DM2 année 2013/2014

série + fh de Taylor

EXERCICE 1

2h

On se propose d'étudier la série de terme général $u_n(x) = a_n.x^n$ où x est un réel quelconque et a_n un réel défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1) a) Justifier que : $\forall t \in [0,1]$, $t \leq \dfrac{1+t^2}{2} \leq \dfrac{1+t}{2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.

c) Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

d) i) Montrer que si $|x| > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n(x)| = +\infty$.

ii) Si $|x| < 1$, en considérant la série $\sum\limits_{n\geq 0} |x|^n$, étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n(x)|$.

iii) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $|x| < 1$.

2) a) Soit $t \in [0,1]$ et $x \in [-1,1[$, en considérant deux cas selon le signe de x et en étudiant les variations de la fonction $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - xt^2$, montrer que : $2 - x - xt^2 \geq \dfrac{3}{2}(1-x) > 0$.

b) Justifier que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2 - x - xt^2}$ est intégrable sur $[0,1]$.

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt$.

i) Justifier que $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x \in [-1,1[$, $x\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right) \neq 1$.

ii) En évaluant pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(1+t^2)\,x}{2}\right]^k$, montrer que $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \dfrac{4\ |x|^{n+1}\, a_{n+1}}{3(1-x)}$.

iii) En déduire que : $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \dfrac{8\ |x|^{n+1}}{3(1-x)\,(n+2)}$.

3) En déduire la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$, $x \in [-1,1[$.

4) On suppose dans cette question que $x = -1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$ $= \dfrac{1}{12}$

et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

5) Donner la valeur de a_0 puis établir à l'aide d'une intégration par parties la relation de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(2k+3)\ a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k$.