_2}(x) & \text{si } \|y_1(x)\| \leq 2\epsilon \\ 0 & \text{si } \|y_1(x)\| > 2\epsilon \end{array} \right.$ et
$\Phi_1(\|y_3(x)\|)J_{y_3}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \Phi_1(\|y_1(x)\|)J_{y_1}(x) & \text{si } \|y_1(x)\| \geq 3\epsilon \\ 0 & \text{si } \|y_1(x)\| < 3\epsilon \end{array} \right.$

De plus, si $\|y_1(x)\| < 3\epsilon$ alors $\Phi_1(\|y_1(x)\|) = 0$; si $\|y_1(x)\| > 2\epsilon$, alors $\|y_2(x)\| \geq \|y_1(x)\| - \|y_1 - y_2\|_\infty > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$, d'où $\Phi_2(\|y_2(x)\|) = 0$.

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(\|y_3(x)\|)J_{y_3}(x) = \Phi_2(\|y_2(x)\|)J_{y_2}(x) \\ \Phi_1(\|y_3(x)\|)J_{y_3}(x) = \Phi_1(\|y_1(x)\|)J_{y_1}(x) \end{array} \right.$.

Comme $7\epsilon < d(p, y_i(\partial\Omega))$, et pour tout $x \in \partial\Omega$, $\|y_3(x) - p\| = \|y_1(x) - p + f(\|y_1(x)\|)(y_2(x) - y_1(x))\| \geq \|y_1(x) - p\| - \|y_2 - y_1\|_\infty \geq 7\epsilon - \epsilon = 6\epsilon$, on déduit par intégration, $\deg(y_1, \Omega, 0) = \deg(y_2, \Omega, 0)$. $\square$

Définition 3.7 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue et $p \notin f(\partial\Omega)$. On définit $\deg(f, \Omega, p) = \lim\limits_{n \to +\infty} \deg(f_n, \Omega, p)$ où $(f_n)_n$ est une suite de fonctions $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continues C^2 sur Ω convergeant uniformément vers f et vérifiant $p \notin f_n(\partial\Omega)$ pour tout $n \geq 0$.

Nous venons donc de définir une application $\deg : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$. Il nous reste à montrer qu'il s'agit bien d'un degré topologique :

Propriété 3.8 : L'application deg construite est un degré topologique.

Preuve : La normalité est une conséquence du corollaire 3.5 ; l'additivité est une conséquence de la définition 3.7 et du corollaire 3.5.

Pour montrer l'invariance homotopique, donnons une application continue $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ et un point $p \notin H(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Comme $[0,1] \times \partial\Omega$ est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|H(t,x) - p\| > 7\epsilon$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial\Omega$; comme $[0,1] \times \overline{\Omega}$ est compact, H est uniformément continue et il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ implique $|H(t_1, x) - H(t_2, x)| < \epsilon$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$ une partition de $[0,1]$ vérifiant $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ pour tout $0 \leq i \leq m-1$. Pour tout $0 \leq i \leq m$, donnons une suite $(f_{i,k})_k$ d'applications $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continues C^2 sur Ω convergeant uniformément vers $H(t_i, \cdot)$.

Remarquons que pour tout $x \in \partial\Omega$ et pour k assez grand, $\|f_{i,k}(x) - p\| > \|H(t_i, x) - p\| - \|f_{i,k}(x) - H(t_i, x)\| > 7\epsilon$. De plus, pour tout $x \in \Omega$ et pour k assez grand, $\|f_{i+1,k}(x) - f_{i,k}(x)\| < \|f_{i+1,k}(x) - H(t_{i+1}, x)\| + \|f_{i,k}(x) - H(t_i, x)\| + \|H(t_{i+1}, x) - H(t_i, x)\| < \epsilon$. D'après la propriété 3.6, $\lim\limits_{k \to +\infty} \deg(f_{i,k}, \Omega, p) = \lim\limits_{k \to +\infty} \deg(f_{i+1,k}, \Omega, p)$.

Ainsi, $\deg(H(0, \cdot), \Omega, p) = \deg(H(t_0, \cdot), \Omega, p) = \deg(H(t_1, \cdot), \Omega, p) = \deg(H(t_2, \cdot), \Omega, p) = \cdots = \deg(H(t_m, \cdot), \Omega, p) = \deg(H(1, \cdot), \Omega, p)$. Nous concluons la preuve par le résultat qui suit. $\square$

Propriété : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors $\deg(f, \Omega, \cdot)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

Preuve : Il nous suffit de montrer que $\deg(f, \Omega, \cdot)$ est localement constante. Soit $\epsilon > 0$. Prenons deux points z_1, z_2 tels que $d(z_i, f(\partial\Omega)) > 7\epsilon$ et $\|z_1 - z_2\| < \epsilon$. Alors $\deg(f, \Omega, z_i) = \deg(f - z_i, \Omega, 0)$, et on conclut grâce à la propriété 3.6. $\square$

On en déduit une généralisation du corollaire 3.5 :

Corollaire 3.9 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue C^1 sur Ω et $p \notin f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. Alors $\deg(f, \Omega, p) = \sum\limits_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}(J_f(x))$.

4 Applications

4.1 Surjectivité de fonctions continues

Propriété : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ une application continue vérifiant $f_{|\partial\Omega} = \mathrm{Id}$. Alors f est surjective.

Preuve : Soit $x \in \Omega$; en particulier, $x \notin f(\partial\Omega)$. Sachant que le degré topologique ne dépend que des valeurs prises sur $\partial\Omega$, on en déduit que $\deg(f, \Omega, x) = \deg(\mathrm{Id}, \Omega, x) = 1$. Ainsi, x a un antécédent par f. $\square$

Propriété : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant $\dfrac{f(x) \cdot x}{\|x\|} \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors f est surjective.

Preuve : Soit $p \in \mathbb{R}^n$ et prenons en réel $r > 0$ suffisamment grand pour que $p \in B(0, r)$ et $\dfrac{f(x) \cdot x}{\|x\|} > \|p\|$. Considérons l'homotopie $H : (t, x) \mapsto (1-t)f(x) + tx$ entre f et Id.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \partial B(0, r)$ et $t \in [0,1]$ tels que $p = H(t, x)$. Alors

$$\|p\| \cdot \|x\| \geq p \cdot x = (1-t)f(x) \cdot x + t\|x\|^2,$$

d'où

$$\|p\| \geq (1-t)\frac{f(x) \cdot x}{\|x\|} + t\|x\| > (1-t)\|p\| + t\|p\| = \|p\|$$

On obtient ainsi une contradiction. Par conséquent, $\deg(f, B(0, r), p) = \deg(\mathrm{Id}, B(0, r), p) = 1$ d'où on déduit l'existence d'un antécédent de p par f. $\square$

4.2 Théorèmes du point fixe de Brouwer

Propriété : Soit $f : \overline{B}(0,r) \to \overline{B}(0,r)$ une application continue sur la boule fermée $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|f(x)\| \leq r$ pour tout $x \in \partial B(0,r)$. Alors f a un point fixe.

Preuve : Supposons que f n'a pas de point fixe sur $\partial B(0,r)$ (cas où il n'y a rien à montrer). Considérons l'homotopie $H : (t,x) \mapsto t(x - f(x)) + (1-t)x$ entre Id et $\mathrm{Id} - f$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \partial B(0,r)$ et $t \in [0,1]$ tels que $0 = H(t,x)$. Alors $f(x) = \frac{1}{t}x$, d'où $r \geq \|f(x)\| = \frac{1}{t}\|x\| = \frac{r}{t}$, ie. $t \geq 1$. Ainsi, $t = 1$ et $f(x) = x$, ce qui est impossible puique f n'a pas de point fixe sur $\partial B(0,r)$ par hypothèse.

Par conséquent $\deg(\mathrm{Id} - f, B(0,r), 0) = \deg(\mathrm{Id}, B(0,r), 0) = 1$. On en déduit que f admet un point fixe. $\square$

Théorème : *(Brouwer)* Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide compact et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet un point fixe.

Preuve : Prenons un réel $r > 0$ suffisamment grand pour que $C \subset B(0,r)$ et $\|f(x)\| \leq r$ pour tout $x \in \partial C$. Donnons-nous également une rétraction r de $\overline{B}(0,r)$ sur C. Une manière de contruire une telle application est de choisir un point $p \in C$ puis de remarquer que la demi-droite allant de p vers un point $x \in \overline{B}(0,r) \backslash C$ coupe ∂C en un unique point h_x ; on définit alors $r(x) = x$ si $x \in C$ et $r(x) = h_x$ sinon.

Il nous est dès lors possible d'appliquer le théorème précédent à la fonction $f \circ r$. Il existe donc $y \in \overline{B}(0,r)$ tel que $f \circ r(y) = y$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}(f) \subset C$ donc $r(y) = y$. Finalement, f admet bien un point fixe. $\square$

4.3 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.

Preuve : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour montrer que P admet une racine, nous allons montrer que $\deg(P, B(0,r), 0) = n$ pour r assez grand (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

Nous pouvons écrire P sous la forme $f + Q$ où $f : z \mapsto az^n$ avec $a \neq 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n. Choisissons $r > 0$ suffisamment grand pour que $|az|^n > |Q(z)|$ pour tout $z \in \partial B(0,r)$.

Considérons l'homotopie $H : (t,z) \mapsto az^n + tQ(z)$ reliant f à P et supposons par l'absurde qu'il existe $z \in \partial B(0,r)$ et $t \in [0,1]$ tels que $0 = H(t,z)$. Alors $|Q(z)| < |az|^n = t|Q(z)| \leq |Q(z)|$ ce qui est contradictoire.

Ainsi, $\deg(P, B(0,r), 0) = \deg(f, B(0,r), 0)$. Choisissons un complexe $\epsilon \in \mathbb{C}^*$ suffisamment proche de 0 pour que $\deg(f, B(0,r), 0) = \deg(f, B(0,r), \epsilon)$. Remarquons que

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}(f'(z)) & -\mathrm{Im}(f'(z)) \\ \mathrm{Im}(f'(z)) & \mathrm{Re}(f'(z)) \end{vmatrix} = |f'(z)|^2 = n^2|z|^{2(n-1)}$$

Ainsi, ϵ est une valeur singulière de f et $\deg(f, B(0,r), \epsilon)$ correspond au nombre d'antécédents de ϵ par f. Puisque tout complexe non nul admet n racines n-ième distinctes, on en déduit finalement que $\deg(P, B(0,r), 0) = \deg(f, B(0,r), \epsilon) = n$. $\square$

4.4 Théorème de Rouché

Théorème : *(Rouché)* Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f, g deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $\partial\Omega$. On suppose que f n'a aucun zéro sur $\partial\Omega$. Si $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \partial\Omega$, alors f et g ont même nombre de zéros dans Ω (comptés avec multiplicité).

Corollaire : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ n'ayant aucun zéro sur $\partial\Omega$. On note $z_1, \dots, z_k$ les zéros de f dans Ω et $n_1, \dots, n_k$ leurs multiplicités respectives. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout fonction g holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ vérifiant $\sup\limits_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)-g(z)| < \delta$, tous les zéros de g dans Ω sont dans $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B(z_i, \epsilon)$ et g a exactement n_i zéros (comptés avec multiplicité) dans $B(z_i, \epsilon)$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Lemme : Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ ne s'annulant pas sur $\partial\Omega$. Alors $\deg(f, \Omega, 0)$ correspond au nombre de zéros de f dans Ω, comptés avec multiplicité.

Preuve : Si f n'a pas de zéro dans Ω, $\deg(f, \Omega, 0) = 0$ et il n'y a rien à montrer. Sinon, notons $\{z_1, \dots, z_k\}$ (avec $k \geq 1$) les zéros de f dans Ω (qui sont en nombre fini par le principe des zéros isolés puisque $\overline{\Omega}$ est compact).

Soit $\epsilon > 0$ tel que $B(z_i, \epsilon) \subset \Omega$ et $B(z_i, \epsilon) \cap B(z_j, \epsilon) = \emptyset$ si $i \neq j$. Puisque $0 \notin f\left(\overline{\Omega} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(z_i, \epsilon)\right)$, on obtient par additivité :

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^{k} \deg(f, B(z_i, \epsilon), 0)$$

Il suffit donc de montrer que si 0 est un zéro de f avec multiplicité n, alors $\deg(f, B(0, \epsilon) = 0) = n$ pour ϵ suffisamment petit.

Pour cela, écrivons f sous la forme $f(z) = g(z)(1 + \omega(z))$ où $g : z \mapsto az^n$ (avec $a \neq 0$) et $\omega(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0$. Prenons un $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $|\omega(z)| < 1$ pour tout $z \in \partial B(0, \epsilon)$.

Supposons par l'absurde que l'homotopie $H : (t, z) \mapsto g(z)(1 + t\omega(z))$ entre f et g ait un zéro $(t, z) \in [0, 1] \times \partial B(0, \epsilon)$. Alors on obtient une contradiction :

$$1 > |\omega(z)| = \frac{1}{t} \geq 1$$

Par conséquent, $\deg(f, B(0, \epsilon), 0) = \deg(g, B(0, \epsilon), 0)$. Or il a déjà été prouvé dans la preuve du théorème fondamental de l'algèbre que $\deg(g, B(0, \epsilon), 0) = n$. $\square$

Preuve du théorème : D'abord, remarquons que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$, sans quoi nous aurions $|f(z)| = |f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Il est donc suffisant de montrer que $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$ d'après notre lemme.

Supposons par l'absurde que l'homotopie $H : (t, z) \mapsto (1-t)f(z) + tg(z)$ entre f et g s'annule en un point $(t, z) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Alors

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| = t|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - g(z)|,$$

d'où une contradiction. Ainsi, par invariance homotopique, $\deg(f,\Omega,0) = \deg(g,\Omega,0)$. $\square$

Preuve du corollaire : Soient $\epsilon > 0$ et $\{z_1,\dots,z_k\}$ les zéros de f dans Ω. Donnons-nous un $\eta > 0$ tel que $z_i \in B(z_j,\epsilon)$ implique $B(z_i,\eta) \subset B(z_j,\epsilon)$, $B(z_i,\eta) \subset \Omega$ et $B(z_i,\eta) \cap B(z_j,\eta) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Posons $\delta = \inf \left\{ |f(z)| \mid z \in \overline{\Omega} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(z_i,\eta) \right\} > 0$.

Soit g une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ vérifiant $\sup\limits_{z\in\overline{\Omega}} |f(z) - g(z)| < \delta$. En particulier, pour tout $z \in \partial B(z_i,\eta)$,

$$|f(z) - g(z)| \leq \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z) - g(z)| < \delta \leq |f(z)|.$$

D'après le thoérème 5, on en déduit que f et g ont le même nombre de zéros dans chaque $B(z_i,\eta)$. $\square$

4.5 Théorème de Jordan

Théorème : *(Formule du produit)* Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. Notons $\{U_i,\ i \in I\}$ les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.
Si $p \notin g \circ f(\partial\Omega)$, $\deg(g\circ f,\Omega,p) = \sum\limits_{i\in I} \deg(f,\Omega,U_i)\deg(g,U_i,p)$.

Preuve : Montrons tout d'abord que la somme n'admet qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Soit $r > 0$ tel que $f(\overline{\Omega}) \subset B(0,r)$ et notons $M = \overline{B}(0,r) \cap g^{-1}(p)$. Comme $M \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega) = \coprod\limits_{i\in I} U_i \coprod U_\infty$, où U_∞ est la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$, et que M est compact, il existe $K \subset I$ fini tel que $M \subset \coprod\limits_{i\in K} U_i \coprod U_\infty$.

Remarquons que si $i \in I$, $U_i \subset f(\overline{\Omega})$, donc si $i \notin K$, $U_i \cap g^{-1}(p) = \emptyset$ d'où $\deg(g,U_i,p) = 0$.

Supposons dans un premier temps que f et g sont de classe C^1, et que p est un point régulier de $g \circ f$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\deg(g\circ f,\Omega,p) &= \sum_{x\in(g\circ f)^{-1}(p)} \operatorname{sign}(J_{g\circ f}(x)) \\
&= \sum_{x\in f^{-1}(z)}\ \sum_{z\in g^{-1}(p)\cap f(\Omega)} \operatorname{sign}(J_g(\underbrace{f(x)}_{=z}))\cdot\operatorname{sign}(J_f(x)) \\
&= \sum_{z\in g^{-1}(p)\cap f(\Omega)} \operatorname{sign}(J_g(x)) \left(\sum_{x\in f^{-1}(z)} \operatorname{sign}(J_f(x))\right) \\
&= \sum_{z\in g^{-1}(p)\cap f(\Omega)} \operatorname{sign}(J_g(x))\cdot \deg(f,\Omega,z) \\
&= \sum_{i\in I}\ \sum_{z\in g^{-1}(p)\cap U_i} \operatorname{sign}(J_g(z))\cdot\deg(f,\Omega,U_i) \\
&= \sum_{i\in I} \deg(f,\Omega,U_i)\left(\sum_{z\in g^{-1}(p)\cap U_i} \operatorname{sign}(J_g(z))\right) \\
&= \sum_{i\in I} \deg(f,\Omega,U_i)\cdot\deg(g,U_i,p)
\end{aligned}$$

Revenons maintenant au cas général, et notons $V_m = \{z \in B(0,r)\backslash f(\partial\Omega) \mid \deg(f,\Omega,p) = m\}$ et $N_m = \{i \in I \mid \deg(f,\Omega,U_i) = m\}$. Puisque $V_m = \coprod_{i\in I} U_i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} \deg(f,\Omega,U_i)\deg(g,U_i,p) &= \sum_{m\geq 0}\sum i\in N_m m \deg(g,U_i,p) \\
&= \sum_{m\geq 0} m\deg(g,V_m,p)
\end{aligned}$$

Soient g_0 et f_0 deux fonctions de classe C^1 telles que $\sup_{x\in\overline{B}(0,r)} \|g_0(x) - g(x)\| < \epsilon$ et $\sup_{x\in\overline{B}(0,r)} \|f_0(x) - f(x)\| < \epsilon$. Soit également p_0 un point régulier de $g_0\circ f_0$ tel que $\|p - p_0\| < \epsilon$.

D'après ce qui précède, $\deg(g_0\circ f_0,\Omega,p_0) = \sum_{m\geq 0} m\deg(g_0,V'_m,p_0)$, où $V'_m = \{z \in B(0,r)\backslash f_0(\partial\Omega) \mid \deg(f_0,\Omega,z) = m\}$. Si ϵ est assez petit, $V_m\cap g_0^{-1}(p) = V'_m\cap g_0^{-1}(p)$ et $\deg(g_0,V'_m,p_0) = \deg(g_0,V'_m,p)$, d'où

$$\begin{aligned}
\deg(g_0\circ f_0,\Omega,p_0) &= \sum_{m\geq 0} m\deg(g_0,V'_m,p) \\
&= \sum_{m\geq 0} m\deg(g_0,V_m,p) \\
&= \sum_{m\geq 0} m\deg(g,V_m,p)
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g_0\circ f_0(x) - g\circ f_0(x)\| &= \sup_{x\in f_0(\overline{\Omega})} \|g_0(x)-g(x)\| \\ &\le \sup_{x\in \overline{B}(0,r)} \|g_0(x)-g(x)\| \le \epsilon \end{aligned}$$

Donc si ϵ est suffisamment petit, $\deg(g_0\circ f_0,\Omega,p) = \deg(g\circ f_0,\Omega,p)$. De plus, quitte à diminuer ϵ, on a $\deg(g\circ f,\Omega,p) = \deg(g\circ f_0,\Omega,p)$ par continuité uniforme de g sur $\overline{B}(0,r)$. Finalement,

$$\begin{aligned} \deg(g\circ f,\Omega,p) &= \deg(g\circ f_0,\Omega,p) = \deg(g_0\circ f_0,\Omega,p) \\ &= \deg(g_0\circ f_0,\Omega,p_0) = \sum_{m\ge 0} m\deg(g,V_m,p) \\ &= \sum_{i\in I} \deg(f,\Omega,U_i)\cdot \deg(g,U_i,p) \qquad \square \end{aligned}$$

Corollaire : Soient $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ deux compacts homéomorphes. Alors $\mathbb{R}^n\backslash\Omega_1$ et $\mathbb{R}^n\backslash\Omega_2$ ont le même nombre de composantes connexes.

Preuve : Notons $\{U_i \mid i\in I\}$ (resp. $\{V_j \mid j\in J\}$) les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n\backslash\Omega_1$ (resp. $\mathbb{R}^n\backslash\Omega_2$). Soit $h:\Omega_1\to\Omega_2$ un homéomorphisme. Prolongeons $h:\Omega_1\to\Omega_2$ (resp. $h^{-1}:\Omega_2\to\Omega_1$) en une application continue $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (resp. $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$).

Fixons $i\in I$ et $p\in U_i$, et notons $\{W_k \mid k\in K\}$ les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n\backslash h(\partial U_i)$. En remarquant que $g\circ f(x) = x$ pour tout $x\in\partial U_i$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} 1 &= \deg(\mathrm{Id},U_i,p) = \deg(g\circ f,U_i,p) \\ &= \sum_{k\in K} \deg(f,U_i,W_k)\cdot\deg(g,W_k,p) \end{aligned}$$

Comme $h(\partial\Omega_1)\subset\partial\Omega_2$, tout W_k peut s'écrire comme une union disjointe de V_j. Plus précisément, si $N_k = \{j\in J \mid V_j\subset W_k\}$, alors $W_k = \coprod_{j\in J} V_j$. On en déduit que $\deg(g,W_k,p) = \sum_{j\in N_k}\deg(g,V_j,p)$ et $\deg(f,U_i,W_k) = \deg(f,U_i,V_j)$ pour tout $j\in N_k$. Ainsi, en remarquant également que $J = \coprod_{k\in K} N_k$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k\in K} \deg(f,U_i,W_k)\cdot\deg(g,W_k,p) \\ &= \sum_{k\in K}\sum_{j\in N_k} \deg(f,U_i,V_j)\cdot\deg(g,V_j,p) \\ &= \sum_{j\in J} \deg(f,U_i,V_j)\cdot\deg(g,V_j,p) \end{aligned}$$

De plus, puisque $p\in U_i$ et $g(\partial V_j)\subset g(\partial\Omega_2)\subset\partial\Omega_1$, on a $\deg(g,V_j,p) = \deg(g,V_j,U_i)$, d'où finalement :

$$1 = \sum_{j\in J} \deg(f,U_i,V_j)\cdot\deg(g,V_j,U_i)$$

De manière symétrique, en échangeant respectivement f et $\{U_i \mid i\in I\}$ avec g et $\{V_j \mid j\in J\}$, on obtient à j fixé :

$$1 = \sum_{i \in I} \deg(g, V_j, U_i) \cdot \deg(f, U_i, V_j)$$

Pour conclure, il suffit d'écrire [3] :

$$\begin{aligned} |J| &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \deg(g, V_j, U_i) \cdot \deg(f, U_i, V_j) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \deg(f, U_i, V_j) \cdot \deg(g, V_j, U_i) \\ &= |I| \qquad \square \end{aligned}$$

Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est un lacet injectif, alors γ induit un homéomorphisme du cercle $\mathbb{S}^1$ (obtenu en identifiant les extrémités du segment $[0,1]$) sur $\gamma([0,1])$. Ainsi, le corollaire précédent implique la version faible du théorème de Jordan :

Théorème : *(Jordan)* Un lacet injectif sépare le plan en deux composantes connexes.

4.6 Théorème de Borsuk

Théorème : *(Borsuk)* Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné symétrique par rapport à l'origine contenant 0 et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant $0 \notin f(\partial\Omega)$. Si f est impaire, alors $d(f, \Omega, 0)$ est aussi impair.

Preuve : Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions C^1 convergeant uniformément vers f. Si l'on pose $h_n = \frac{1}{2}(g_n(\cdot) - g_n(-\cdot))$, alors $(h_n)_n$ est une suite de fonctions C^1 convergeant uniformément vers $\frac{1}{2}(f(\cdot) - f(-\cdot)) = f$. Comme $\deg(h_n, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$ à partir d'un certain rang, on pourra supposer sans perte de généralité que f est C^1.

Supposons dans un premier temps que 0 est une valeur régulière de f. En remarquant que $f(0) = 0$ puisque f est impaire, on peut écrire :

$$\deg(f, \Omega, 0) = \mathrm{sign}(J_f(0)) + \sum_{x \in f^{-1}(0), x \neq 0} \mathrm{sign}(J_f(x)).$$

Comme f est impaire, on peut faire agir $\mathbb{Z}_2$ sur $f^{-1}(0) \backslash \{0\}$ par $x \mapsto -x$. Si K est un domaine fondamental de l'action, l'égalité précédente devient :

$$\deg(f, \Omega, 0) = \mathrm{sign}(J_f(0)) + \sum_{x \in K} \mathrm{sign}(J_f(x)) + \sum_{x \in K} (J_f(-x)).$$

Comme l'imparité de f implique la parité de df, nous pouvons encore écrire

$$\deg(f, \Omega, 0) = \mathrm{sign}(J_f(0)) + 2 \sum_{x \in K} \mathrm{sign}(J_f(x)),$$

ce qui montre le théorème dans le cas considéré.

Supposons désormais que 0 n'est pas une valeur régulière de f. D'après le cas précédent, il nous suffit de montrer que f peut être approchée arbitrairement près (au sens de la

3. Dans le cas où $|J|$ et $|I|$ sont infinis, il est nécessaire d'interpréter la somme en tant que somme cardinale pour lui donner un sens.

convergence uniforme) par une fonction impaire C^1 dont 0 est une valeur régulière. Pour cela, nous allons utilisé le lemme suivant :

Lemme : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction impaire C^1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| < \epsilon$ de sorte que $g : x \mapsto f(x) - yx_i^3$ vérifie :
(i) g est une fonction impaire C^1,
(ii) 0 est une valeur régulière de g sur $\{x \in \Omega \mid x_i \neq 0\}$,
(iii) $dg(0) = df(0)$,
(iv) Si $x_i = 0$ et $g(x) = 0$, alors $f(x) = 0$ et $df(x) = dg(x)$,
(v) $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon R^3$ où $\Omega \subset B(0, R)$.

D'abord, remarquons qu'il existe un $\delta > 0$ arbitrairement petit qui ne soit pas dans le spectre de $df(0)$. Ainsi, quitte à remplacer f par $f - \delta\,\mathrm{Id}$, on pourra supposer $df(0)$ inversible.

Ensuite, appliquons le lemme précédent à f avec $i = 1$ pour trouver $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, puis à f_1 avec $i = 1$ pour obtenir $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Remarquons que 0 est une valeur régulière de f_2 sur $\{x \in \Omega \mid x_2 \neq 0\}$, et que si $x \in \Omega$ est tel que $f_2(x) = 0$, $x_2 = 0$ et $x_1 \neq 0$, alors $f_1(x) = 0$ et $df_1(x) = df_2(x)$; en particulier, $df_2(x)$ est inversible. Par conséquent, 0 est une valeur régulière de f_2 sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$.

Par récurrence, on construit de la même manière $f_3, \dots, f_n$. En particulier, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction impaire C^1 dont 0 est une valeur régulière sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } x_n \neq 0\} = \Omega \backslash \{0\}$; comme $df_n(0) = df_{n-1}(0) = \cdots = df_1(0) = df(0)$ est inversible, on en déduit que 0 est un valeur régulière de f_n. De plus,

$$\|f_n - f\|_{\overline{\Omega}} \leq \|f_n - f_{n-1}\|_{\overline{\Omega}} + \cdots + \|f_2 - f_1\|_{\overline{\Omega}} + \|f_1 - f\|_{\overline{\Omega}} \leq n\epsilon R^3,$$

ce qui conclut la preuve. □

Preuve du lemme : Le point (i) est clair. Pour le point (ii), donnons un point $x \in \Omega$ vérifiant $g(x) = 0$ et $x_i \neq 0$. Alors $y = \frac{f(x)}{x_i^3}$ et $dg(x) = df(x) - 3y(dx_i)^2 = x_i^3 dF(x)$ en notant $F : x \mapsto \frac{f(x)}{x_i^3}$. En remarquant que $F(x) = y$, on en déduit que si y est une valeur régulière de F, alors $dg(x)$ est inversible. Le théorème de Sard montre que l'on peut trouver une valeur régulière de F de norme arbitrairement petite, ce qui conclut notre point. Les points (iii) à (v) sont clairs. □

Corollaire : Soient $n > p$ deux entiers et $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^p$ une application continue. Alors il existe $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Preuve : Soit $g : \overline{B} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ une extension impaire de $x \mapsto f(x) - f(-x)$. Si $0 \notin g(\partial B)$, les hypothèses du théorème de Borsuk sont vérifiées, d'où $\deg(g, B, 0) \neq 0$.

D'un autre côté, il existe un point $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^p \times \{0\}$ de norme arbitrairement petite, et clairement $\deg(g, B, x) = 0$ (puisque x ne peut avoir d'antécédent), d'où une contradiction.

Ainsi, $0 \in g(\partial B)$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in \partial B = \mathbb{S}^{n-1}$ vérifiant $f(x) - f(-x) = g(x) = 0$. □

4.7 Théorème d'invariance du domaine

Théorème : Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^N$ une application continue injective. Alors f est ouverte.

Preuve : Il nous suffit de montrer que pour tous $a \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(a, r) \subset U$, $f(B(a, r))$ contient un voisinage de $f(a)$. Pour cela, montrons que $\deg(f, B(a, r), f(a)) \neq 0$. En effet, dans ce cas, il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que $\deg(f, B(a, r), 0) \neq 0$ pour tout $v \in V$, et donc il existe $W \subset B(a, r)$ tel que $f(W) = V$ d'où $V \subset f(B(a, r))$.

Tout d'abord, puisque $\deg(f, B(a, r), f(a)) = \deg(f(\cdot + a) - f(a), B(0, r), 0)$, nous pourrons supposer sans perte de généralité que $a = f(a) = 0$.

Soit $H : (t, x) \mapsto f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{tx}{1+t}\right)$ une homotopie. Si $H(t, x) = 0$, on déduit de l'injectivité de f que $x = 0$, donc $0 \notin H(t, \partial B(0, r))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, par invariance homotopique,

$$\deg(f, B(0, r), 0) = \deg(H(0, \cdot), B(0, r), 0) = \deg(H(1, \cdot), B(0, r), 0),$$

où $H(1, \cdot) : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$ est impaire. D'après le théorème de Borsuk,

$$\deg(H(1, \cdot), B(0, r), 0) \neq 0,$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Théorème : Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $m < n$. Alors il n'existe pas d'application continue injective de U dans $\mathbb{R}^m$.

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe une telle injection $f : U \to \mathbb{R}^m$. En identifiant $\mathbb{R}^m$ avec le sous-espace $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$, on obtient une injection $f : U \to \mathbb{R}^n$. D'après le théorème précédent, $f(U) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme la projection $p : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ est ouverte, on en déduit que $p(f(U)) = \{0\}$ doit être ouvert, d'où une contradiction. $\square$

4.8 Théorème du hérisson

Théorème : *(du hérisson)* Soient N un entier impair, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert contenant 0 et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ une application continue. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $f(x) = \lambda x$.

Preuve : Si $0 \in f(\partial\Omega)$, il suffit de prendre $\lambda = 0$ et x un zéro de f. Supposons donc $0 \notin f(\partial\Omega)$. Ainsi, si $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une extension continue de f, $0 \notin \tilde{f}(\partial\Omega)$.

Supposons que $\deg(\tilde{f}, \Omega, 0) \neq -1$. Remarquons que $\deg(-\mathrm{Id}, \Omega, 0) = \det(-I_n) = -1$ puisque n est impaire. Ainsi, l'homotopie $H : (t, x) \mapsto (1 - t)\tilde{f}(x) - tx$ de $\tilde{f}$ vers $-\mathrm{Id}$ doit s'annuler en un point $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$, puisque $\deg(\tilde{f}, \Omega, 0) \neq \deg(-\mathrm{Id}, \Omega, 0)$.

Comme $0 \in \Omega$, nécessairement $0 \notin \partial\Omega$ et donc $t \neq 1$. Ainsi, $f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{t}{1-t}x$. Il suffit alors de poser $\lambda = \frac{t}{1-t}$.

Supposons ensuite que $\deg(\tilde{f}, \Omega, 0) = -1$. Cette fois-ci, $\deg(\tilde{f}, \Omega, 0) \neq 1 = \deg(\mathrm{Id}, \Omega, 0)$; par le même raisonnement que précédemment, on trouve $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $(1 - t)\tilde{f}(x) + tx = 0$.

Alors $f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{t}{t-1}x$ et il suffit de poser $\lambda = \frac{t}{t-1}$. $\square$

Théorème : *(de la boule chevelue)* Tout champ de vecteurs continu tangent à une sphère de dimension paire admet un zéro.

Preuve : Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ un tel champ de vecteurs ; en particulier, $f(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$. En appliquant le théorème de Hedgehog à f et $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on trouve $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{S}^n$ tels que $f(x) = \lambda x$.

Mais $\lambda = \lambda \|x\|^2 = \lambda x \cdot x = f(x) \cdot x = 0$, d'où $f(x) = 0$. $\square$

4.9 Action sur la sphère

Théorème : Si n est pair, $\mathbb{Z}_2$ est le seul groupe non trivial agissant librement [4] sur $\mathbb{S}^n$.

Preuve : Pour toute fonction continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, définissons $\mathrm{d}(f) = \deg(\tilde{f}, B^{n+1}, 0)$ où $\tilde{f} : \overline{B}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ est une extension continue de f sur la boule fermée unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$; on remarquera que cette définition ne dépend pas du choix de l'extension.

D'après la formule du produit, si G est un groupe d'automorphismes de $\mathbb{S}^n$, alors $\mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}(g)\mathrm{d}(f)$; par conséquent, d définit un morphisme de G dans $\mathbb{Z}_2$.

En considérant l'homotopie $H : (t,x) \mapsto (1-t)\tilde{f}(x) - tx$ reliant $\tilde{f}$ à $-\mathrm{Id}$, on obtient que si f n'a pas de point fixe, $\mathrm{d}(f) = \deg(-\mathrm{Id}, B^{n+1}, 0) = (-1)^n = -1$ si n est impair. Par conséquent, le noyau de d contient les éléments de G ayant un point fixe, qui est réduit à l'élément neutre si l'action de G sur $\mathbb{S}^n$ est libre.

Finalement, l'application d permet d'injecter tout groupe agissant librement sur $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{Z}_2$. $\square$

A Décomposition polaire

Théorème : Tout matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Posons $S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ et $O = MS^{-1}$.

Clairement, $M = OS$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus,

$$ {}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n, $$

d'où $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soient $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_1, S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $O_1S_1 = M = O_2S_2$. Remarquons tout d'abord que $S_1^2 = {}^tMM = S_2^2$.

4. Ici, une action libre est une action par homéomorphismes dont le stabilisateur de tout point est trivial.

Comme $S_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S_1 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $Q(\lambda_i^2) = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Alors S_2 commute avec

$$Q(S_2^2) = Q(S_1^2) = Q\left[P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}\right] = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1^2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n^2) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = S_1$$

Ainsi, S_1 et S_2 sont codiagonalisables, ie. il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$S_1 = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ et } S_2 = Q \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ avec } \mu_1, \ldots, \mu_n > 0.$$

Alors $S_1^2 = S_2^2$ implique que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i^2 = \mu_i^2$ ie. $\lambda_i = \mu_i$ puisque $\lambda_i, \mu_i > 0$. Finalement, on en déduit que $S_1 = S_2$ et $O_1 = O_2$. $\square$

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que $\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array} \right.$ est un homéomorphisme.

B Cofacteurs

Propriété : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^2 ; on notera $\Delta_{i,j}(x)$ le (i,j)-cofacteur de la matrice jacobienne de f. Alors pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j \Delta_{i,j}(x) = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_k(x) \Delta_{i,j}(x) = \delta_{i,k} J_f(x).$$

Preuve : Notons J la matrice jacobienne de f. D'un côté, ${}^t\mathrm{com}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, et de l'autre,

$$\left({}^t\mathrm{com}(J(x))J(x)\right)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(x) \partial_j f_k(x) \text{ et } (J_f(x)\mathrm{I}_n)_{ik} = \delta_{ik} J_f(x).$$

La seconde égalité de la propriété s'en déduit alors aisément.

Considérons maintenant la première égalité et fixons $1 \leq i \leq n$. Notons $F = {}^t(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n)$ et $X_{j,l} = \left\{ \begin{array}{ll} \partial_l F & \text{si } l < j \\ \partial_{l+1} F & \text{si } l \geq j \end{array} \right.$.

Ainsi, $\Delta_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det(X_{j1}, \ldots, X_{j,n-1})$. On en déduit

$$(-1)^i \partial_j \Delta_{ij}(x) = \sum_{l=1}^{n-1} \underbrace{(-1)^j \det(X_{j1}, \ldots, X_{j,l-1}, \partial_j X_{jl}, X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,n-1})}_{a_{jl}}$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^i \partial_j \Delta_{ij}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n-1} a_{jl} = \sum_{(j,l)\in E} a_{jl} + \sum_{(j,l)\in F} a_{jl}$$

où $E = \{(j,l) \mid 1 \leq l < j \leq n\}$ et $F = \{(j,l) \mid 1 \leq j \leq l \leq n-1\}$. En remarquant que $(a,b) \mapsto (b, a-1)$ est une bijection de E vers F, on en déduit que $\sum_{(j,l)\in F} a_{jl} = \sum_{(j,l)\in E} a_{l,j-1}$ d'où

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{n} \partial_j \Delta_{ij}(x) = \sum_{(j,l)\in E} (a_{jl} + a_{l,j-1}).$$

Soit $(j,l) \in E$. Remarquons que :

(i) Si $b < l < j$, alors $X_{lb} = \partial_b F = X_{jb}$.
(ii) Si $l \leq b < j-1$, alors $X_{lb} = \partial_{b+1} F = X_{j,b+1}$.
(iii) Si $b \geq j > l$, alors $X_{lb} = \partial_{b+1} F = X_{jb}$.
(iv) Puisque $l < j$ et en utilisant le théorème de Schwartz, $\partial_l X_{l,j-1} = \partial_l \partial_j F = \partial_j \partial_l F = \partial_j X_{jl}$.

On en déduit la formule générale :

$$\begin{aligned} a_{l,j-1} &= (-1)^l \det(X_{l1}, \ldots, X_{l,j-2}, \partial_l X_{l,j-1}, X_{lj}, \ldots, X_{l,n-1}) \\ &= (-1)^l \det(X_{j,1}, \ldots, X_{j,l-1}, X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,j-1}, \partial_j X_{j,l}, X_{jj}, \ldots, X_{j,n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, si $l = j-1$,

$$\begin{aligned} a_{j-1,j-1} &= (-1)^{j-1} \det(X_{j1}, \ldots, X_{j,j-1}, \partial_j X_{jl}, X_{jj}, \ldots, X_{j,n-1}) \\ &= -a_{j,j-1} \end{aligned}$$

et si $l < j-1$,

$$\begin{aligned} a_{l,j-1} &= (-1)^l \det(X_{j1}, \ldots, X_{j,l-1}, \underbrace{X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,j-1}}, \partial_j X_{jl}, X_{jj}, \ldots, X_{j,n-1}) \\ &= (-1)^l (-1)^{j-1-l} \det(X_{j1}, \ldots, X_{j,l-1}, \partial_j X_{jl}, \underbrace{X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,j-1}}, X_{jj}, \ldots, X_{j,n-1}) \\ &= -a_{jl} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{(j,l)\in E} (a_{jl} + a_{l,j-1}) = \sum_{l<j} (a_{jl} + a_{l,j-1}) = -a_{j,j-1} - \sum_{l<j-1} a_{jl} + \sum_{l<j} a_{jl} = 0$$

Therefore, $\sum_{j=1}^{n} \partial_j \Delta_{ij}(x) = (-1)^i \sum_{(j,l)\in E} (a_{jl} + a_{l,j-1}) = 0.$ $\square$

Références

[1] Erhard Heinz, *An Elementary Analytic Theory of the Degree of Mapping in n-Dimensional Space*, Indiana Univ. Math. J. 8 No. 2 (1959), 231-247.

[2] Yu-Qing Chen, Yeol Je Cho et Yu-Qing Chen, *Topological degree and applications*, Chapman and Hall/CRC (2006).

[3] Jérôme Droniou, *Degrés topologiques et applications*, polycopié.

[4] Walter Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod (2006).

[5] Philippe Caldero et Jérôme Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage et Mounet (2013).

[6] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2001).