Méthode de décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle : formules de calcul direct des éléments simples.

Sommaire

Théorème de calcul des éléments simples :

$f(x) = \frac{N_0(x)}{D(x)} = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0 + \frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$ avec $d^o N < d^o D$.

$\boldsymbol{d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0}$ et $\boldsymbol{N(x)}$ sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne du polynôme $N_0(x)$ par le polynôme $D(x)$.

$(\boldsymbol{a}_j)_{1 \leq j \leq p+2q}$ sont toutes les p+2q racines de $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$chacune de multiplicité $\boldsymbol{m_j}$.

$(\boldsymbol{a}_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont les **p racines réelles** de $D(x)$ ou pôles réelles de f**.**

$(\boldsymbol{a}_j)_{p+1 \leq j \leq p+q}$ **:q racines** des 2q pôles complexes restants) avec $\mathcal{Im}(\boldsymbol{a_j}) > 0$.

$$f(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}x + B_{j,k}}{(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x + |a_j|^2)^k}:$$

$$\boldsymbol{\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}x + B_{j,k}}{(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x + |a_j|^2)^k}} \quad \text{où}$$

Pour $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, p, p+1, p+2, \ldots, p+q}$ et pour $\boldsymbol{k = m_j, \ (m_j - 1), \ldots 2, 1}$

- Si $1 \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{p}$ soit $\boldsymbol{a_j} \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{A_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(m_j-k)!}}\left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)^{\boldsymbol{(m_j-k)}}_{\boldsymbol{a_j}}$
- Si $\boldsymbol{p} + 1 \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ soit $\boldsymbol{a_j} \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{Im}(\boldsymbol{a_j}) > 0$:

$$\boldsymbol{C_{j,k}} = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{m_j - k})! \cdot \left(\boldsymbol{2i\mathcal{Im}(a_j)}\right)^{\boldsymbol{m_j-k}}} \left[\left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}} \right)^{(\boldsymbol{m_j-k})}_{\boldsymbol{a_j}} \right]$$
$$+ \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\frac{\boldsymbol{m_j-k+1}}{\mathbf{2}}} \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n+1}} \boldsymbol{C^n_{m_j-k+1-n}}}{\boldsymbol{4^n}\left(\boldsymbol{\mathcal{Im}(a_j)}\right)^{\boldsymbol{2n}} (\boldsymbol{m_j - k + 1 - n})} \cdot [(\boldsymbol{m_j - k + 1 - 2n}) \cdot \boldsymbol{C_{j,k+n}} + \boldsymbol{2in} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Im}(C_{j,k+n})}]$$

Et on obtient: $\boldsymbol{A_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{Im}(C_{j,k})}}{\boldsymbol{\mathcal{Im}(a_j)}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{B_{j,k}} = \boldsymbol{\mathcal{Re}(C_{j,k})} - \boldsymbol{M_{j,k}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Re}(a_j)}$

❖ **Simplification des dérivés n^ièmes dans les expressions de $\boldsymbol{A_{j,k}}$ et $\boldsymbol{C_{j,k}}$:**

Soient $p_u(x) = (x - a_u)$ ou $p_u(x) = (x^2 - 2Re(a_u) \cdot x + |a_u|^2)$ respectivement selon que $a_u \in \mathbb{R}$ ou $a_u \in \mathbb{C}$ et $Im(a_u) > 0$.

$$\boldsymbol{D(x)} = \prod_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{p}} (\boldsymbol{x - a_u})^{\boldsymbol{m_u}} \cdot \prod_{\boldsymbol{u=p+1}}^{\boldsymbol{p+q}} (\boldsymbol{x^2 - 2\mathcal{Re}(a_u) \cdot x + |a_u|^2})^{\boldsymbol{m_u}} = \prod_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{p+q}} (\boldsymbol{p_u(x)})^{\boldsymbol{m_u}}$$

$$\boldsymbol{D(x) = (p_1(x))^{m_1} \cdot (p_2(x))^{m_2} \cdots \left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}}}$$

On fournît la procédure de calcul suivante pour les éléments simples des deux espèces.

$$\boldsymbol{D_j(x)} = \prod_{\boldsymbol{u=1, u\neq j}}^{\boldsymbol{p}} (\boldsymbol{x - a_u})^{\boldsymbol{m_u}} \cdot \prod_{\boldsymbol{u=p+1, u\neq j}}^{\boldsymbol{p+q}} (\boldsymbol{x^2 - 2\mathcal{Re}(a_u) \cdot x + |a_u|^2})^{\boldsymbol{m_u}} = \prod_{\boldsymbol{u=1, u\neq j}}^{\boldsymbol{p+q}} (\boldsymbol{p_u(x)})^{\boldsymbol{m_u}}$$

$$\boldsymbol{D_j(x) = (p_1(x))^{m_1} \cdots \left(p_{j-1}(x)\right)^{m_{j-1}} \cdot \left(p_{j+1}(x)\right)^{m_{j+1}} \cdots \left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}}}$$

$$\boldsymbol{P_j(x)} = \prod_{i=1, u\neq j}^{p+q} \left(p_u(x)\right) = \boldsymbol{p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_{p+q}(x)}$$

$$\boldsymbol{S_j(x)} = -\sum_{\boldsymbol{i=1, p_u \neq p_j}}^{\boldsymbol{p+q}} \left(\boldsymbol{p_1(x) \cdots m_i \left(p_i(x)\right)' \cdots p_{p+q}(x)} \right)$$

➢ La méthode directe:

Cette méthode est recommandée quant tous les pôles sont tous de multiplicités au plus 3. Elle permet d'évaluer directement les éléments simples mais $\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C^n_{m_j-k+1-n} \cdot [(m_j-k+1-2n) \cdot C_{j,k+n} + 2in \cdot \mathcal{Im}(C_{j,k+n})]}{(2\mathcal{Im}(a_j))^{2n} (m_j-k+1-n)}$ pourrait paraître un peu lourde.

Pour chaque pôle $\boldsymbol{a_j}$ de multiplicité $\boldsymbol{m_j}$ on a :

$$\boldsymbol{D_j(x) = (p_1(x))^{m_1} \cdots \left(p_{j-1}(x)\right)^{m_{j-1}} \cdot \left(p_{j+1}(x)\right)^{m_{j+1}} \cdots \left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}}}$$

$$\boldsymbol{P_j(x) = p_1(x) \cdots \left(p_{j-1}(x)\right)\left(p_{j+1}(x)\right) \cdots p_{p+q}(x)}$$

$$\boldsymbol{S_j(x) = -\sum_{i=1, p_u \neq p_j}^{p+q} \left(p_1(x) \cdots m_i\left(p_i(x)\right)' \cdots p_{p+q}(x)\right)}$$

$\boldsymbol{N_{j,0}(x) = N(x)},$

Et pour $\boldsymbol{k = 1, 2 \ldots (m_j - 2), (m_j - 1)}$**:**

$$\boldsymbol{N_{j,k}(x) = S_j(x) \cdot \left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N_{j,k-1}(x)\right)' \cdot P_j(x)}$$

Enfin pour le pôle a_j et pour $\boldsymbol{k = m_j}$, $\boldsymbol{(m_j - 1), (m_j - 1), \ldots 2, 1}$:

- Si $a_j \in \mathbb{R}$ soit $1 \leq j \leq p$:

On a: $$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{N_{j,m_j-k}(a_j)}{(m_j-k)! \cdot D_j(a_j) \cdot \left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}}$$

- Si $a_j \in \mathbb{C}\ et\ \mathcal{Im}(a_j) > 0$ soit $p + 1 \leq j \leq p + q$:

$$\boldsymbol{C_{j,k} = \frac{N_{j,k}(a_j)}{(m_j - k)!\, D_j(a_j) \cdot \left(2\mathcal{Im}(a_j) \cdot iP_j(a_j)\right)^{m_j-k}} + \sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C^n_{m_j-k+1-n} \cdot \left[(m_j - k + 1 - 2n) \cdot C_{j,k+n} + 2in \cdot \mathcal{Im}(C_{j,k+n})\right]}{\left(2\mathcal{Im}(a_j)\right)^{2n}(m_j - k + 1 - n)}}.$$

On a: $$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{\mathcal{Im}(C_{j,k})}{\mathcal{Im}(a_j)} \quad et \quad B_{j,k} = \mathcal{Re}(C_{j,k}) - A_{j,k} \cdot \mathcal{Re}(a_j)}.$$

Algorithme de calcul rapide:

Pour chaque pôle a_j de multiplicité m_j on a :

$$\boldsymbol{D_j(x) = (p_1(x))^{m_1} \cdots \left(p_{j-1}(x)\right)^{m_{j-1}} \cdot \left(p_{j+1}(x)\right)^{m_{j+1}} \cdots \left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}}}$$

$$\boldsymbol{P_j(x) = p_1(x) \cdots \left(p_{j-1}(x)\right)\left(p_{j+1}(x)\right) \cdots p_{p+q}(x)}$$

$$S_j(x) = -\sum_{i=1, p_u \neq p_j}^{p+q} \left(p_1(x) \cdots m_i\left(p_i(x)\right)' \cdots p_{p+q}(x) \right)$$

$N_{j,0}(x) = N(x), N_{j,0} = N(a_j)$,

$G_{j,0} = D_j(a_j)$, *si* $a_j \in \mathbb{R}$ $(j \leq p)$: $P_j = P_j(a_j)$ *sinon* $P_j = 2\mathcal{Im}(a_j) \cdot iP_j(a_j)$,

Et pour $k = 1, 2, \ldots (m_j - 2), (m_j - 1)$:

$N_{j,k}(x) = S_j(x) \cdot \left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N_{j,k-1}(x)\right)' \cdot P_j(x)$ et $N_{j,k} = N_{j,k}(a_j)$

$G_{j,k} = G_{j,k-1} \cdot P_j$.

Enfin pour $k = m_j, (m_j - 1), (m_j - 1), \ldots 2, 1$:

- Si $1 \leq j \leq p$ soit $a_j \in \mathbb{R}$:

On a: $$A_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}}{G_{j,m_j-k}}$$

- Si $p + 1 \leq j \leq p + q$ soit $\mathcal{Im}(a_j) > 0$:

$$C_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}}{G_{j,m_j-k}} + \sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C^n_{m_j-k+1-n}}{\left(2\mathcal{Im}(a_j)\right)^{2n} (m_j - k + 1 - n)} \cdot \left[(m_j - k + 1 - 2n) \cdot C_{j,k+n} + 2in \cdot \mathcal{Im}(C_{j,k+n})\right]$$

On a: $$A_{j,k} = \frac{\mathcal{Im}(C_{j,k})}{\mathcal{Im}(a_j)} \quad et \quad B_{j,k} = \mathcal{Re}(C_{j,k}) - A_{j,k} \cdot \mathcal{Re}(a_j).$$

Six expressions détaillées des $C_{j,k}$ **pour** $k = m_j, (m_j - 1), (m_j - 2), (m_j - 3), (m_j - 4), (m_j - 5), \ldots$.

- $C_{j,m_j} = \frac{N(a_j)}{D_j(a_j)} = \frac{N_{j,0}(a_j)}{D_j(a_j)}$
- $C_{j,m_j-1} = \frac{N_{j,1}(a_j)}{2 \cdot D_j(a_j) \cdot \left(\mathcal{Im}(a_j) \cdot iP_j(a_j)\right)} + i \frac{\mathcal{Im}(C_{j,m})}{2\left(\mathcal{Im}(a_j)\right)^2}$
- $C_{j,m_j-2} = \frac{N_{j,2}(a_j)}{8 \cdot D_j(a_j) \cdot \left(\mathcal{Im}(a_j) \cdot iP_j(a_j)\right)^2} + \frac{1}{4\left(\mathcal{Im}(a_j)\right)^2} \cdot \left[C_{j,m_j-1} + 2i \cdot \mathcal{Im}(C_{j,m_j-1})\right]$

- $\boldsymbol{C_{j,m_j-3} = \frac{N_{j,3}(a_j)}{48\cdot D_j(a_j)\cdot\left(\mathcal{I}m(a_j)\cdot iP_j(a_j)\right)^3} + \frac{1}{2\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2}\left[C_{j,m_j-2} + i\cdot \mathcal{I}m(C_{j,m_j-2})\right] - i\frac{\mathcal{I}m(C_{j,m_j-1})}{8\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^4}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-4} = \frac{N_{j,4}(a_j)}{384\cdot D_j(a_j)\cdot\left(\mathcal{I}m(a_j)\cdot iP_j(a_j)\right)^4} + \frac{1}{4\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2}\left[3C_{j,m_j-3} + 2i\cdot \mathcal{I}m(C_{j,m_j-3})\right] - \frac{1}{16\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^4}\left[C_{j,m_j-2} + 4i\cdot \mathcal{I}m(C_{j,m_j-2})\right]}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-5} = \frac{N_{j,5}(a_j)}{3840\cdot D_j(a_j)\cdot\left(\mathcal{I}m(a_j)\cdot iP_j(a_j)\right)^5} + \frac{1}{2\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2}\left[2C_{j,m_j-4} + i\cdot \mathcal{I}m(C_{j,m_j-4})\right] -}$

  $\boldsymbol{\frac{3}{16\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^4}\left[C_{j,m_j-3} + 2i\cdot \mathcal{I}m(C_{j,m_j-3})\right] + i\frac{\mathcal{I}m(C_{j,m_j-2})}{32\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^6}}$

➢ La méthode hybride:

Cette méthode est recommandée quand tous les pôles sont tous de multiplicités au moins 4. L'expression $\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C^n_{m_j-k+1-n}\cdot[(m_j-k+1-2n)\cdot C_{j,k+n} + 2in\cdot \mathcal{I}m(C_{j,k+n})]}{(2\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(m_j-k+1-n)}$ étant une expression plutôt complexe (lourde) à mémorise, la méthode hybride remédie à ce problème, mais *ne permet plus de trouver directement* les éléments simples de *secondes espèces*. Il faut donc en plus effectuer des divisions euclidiennes successives par $x^2 - 2\mathcal{R}e(a_k)\cdot x + |a_k|^2$ ou utiliser la formule $C'_{j,u} = N_u(a_j)$ (voir la fin de cette partie) à plusieurs reprises.

$$\boldsymbol{\frac{N(x)}{D(x)}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m_j}} \boldsymbol{\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}} + \sum_{\boldsymbol{j=p+1}}^{\boldsymbol{p+q}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m_j}} \left(\boldsymbol{\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}} + \boldsymbol{\frac{\overline{A_{j,k}}}{(x-\overline{a}_j)^k}}\right) \; avec\ \boldsymbol{d°N} < d°\boldsymbol{D}$$

$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{1}{(m_j-k)!}\cdot\frac{N_{j,m_j-k}(a_j)}{D_j(a_j)\cdot\left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}}$ pour $\boldsymbol{j = 1, 2, \cdots, p+q\ et\ k = m_j, (m_j-1), (m_j-2), \ldots 2, 1}$ avec

$$\text{Pour } j = 1, 2, \ldots p+q: D_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p}(x-a_i)^{m_i}\cdot\prod_{\substack{i=p+1\\i\neq j}}^{p+q}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_i})^{m_i}\cdot\prod_{i=p+1}^{p+q}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\overline{a}_i})^{m_i} = \prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p+2q}(x-a_i)^{m_i}$$

$$P_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p+2q}(x-a_i)$$

$$\boldsymbol{S_j(x)} = -\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{p+2q}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1})\cdot m_i\cdot(x-a_{i+1})\cdots(x-a_i)(x-a_i)$$

Pour $k = 1,\ 2, \cdots, (m_j - 1)$:

$$N_{j,0}(x) = N(x);\ N_{j,k}(x) = S_j(x) \cdot \left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N_{j,k-1}(x)\right)' \cdot P_j(x):$$

$$A_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}(a_j)}{D_j(a_j) \cdot \left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \left(\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \frac{\overline{A_{j,k}}}{(x-\overline{a}_j)^k} \right) \text{ et on obtient:}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\left(2\sum_{n=0}^{k} C_k^n (-1)^{k-n} \mathcal{R}\mathrm{e}\left[A_{j,k}(\overline{a}_j)^{k-n}\right]\right) \cdot x^n}{\left(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot x + |\, a_j\, |^2\right)^k}$$

Les fractions de la forme $\frac{N_u(x)}{\left(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot x + |a_j|^2\right)^u}$ peuvent être décomposées en éléments simples (2de espèce) en faisant plusieurs divisions euclidiennes successives ou en appliquant à plusieurs reprises la 1ière, les deux 1ières, ou les 3…expressions suivantes:

$$C'_{j,u} = N_u(a_j),\ C'_{j,u-1} = \frac{N'_u(a_j)}{2i\mathcal{I}m(a_j)} + i\frac{\mathcal{I}m(C_{j,u})}{2\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2},\ C'_{j,u-2} = -\frac{N''_u(a_j)}{8 \cdot (\mathcal{I}m(a_j))^2} + \frac{1}{4(\mathcal{I}m(a_j))^2} \cdot \left[C'_{j,u-1} + 2i \cdot \mathcal{I}m(C_{j,u-1})\right]$$

Avec bien sûr $\mathrm{A}'_{j,k} = \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)}$ ***et*** $\mathrm{B}'_{j,k} = \mathcal{R}e(C_{j,k}) - \mathrm{A}'_{j,k} \cdot \mathcal{R}e(a_j)$.

❖ Exemples de calculs:

➢ Exemple1:

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{M_{2,1}x + N_{2,1}}{(x^2+1)} + \frac{M_{2,2}x + N_{2,2}}{(x^2+1)^2}$

$$A_{j,k} = \frac{N_{j,k}(a_j)}{(m_j - k)! \cdot D_j(a_j) \cdot \left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}$$

$$C_{j,k} = \frac{N_{j,k}(a_j)}{(m_j - k)!\, D_j(a_j) \cdot \left(2\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j)\right)^{m_j-k}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C^n_{m_j-k+1-n}}{\left(2\mathcal{I}m(a_j)\right)^{2n}(m_j - k + 1 - n)} \cdot \left[(m_j - k + 1 - 2n) \cdot C_{j,k+n} + 2in \cdot \mathcal{I}m(C_{j,k+n})\right]$$

$$A_{j,k} = \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)} \quad et \quad B_{j,k} = \mathcal{R}e(C_{j,k}) - A_{j,k} \cdot \mathcal{R}e(a_j).$$

$$\boldsymbol{N_{j,0}(x) = N(x);\quad N_{j,k}(x) = S_j(x)\cdot\left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N_{j,k-1}(x)\right)'\cdot P_j(x)\,. = N_k = SN_{k-1} + N'_{k-1}P}$$

Les pôles: $\boldsymbol{a_1 = 1}$: $\boldsymbol{m_1 = 1}$, $\quad \boldsymbol{a_2 = i}$: $\boldsymbol{m_2 = 2}$ et ($a_3 = \overline{a_2} = -i$: $m_3 = 2$).

<u>La méthode directe:</u>

- Pour $\boldsymbol{a_1 = 0, m_1 = 1}$: $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

  $A_{1,1} = \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right)_0^{(1-1)} = \frac{-1}{1} = \boldsymbol{-1}$: $E_{1,1} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{x}}$, quand $m_j = 1$ n'y allez pas 2 chemins!

- Pour $\boldsymbol{a_2 = i,\ m_2 = 2}$: $\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x}}$

  $D_2(x) = x,\quad D_2(i) = i,$

  $P_2(x) = x\,,\ \ P_2(i) = i$

  $S_2(x) = -(1\cdot 1) = -1,$

  $N_{2,0}(x) = N(x) = x^2 - 1,\quad N_{2,2}(i) = -2$

  $N_{2,1}(x) = SN + N'P = (-1)(x^2-1) + (2x)x = x^2 + 1,\ \ N_{2,1}(i) = 0,$

  $C_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)_i = \frac{-2}{i} = 2i;$

  $A_{2,2} = \frac{2}{1} = \boldsymbol{2}\ et\ B_{2,2} = 0 - 2\cdot 0 = \boldsymbol{0}$: $E_{2,2} = \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^2}}$:

  $C_{2,1} = \frac{1}{1!}\cdot\frac{N_{2,1}(i)}{D_2(i)\cdot(2\cdot 1\cdot\cdot iP_2(i))} + i\frac{\Im m(C_{2,2})}{2(1)^2} = 0 + i = i = i;$

  $A_{2,1} = \frac{1}{1} = \boldsymbol{1}\ et\ B_{2,1} = 0 - 1\cdot 0 = \boldsymbol{0}$: $E_{2,1} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x^2+1)}}$

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

<u>La méthode hybride:</u>

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2-1}{x(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \left(\frac{B_{2,1}}{(x-i)} + \frac{\overline{B_{2,1}}}{(x+i)}\right) + \left(\frac{B_{2,2}}{(x-i)^2} + \frac{\overline{B_{2,2}}}{(x+i)^2}\right)}$$

$$B_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-2)} = \frac{-2}{-4i} = -\frac{1}{2}i$$

$$B_{2,1} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-1)} = \left(\frac{(i+3x+ix^2-x^3)}{x^2(x+i)^3}\right)_i = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{x(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{-1}{x} + \left(\frac{0,5}{(x-i)} + \frac{0,5}{(x+i)}\right) + \left(\frac{-0,5i}{(x-i)^2} + \frac{0,5i}{(x+i)^2}\right) = \frac{-1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

- **<u>Exemple 2:</u>**

- $\boldsymbol{f(x) =} \frac{4x^{12}+120x^{11}+1696x^{10}+14847x^{9}+89353x^{8}+388810x^{7}+1255223x^{6}+3043495x^{5}+5564147x^{4}+7644764x^{3}+7742675x^{2}+5373950x+1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6x+13)^5}$

$$f(x) = \frac{N(x)}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$
$$= \frac{4\,x^{12} + 120\,x^{11} + 1696\,x^{10} + 14847\,x^9 + 89353\,x^8 + 388810\,x^7 + 1255223\,x^6 + 3043495\,x^5 + 5564147\,x^4 + 7644764\,x^3 + 7742675\,x^2 + 5373950\,x + 1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$

Les calculs ici, compte tenu de leur grande taille sont effectués par les outils de calcul symbolique (littéral) de ***Matlab*** et de ***Microsoft-Mathematics***.

✓ **le résultat donné par la méthode directe:**

$$f(x) = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+2)^3} + \frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13} + \frac{-3\,x+1}{(x^2+6\,x+13)^2} + \frac{2\,x+5}{(x^2+6\,x+13)^3} + \frac{2\,x+2}{(x^2+6\,x+13)^4} + \frac{2\,x-2}{(x^2+6\,x+13)^5}$$

❖ Algorithme de la méthode transcrit en Matlab:

- ***Script Matlab:***

Programme principal:

```
clc;
global Nt F FF p
syms x F FF;
FF=0;
%donner la fonction rationnelle par: son numérateur N(x) et son
%dénominateur( en donnant les pôles et leur multiplicités)
Nt=4*x^12+120*x^11+1696*x^10+14847*x^9+89353*x^8+388810*x^7+1255223*x^6
+3043495*x^5+5564147*x^4+7644764*x^3+7742675*x^2+5373950*x+1966676;
% D(x) en donnant les pôles a et leur multiplicité m
% si a est réel de multiplicité m ca correspond au facteur (x-a)^m si a est
%complexe de multiplicité m pour les éléments simples de seconde espèce
%associé au facteur(x-a)^m*(x-à)^m=(x2-2Re(a)*x+![a]2)^m  où à est le
%conjugué de a et x2 signifie "x au carrée", [a], module de a
a(1)= -2;  m(1)=3;
a(2)= -3+2i; m(2)=5;% ici Mt=2 est les nombre de pôles pour l'exemple 2
a(3)=0;     m(3)=0;
a(4)=0;      m(4)=0;
j=1; D=1; p=1; pmax=0;
while (m(j) ~= 0)
    if  imag(a(j))== 0
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x-a(j))^m(j);
    else
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x^2-2*Re(a(j))*x+(abs(a(j)))^2)^m(j);
    end
    Mt=j; j=j+1;
end
F(pmax)=0*x; D; Mt; Nt/D
% Mt est le nombre racines réelles ou complexe à partie imaginaire positive
% j est l'indice de ces racines j=1, 2, ... Mt.
for j=1:Mt
    Da=1;
    for jj=[1:j-1 j+1:Mt ]
       if imag(a(jj))== 0
         Da=Da*(x-a(jj))^m(jj);
       else
         Da=Da*(x^2-2*Re(a(jj))*x+(abs(a(jj)))^2)^m(jj);
       end
    end
    Decomp2_a_m(a(j),m(j),Da);
end
```

```
F       % liste des éléments simples
%FF      %la fraction rationnelle décomposée
```

Résultat: (présente les éléments simples ; séparé par des virgules au lieu de +)

$$\left\{-\frac{1}{x+2},\frac{2}{(x+2)^2},\frac{4}{(x+2)^3},\frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13},\frac{1-3\,x}{(x^2+6\,x+13)^2},\frac{2\,x+5}{(x^2+6\,x+13)^3},\frac{2\,x+2}{(x^2+6\,x+13)^4},\frac{2\,x-2}{(x^2+6\,x+13)^5}\right\}$$

Les fonctions appelées:

```
function [ Decomp ] = Decomp( a, m, Da)
syms x ;
global aj F FF p
aj=a;
if imag(a) == 0
 for k=m:-1:1
  A(k)= 1/(factorial(m-k))*dN_Da(Da,m-k);
 end
 for k=1:m
   F(p)=A(k)/(x-a)^k;
   FF=FF+F(p);
   p=p+1;
 end
else
 for k = m:-1:1
    S=0;
    for n=1:((m-k+1)/2)
       S=S+(-1)^(n+1)*nCk(m-k+1-n,n)/(4^(n)*(Im(a))^(2*n)*(m-k+1-n))*((m-
k+1-2*n)*C(k+n)+2*1i*n*Im(C(k+n)));
    end
    C(k)=dN_Da(Da,m-k)/((2i*Im(a))^(m-k)*factorial((m-k)))+S;
    M(k)=Im(C(k))/Im(a);
    N(k)=Im(conj(C(k))*a)/Im(a);
 end
 for k = 1:m
    F(p)=(M(k)*x+N(k))/(x^2-2*Re(a)*x+(abs(a))^2)^(k);
    FF=FF+F(p);
    p=p+1;
 end
end
end  % pour la fonction ignorer dans les hiérarchies

function [Da] = dN_Da(Da,d)
 syms x ;
 global aj Nt
 fa = Nt/Da;
 T=diff(fa, x, d);
 Da=sym(subs(T, aj));
End

function [nCk] = nCk(n,k)
 nCk=nchoosek(n,k);
end

function [ Im ] = Im( a )
 Im=imag(a);
End

function [ Re ] = Re( a )
 Re=real(a);
```

```
End
```