Méthode de décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle : formules de calcul direct des éléments simples.

Sommaire

❖ Formules de calcul direct des éléments simples :

$$f(x)=\frac{N_0(x)}{D(x)}=d_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+\cdots+d_0+\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}\ \text{avec } d^oN<d^oD.$$

$\boldsymbol{d_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+\cdots+d_0}$ et $\boldsymbol{N(x)}$ sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne du polynôme $N_0(x)$ par le polynôme $D(x)$.

- $(\boldsymbol{a}_j)_{1\le j\le p+2q}$ sont toutes les p+2q racines de $\boldsymbol{D(x)}$ chacune de multiplicité $\boldsymbol{m_j}$.
- $(\boldsymbol{a}_j)_{1\le j\le p}$ sont les **p racines réelles** de $D(x)$ ou pôles réelles de f.
- $(\boldsymbol{a}_j)_{p+1\le j\le p+q}$ **q racines** des 2q pôles complexes restants) avec $\mathcal{Im}(\boldsymbol{a_j})>0$.

$$f(x)=d_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+\cdots+d_0+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}+\sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{j,k}x+N_{j,k}}{(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2)^k}:$$

$$\boldsymbol{A_{j,k}=\frac{1}{(m_j-k)!}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)}_{a_j}}\ \textbf{où } \boldsymbol{D_j(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(x-a_k)^{m_k}\cdot\prod_{\substack{k=p+1\\k\neq j}}^{p+q}(x^2-2\mathcal{Re}(a_k)\cdot x+|\,a_k\,|^2)^{m_k}}$$

Ainsi pour k=1, on reconnait en $\boldsymbol{A_{j,1}}$ la formule de calcul des résidus des fonctions rationnelles. Pour les éléments de 2nde espèce on a :

$$\boldsymbol{M_{j,k}=\frac{\mathcal{Im}(C_{j,k})}{\mathcal{Im}(a_j)}\ et\ N_{j,k}=\mathcal{Re}(C_{j,k})-M_{j,k}\cdot\mathcal{Re}(a_j)}=\frac{\mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k})\cdot\mathcal{Im}(a_j)-\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot\mathcal{Im}(C_{j,k})}{\mathcal{Im}(a_j)}$$

$$\textbf{où } \boldsymbol{C_{j,k}=\frac{1}{(m_j-k)!\cdot(2i\mathcal{Im}(a_j))^{m_j-k}}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)}_{a_j}\right]}$$
$$\boldsymbol{+\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}\frac{(-1)^{n+1}C^n_{m_j-k+1-n}}{4^n(\mathcal{Im}(a_j))^{2n}(m_j-k+1-n)}\cdot[(m_j-k+1-2n)\cdot C_{j,k+n}+2in\cdot\mathcal{Im}(C_{j,k+n})]}$$

$N_0(x)$ peut remplacer $N(x)$ pour les calculs de $A_{j,k}$ et $C_{j,k}$ et on a:

$$d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0 = \frac{N_0(x)}{D(x)} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{j,k}x+N_{j,k}}{(x^2-2\mathcal{R}e(a_j)\cdot x+|a_j|^2)^k}$$

et on évite ainsi la division euclidienne pour avoir $d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0$.

Six expressions détaillées des $\boldsymbol{C_{j,k}}$ pour $\boldsymbol{k = m_j}$, $\boldsymbol{(m_j-1)}$, $\boldsymbol{(m_j-2)}$, $\boldsymbol{(m_j-3)}$, $\boldsymbol{(m_j-4)}$, $\boldsymbol{(m_j-5)}$, ….

- $\boldsymbol{C_{j,m_j} = \left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}\right]}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-1} = \frac{-i}{\left(2\mathcal{J}m(a_j)\right)}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)'_{a_j}\right] + i\,\frac{\mathcal{J}m(C_{j,m})}{2\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-2} = -\frac{1}{8\cdot\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)''_{a_j}\right] + \frac{1}{4\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}\cdot\left[C_{j,m_j-1} + 2i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-1})\right]}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-3} = \frac{i}{48\cdot\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^3}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)'''_{a_j}\right] + \frac{1}{2\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}\left[C_{j,m_j-2} + i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-2})\right] - i\,\frac{\mathcal{J}m(C_{j,m_j-1})}{8\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^4}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-4} = \frac{1}{384\cdot\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^4}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)''''_{a_j}\right] + \frac{1}{4\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}\left[3C_{j,m_j-3} + 2i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-3})\right] - \frac{1}{16\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^4}\left[C_{j,m_j-2} + 4i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-2})\right]}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-5} = \frac{-i}{3840\cdot\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^5}\left[\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(5)}_{a_j}\right] + \frac{1}{2\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^2}\left[2C_{j,m_j-4} + i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-4})\right] -}$

  $\boldsymbol{\frac{3}{16\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^4}\left[C_{j,m_j-3} + 2i\cdot\mathcal{J}m(C_{j,m_j-3})\right] + i\,\frac{\mathcal{J}m(C_{j,m_j-2})}{32\left(\mathcal{J}m(a_j)\right)^6}}$

❖ ***Exemples de calcul:***

➢ Exemple 1:

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{(x^2+1)} + \frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{(x^2+1)^2}}$

Les pôles: $\boldsymbol{a_1 = 1}$: $\boldsymbol{m_1 = 1}$, $\boldsymbol{a_2 = i}$: $\boldsymbol{m_2 = 2}$ et ($a_3 = \overline{a_2} = -i$: $m_3 = 2$).

  - $A_{1,1} = \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right)_0^{(1-1)} = \frac{-1}{1} = \boldsymbol{-1}$: $\boldsymbol{\frac{-1}{x}}$.
  - $C_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)_i^{(2-2)} = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)_i = \boldsymbol{2i}$:

$$M_{2,2} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}\ et\ N_{2,2} = \frac{0\cdot1-0\cdot2}{1} = \mathbf{0}:\ \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{(x^2+1)^2}}.$$

- $C_{2,1} = \frac{1}{1!\,(2i\cdot1)}\left[\left(\frac{x^2-1}{x}\right)'_i\right] + \frac{1}{4^1(1)^21}(0+2i\cdot1\cdot2) = \frac{-i}{2}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)_i\right] + i = \boldsymbol{i};$

$$M_{2,1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}\ et\ N_{2,1} = \frac{0\cdot1-0\cdot1}{1} = \mathbf{0}:\ \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{(x^2+1)}}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x(x^2+1)^2}} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x^2+1)}} + \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^2}}$$

<u>Méthode alternative:</u>

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{x(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \left(\frac{B_{2,1}}{(x-i)} + \frac{\overline{B_{2,1}}}{(x+i)}\right) + \left(\frac{B_{2,2}}{(x-i)^2} + \frac{\overline{B_{2,2}}}{(x+i)^2}\right)$$

$$B_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-2)} = \frac{-2}{-4i} = -\frac{1}{2}i$$

$$B_{2,1} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-1)} = \left(\frac{(i+3x+ix^2-x^3)}{x^2(x+i)^3}\right)_i = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x(x^2+1)^2}} = \frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x(x-i)^2(x+i)^2}} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\mathbf{0,5}}{\boldsymbol{(x-i)}} + \frac{\mathbf{0,5}}{\boldsymbol{(x+i)}}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{-0,5i}}{\boldsymbol{(x-i)^2}} + \frac{\boldsymbol{0,5i}}{\boldsymbol{(x+i)^2}}\right) = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+1}} + \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^2}}$$

➢ <u>Exemple 2:</u>

- $$\boldsymbol{f(x)} = \frac{4x^{12}+120x^{11}+1696x^{10}+14847x^9+89353x^8+388810x^7+1255223x^6+3043495x^5+5564147x^4+7644764x^3+7742675x^2+5373950x+1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6x+13)^5}$$

$$f(x) = \frac{N(x)}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$
$$= \frac{4\,x^{12}+120\,x^{11}+1696\,x^{10}+14847\,x^9+89353\,x^8+388810\,x^7+1255223\,x^6+3043495\,x^5+5564147\,x^4+7644764\,x^3+7742675\,x^2+5373950\,x+1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$

Les calculs ici, compte tenu de leur grande taille sont effectués par les outils de calcul symbolique (littéral) de ***Matlab*** et de ***Microsoft-Mathematics***.

✓ <u>**le résultat donné par la méthode:**</u>

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+2)^3} + \frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13} + \frac{-3\,x+1}{(x^2+6\,x+13)^2} + \frac{2\,x+5}{(x^2+6\,x+13)^3} + \frac{2\,x+2}{(x^2+6\,x+13)^4} + \frac{2\,x-2}{(x^2+6\,x+13)^5}$$

❖ <u>***Scripts Matlab :***</u>

- <u>***Algorithme de la méthode transcrit en Matlab:***</u>

<u>***Programme principal:***</u>

```
clc;
global Nt F FF p
syms x F FF;
FF=0;
%donner la fonction rationnelle par: son numérateur N(x) et son
%dénominateur( en donnant les pôles et leur multiplicités)
```

```
Nt=4*x^12+120*x^11+1696*x^10+14847*x^9+89353*x^8+388810*x^7+1255223*x^6
+3043495*x^5+5564147*x^4+7644764*x^3+7742675*x^2+5373950*x+1966676;
% D(x) en donnant les pôles a et leur multiplicité m
% si a est réel de multiplicité m ca correspond au facteur (x-a)^m si a est
%complexe de multiplicité m pour les éléments simples de seconde espèce
%associé au facteur(x-a)^m*(x-à)^m=(x2-2Re(a)*x+![a]2)^m  où à est le
%conjugué de a et x2 signifie "x au carrée", [a], module de a
a(1)= -2;  m(1)=3;
a(2)= -3+2i; m(2)=5;% ici Mt=2 est les nombre de pôles pour l'exemple 2
a(3)=0;     m(3)=0;
a(4)=0;      m(4)=0;
j=1; D=1; p=1; pmax=0;
while (m(j) ~= 0)
    if  imag(a(j))== 0
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x-a(j))^m(j);
    else
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x^2-2*Re(a(j))*x+(abs(a(j)))^2)^m(j);
    end
    Mt=j; j=j+1;
end
F(pmax)=0*x; D; Mt; Nt/D
% Mt est le nombre racines réelles ou complexe à partie imaginaire positive
% j est l'indice de ces racines j=1, 2, ... Mt.
for j=1:Mt
    Da=1;
    for jj=[1:j-1 j+1:Mt ]
       if imag(a(jj))== 0
         Da=Da*(x-a(jj))^m(jj);
       else
         Da=Da*(x^2-2*Re(a(jj))*x+(abs(a(jj)))^2)^m(jj);
       end
    end
    Decomp2_a_m(a(j),m(j),Da);
end
F      % liste des éléments simples
%FF     %la fraction rationnelle décomposée
```

<u>Résultat: (présente les éléments simples ; séparé par des virgules au lieu de +)</u>

$$\left\{-\frac{1}{x+2},\frac{2}{(x+2)^2},\frac{4}{(x+2)^3},\frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13},\frac{1-3\,x}{(x^2+6\,x+13)^2},\frac{2\,x+5}{(x^2+6\,x+13)^3},\frac{2\,x+2}{(x^2+6\,x+13)^4},\frac{2\,x-2}{(x^2+6\,x+13)^5}\right\}$$

<u>Les fonctions appelées:</u>

```
function [ Decomp ] = Decomp( a, m, Da)
syms x ;
global aj F FF p
aj=a;
if imag(a)  == 0
 for k=m:-1:1
  A(k)= 1/(factorial(m-k))*dN_Da(Da,m-k);
 end
 for k=1:m
   F(p)=A(k)/(x-a)^k;
   FF=FF+F(p);
   p=p+1;
 end
else
```

```
 for k = m:-1:1
    S=0;
    for n=1:((m-k+1)/2)
       S=S+(-1)^(n+1)*nCk(m-k+1-n,n)/(4^(n)*(Im(a))^(2*n)*(m-k+1-n))*((m-
k+1-2*n)*C(k+n)+2*1i*n*Im(C(k+n)));
    end
    C(k)=dN_Da(Da,m-k)/((2i*Im(a))^(m-k)*factorial((m-k)))+S;
    M(k)=Im(C(k))/Im(a);
    N(k)=Im(conj(C(k))*a)/Im(a);
 end
 for k = 1:m
    F(p)=(M(k)*x+N(k))/(x^2-2*Re(a)*x+(abs(a))^2)^(k);
    FF=FF+F(p);
    p=p+1;
 end
end
end  % pour la fonction ignorer dans les hiérarchies

function [Da] = dN_Da(Da,d)
 syms x ;
 global aj Nt
 fa = Nt/Da;
 T=diff(fa, x, d);
 Da=sym(subs(T, aj));
End

function [nCk] = nCk(n,k)
 nCk=nchoosek(n,k);
end

function [ Im ] = Im( a )
 Im=imag(a);
End

function [ Re ] = Re( a )
 Re=real(a);
End
```