Collège de Maisonneuve Session Été 2014

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle Devoir #4

Travail à faire en équipe de deux et à remettre le 02 juillet.

Une attention particulière sera accordée à la présentation. Reprendre les énoncés sur feuilles mobiles (assemblées).

Barème : Chaque expression complétée vaudra 02 points.

Partie II. Application des SÉL aux histoires de familles :

Soit à démontrer les énoncés suivants :

a)

Si m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont L.I, alors $m \leq n$.

Autrement dit, si on prend plus de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on ne peut pas former une famille libre.

b)

Si m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ engendrent $\mathbb{R}^n$, alors $m \geq n$.

Autrement dit, si on prend moins de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on ne peut pas former une famille génératrice.

À cette fin, suivre les étapes suivantes :

a) Considérer une famille $\Im = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots, \vec{v}_m\right\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $m > n$. Il s'agit de prouver que cette famille ______________________________. Écrire chaque vecteur sous forme de composantes :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ \_\_\_ \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ \_\_\_ \end{pmatrix}, \cdots, \vec{v}_m = \begin{pmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$$

Où v_{ij} est la i ème composante du j ème vecteur $\vec{v}_j$ de $\Im$, $j = 1, \cdots, m; \quad i = 1, \cdots, n$.

Pour montrer que $\Im$ _______________________, il faut montrer qu'il existe une combinaison linéaire _______________________ des vecteurs de $\Im$ qui donne le vecteur nul, c'est-à-dire, des scalaires $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_m$, ______________________, tels que

$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 +$ __________________ $=$ _____

Soit $k_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \_\_\_ \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} +$ ____________________________ $=$ _____

Réécrire cette dernière équation sous forme d'un SÉL, d'inconnues ______________________ , et examiner le nombre de ses solutions :

$$\begin{cases} v_{11}k_1 & + & \underline{\hspace{6cm}} & = \underline{\hspace{1cm}} \\ v_{21}k_1 & + & \underline{\hspace{6cm}} & = \underline{\hspace{1cm}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1}k_1 & + & \underline{\hspace{6cm}} & = \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

Ce SÉL est un système ____________ et possède plus d'_________________ que d'_________________. Il admet donc ______________________solution(s).

La preuve est donc faite puisqu'on a garanti l'existence d'une solution ________.

b) Soit $\Im = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \cdots, \vec{u}_m\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, avec $m < n$. Il faut

montrer que $\Im$ n'est pas ______________________. Procéder par contradiction et supposer le contraire : Si $\Im$ engendrait tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors elle engendrerait, en particulier, les vecteurs $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pourrait donc écrire :

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \underline{\hspace{3cm}} \\ &\underline{\hspace{0.8cm}} = \underline{\hspace{5cm}} \\ &\underline{\hspace{0.8cm}} = \underline{\hspace{5cm}} \\ &\vdots \\ &\vec{e}_n = \underline{\hspace{5cm}} \end{aligned}$$

Pour aboutir à une contradiction, montrer que les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n$ seraient alors L.D. càd. qu'il existerait des scalaires $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$, ___________________ tels que

$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 +$ ______________________________ $=$ ___ .

Considérer l'équation vectorielle $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 +$ ______________________ $=$ ___ d'inconnues $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$ et la transformer, en remplaçant chaque vecteur de la base canonique comme __________________ des vecteurs de $\Im$.

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_}$$

$$\Updownarrow$$

$$k_1\left(a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\right) + k_2\left(\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\right) + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_}$$

En regroupant les coefficients de $\vec{u}_1$, puis ceux de $\vec{u}_2$, etc. on obtient l'équation :

$$\left(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\right)\vec{u}_1 + \left(k_1a_{21} + k_2a_{22} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\right)\vec{u}_2 +$$
$$\left(k_1a_{31} + k_2a_{32} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\right)\vec{u}_3 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_}$$

Il suffit (condition suffisante mais pas nécessaire), pour cela, que le SÉL homogène suivant ait une solution _____________________.

$$\begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{12} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_} \\ k_1a_{31} + k_2a_{32} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_} \\ k_1a_{41} + k_2a_{42} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_} \\ \vdots \\ k_1a_{m1} + k_2a_{m2} + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_} \end{cases}$$

Or, ce SÉL est ______________ et possède plus d' _______________ que d' ________________; il admet donc une solution _____________________.