21/6/10 2 heures	Méthodes Variationnelles - 2	Cours et TD autorisés

Partie 1

Une ressource naturelle x soumise à une politique de prélèvement u vérifie

$$\dot{x} = \alpha x (1 - \beta x) - u \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (\alpha, \beta, x_0 > 0) \ .$$

On pose

$$C = \{(x, u) \ \boxed{\dot{x} = \alpha x (1 - \beta x) - u} \ , \ \boxed{x(0) = x_0} \} \ .$$

On veut stabiliser la ressource au niveau $\bar{x} > 0$. Dans ce but, on cherche à déterminer la politique u^* telle que

$$u^* = \arg \min_C J(u) \quad , \quad J(u) = \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 \, dt$$

soit minimum. Soit

$$L(x, u; \lambda, \eta) = \eta (x(0) - x_0) + \int_0^T f(x, u) \, dt \ , \ f(x, u) = (x - \bar{x})^2 + \lambda (\dot{x} - \alpha x (1 - \beta x) + u) \ .$$

1. Déterminer les dérivées de Gâteaux $D_u L$ et $D_x L$.
2. Montrer que, pour tout $(\delta x, \delta u)$

$$\eta \delta x(0) + \int_0^T [2 (x^* - \bar{x}) \delta x + \lambda (\delta \dot{x} - \alpha \delta x + 2 \alpha \beta x^* \delta x)] \, dt = 0 \text{ et } \int_0^T \lambda \delta u dt = 0 \ .$$

3. Montrer que $\lambda = 0$.
4. Montrer que $x^* = \bar{x}$.

Partie 2

La configuration x d'un fil inextensible est définie par un angle u à l'aide des équations

$$\boxed{\dot{x}_1 = \cos(u) \, , \, \dot{x}_2 = \sin(u) \quad , \quad x(0) = 0 \ .}$$

1. On pose

$$C = \{(x_1, x_2, u) : \dot{x}_1 = \cos(u) \, , \, \dot{x}_2 = \sin(u) \quad , \quad x(0) = 0 \ \} \ .$$

et on considère le Principe du Minimum de l'Energie suivant

$$u^* = \arg \min_C J(u) \quad , \quad J(u) = \int_0^T \rho g x_2(t) dt - F_1 x_1(T) - F_2 x_2(T) \ .$$

Soit

$$L_1(x, u; \lambda, \eta) = J(u) + \lambda_3 x_1(0) + \lambda_4 x_2(0) + \int_0^T \lambda_1 (\dot{x}_1 - \cos(u))\, dt + \int_0^T \lambda_2 (\dot{x}_2 - \sin(u))\, dt \ .$$

(a) Déterminer les dérivées de Gâteaux $D_u L_1$, $D_{x_1} L_1$ et $D_{x_2} L_1$.

(b) Montrer que, pour tout $(\delta x_1, \delta x_2, \delta u)$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 \delta x_1(0) - F_1 \delta x_1(T) + \int_0^T \lambda_1 \delta \dot{x}_1 dt &= 0, \\
\lambda_4 \delta x_2(0) - F_2 \delta x_2(T) + \int_0^T \overset{(\rho g\, \delta x_2 + \lambda_2 \delta \dot{x}_2)}{\cancel{(\rho g + \lambda_2)\, \delta \dot{x}_2}} dt &= 0 \ , \\
\int_0^T (\lambda_1 \sin(u) - \lambda_2 \cos(u))\, \delta u dt &= 0 \ .
\end{aligned}$$

(c) Déterminer les équations différentielles satisfaites par λ_1 et λ_2, ainsi que les conditions aux limites en fonction de F_1, F_2, λ_3 et λ_4.

(d) Déterminer λ_1 et λ_2 en fonction de $t, T, \rho g, F_1, F_2$.

(e) Déterminer λ_3 et λ_4.

(f) Déterminer u.

(g) Déterminer la solution pour $F_2 = 0$.

2. On pose

$$C = \{(x_1, x_2, u) : \dot{x}_1 = \cos(u), \dot{x}_2 = \sin(u) \quad , \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \} \ .$$

et on considère le Principe du Minimum de l'Energie suivant

$$u^* = \arg \min_C J(u) \quad , \quad J(u) = \int_0^T \rho g x_2(t) dt \ .$$

(a) Ecrire le Lagrangien L_2 associé à ce problème.

(b) Déterminer les dérivées de Gâteaux $D_u L_2$, $D_{x_1} L_2$ et $D_{x_2} L_2$.

(c) Déterminer les équations différentielles satisfaites par les multiplicateurs de Lagrange.

(d) Déterminer la solution.