Université Paul Sabatier Année 2013-14, second semestre
SFA Math2 $1^{\text{ère}}$ année

DEVOIR MAISON

Rappels : *On note :* $\mathbf{0}$ *la matrice nulle* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{I}$ *la matrice unité* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Pour un polynôme* $F(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_d\lambda^d \in \mathbb{R}[\lambda]$ *et pour une matrice carrée* N *on note* $F(N)$ *la matrice*

$$F(N) = c_0\mathbf{I} + c_1N + c_2N^2 + \cdots + c_dN^d\,.$$

On admet le fait que cette notation est compatible aux opérations de produit et de somme, c'est à dire :

$$F(\lambda) = F_1(\lambda)F_2(\lambda) \Longrightarrow F(N) = F_1(N)F_2(N) \quad \text{et} \quad F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) \Longrightarrow F(N) = F_1(N) + F_2(N)\,.$$

Pour toute matrice carrée N*, on convient que* $N^0 = \mathbf{I}$.

Étude la suite définie par :
$\mathbf{u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \qquad u_0 = x, \quad u_1 = y\,, \quad u_2 = z\,.}$

Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$, puis démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = A^nX$.

2. Calculer $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I}) \in \mathbb{R}[\lambda]$.

3. Démontrer l'égalité $P(A) = \mathbf{0}$.
Indication : on peut calculer A^2, A^3 *et vérifier directement cette égalité, mais on peut aussi la déduire sans calcul de la question 1.*

4. Vérifiez que -1 est racine de de $P(\lambda)$; en déduire toutes les autres racines.

Pour chaque entier $n \geq 1$ la division euclidienne du polynôme λ^n par $P(\lambda)$ donne l'existence d'un polynôme $Q_n(\lambda)$ et d'un polynôme $R_n(\lambda)$ de degré deux, tels que

$$(*) \qquad \lambda^n = P(\lambda)Q_n(\lambda) + R_n(\lambda)\,, \qquad R_n(\lambda) = \alpha_n + \beta_n\lambda + \delta_n\lambda^2\,.$$

5. Montrer que $A^n = R_n(A)$ en utilisant la question 3 et l'égalité $(*)$, puis montrez les égalités :

$$X_n = \alpha_nX_0 + \beta_nX_1 + \delta_nX_2\,, \qquad u_n = \alpha_nx + \beta_ny + \delta_nz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \delta_n \end{pmatrix}.$$

6. En remplaçant λ par les différentes racines de P dans $(*)$ déterminer une matrice inversible M telle que :

$$M \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

En déduire l'égalité :

$$(**) \qquad u_n = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix};$$

7. Calculez M^{-1} et déduire de $(**)$ l'égalité :

$$u_n = c_1(x,y,z)(-1)^n + c_2(x,y,z)2^n + c_3(x,y,z)3^n \,,$$

avec :

$$c_1(x,y,z) = \frac{6x-5y+z}{12}\,, \quad c_2(x,y,z) = \frac{12x+8y-4z}{12}\,, \quad c_3(x,y,z) = \frac{-6x-3y+3z}{12}\,.$$

8. Montrer que si $c_3(x,y,z) \neq 0$, alors u_n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

9. Donner un équivalent simple de u_n, en discutant suivant la nullité ou non de $c_1(x,y,z)$, $c_2(x,y,z)$, $c_3(x,y,z)$.

10. Déterminer le sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}^3$ formé des valeurs initiales (x,y,z) pour lesquelles la suite u_n est bornée. Quel est la nature de cet ensemble ? Si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ déterminer une base. Montrez que si $(x,y,z) \notin B$, alors $u_n \to -\infty$ ou bien $u_n \to +\infty$.

Question hors barème (bonus 4 points)
Démontrez que

$$p = 5(-1)^{n+1} + 2^{n+3} - 3^{n+1} \qquad \text{et} \qquad q = (-1)^{n+1} + 2^{n+4} - 3^n$$

sont divisibles par 12.