Technique de calcul direct des éléments simples d'une fonction rationnelle réelle: *Méthode des N-dérivées*

HOUETOME Léon

Ingénieur en Informatique et Télécommunication, Enseignant de mathématiques : Université d'Abomey-Calavi (UAC/EPAC/LETIA)

houetomeleon@gmail.com, 01 BP 974 Cotonou (République du **Bénin**); Tél : +229 66982073

Résumé:

La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle est son expression comme somme d'un polynôme et de fractions rationnelles M/P_j^k où M est un polynôme et P_j est un polynôme irréductible avec ($d°M < d°P_j$). Cette décomposition est utilisée dans le calcul intégral pour faciliter la recherche des primitives de la fonction rationnelle associée mais aussi pour calculer des transformées de Laplace inverses... Par ailleurs les méthodes usuelles de calcul des éléments simples (divisions euclidiennes de toutes sortes, changement de variables, résolution de systèmes linéaires, calcul récursive des éléments d'ordre maximal suivi de leur isolation…) nécessitent parfois de longues gymnastiques parfois lourdes ou inefficaces. Cet article donne et démontre la formule de calcul direct (quasiment numérique), la plus simplifiée possible, des éléments simples d'une fonction rationnelle réelle ou non-réelle. Cette nouvelle méthode (du fait qu'il propose un calcul direct), outre son intérêt théorique, est plus rapide que les autres méthodes générales particulièrement quand la multiplicité est élevée (plus grande que 2) ou pour les éléments de seconde espèce. Ainsi cette méthode facilite énormément le calcul des éléments simples.

SOMMAIRE

I. Introduction générale:

Soit une fraction rationnelle sous la forme: $f(x) = \frac{N_0(x)}{D(x)}$ où $N_0(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. $D(x)$ admettant p+2q racines dont p racines réelles et 2q racines complexes pures deux à deux conjuguées et de même multiplicité (ordre) [1, 2 et 4]. Soient $(a_j)_{1 \leq j \leq p+q}$ p+q racines (de multiplicité m_j) des p+2q racines $(a_j)_{1 \leq j \leq p+2q}$ dont $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont les p racines réels; et $(a_j)_{p+1 \leq j \leq p+q}$ q racines complexes parmi les 2q racines complexes dont aucune n'est conjuguée de lui-même ou d'un des autres. On prendra pour cela les $(a_j)_{p+1 \leq j \leq p+q}$ en sorte qu'elles soient les q racines complexes à partie imaginaires positives $\mathcal{Im}(a_j) > 0$.

$f(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0 + \frac{N(x)}{D(x)}$ avec $d^o N < d^o D$ et

$\frac{N(x)}{D(x)}$ se décomposent en éléments simples de **1ère et de 2nde espèces** [1 et 4] et on a :

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{A_{j,k}}}{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_j})^{\boldsymbol{k}}} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{M_{j,k} x + N_{j,k}}}{(\boldsymbol{x}^2 - 2\mathcal{R}\mathbf{e}(\mathrm{a_j}) \cdot \boldsymbol{x} + |\, \boldsymbol{a_j} \,|^2)^{\boldsymbol{k}}}$$

Les $(a_j)_{p+1 \leq j \leq p+q}$ sont des racines complexes telles que $\mathcal{Im}(a_j) > 0$: $\mathcal{Re}(a_j)$, $\mathcal{Im}(a_j)$ et | a_j | sont respectivement les parties réelle et imaginaire puis le module de a_j. Ainsi la fonction rationnelle f s'exprime :

$$\boldsymbol{f(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{A_{j,k}}}{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_j})^{\boldsymbol{k}}} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{M_{j,k} x + N_{j,k}}}{(\boldsymbol{x}^2 - 2\mathcal{R}\mathbf{e}(\mathrm{a_j}) \cdot \boldsymbol{x} + |\, \boldsymbol{a_j} \,|^2)^{\boldsymbol{k}}}$$

$\boldsymbol{d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0}$ et $\boldsymbol{N(x)}$ peuvent être calculé par **la division euclidienne** de $N_0(x)$ par $D(x)$ et en sont respectivement le **quotient** et le **reste**. Mais le calcul des polynômes $d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0$ et $N(x)$ ne sont pas indispensable pour le calcul des éléments simples des deux types où $N_0(x)$ peut être utilisé en lieu et place de $N(x)$ dans les formules qui suivent et on pourra finalement calculer $d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0$ en faisant:

$$\boldsymbol{d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_0 = f(x) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x - a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{M_{j,k} x + N_{j,k}}{(x^2 - 2\mathcal{R}e(a_j) \cdot x + |\, a_j \,|^2)^k} = d(x)}$$

On peut aussi avoir les d_i en utilisant les nœuds ou valeurs constantes particulières r_i de x tous différents des a_j dans l'égalité précédente et en résolvant un système a n+1 lignes à n+1 inconnus à savoir $d_n,\ d_{n-1},\ \cdots$ et d_0 [1].

Cependant les méthodes usuelles de calcul des éléments simples des deux espèces (divisions euclidiennes de toutes sortes, changement de variables, résolution de systèmes linéaires, calcul récursive des éléments d'ordre maximal suivi de leur isolation…) nécessitent parfois de longues gymnastiques parfois lourdes ou inefficaces. Ainsi la nécessité d'une ***méthode de calcul plus directe et plus rapide*** s'impose: cette méthode dite '***des N-dérivées'*** est exposée en détail dans la partie IV.

II. Démonstration des expressions de la *méthode des N-dérivées*:

La méthode ci-proposée généralise le calcul direct (sans usage de divisions euclidiennes de toutes sortes, ni choix arbitraire de nœuds pour la résolution de système linéaire…) des éléments simples de première espèce et ceux ***de la seconde*** et offre une ***formule de calcul direct*** des éléments simples. Elle n'exige pour l'obtention de chaque élément $E_{j,k}$ que le calcul (pour $x=a_j$) de la dérivé d'ordre suivante d'une fonction rationnelle $f_j(x)$ (ou la dérivé 1$^{\text{ière}}$ d'un polynôme $N_{j,k}$) qui reste la même pour chaque pôle a_j.

$f_j(x)$ est la fonction rationnelle f(x) où D(x) est amputé de sont facteur $(x-a_j)^{m_j}$ ou $(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\, a_j\,|^2)^{m_j}=(x-a_j)^{m_j}(x-\overline{a_j})^{m_j}$

$$f_j(x)=\frac{N(x)}{D_j(x)} \text{ où}$$

$$D_j(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(x-a_k)^{m_k}\cdot\prod_{\substack{k=p+1\\k\neq j}}^{p+q}(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a}_k)\cdot x+|\, a_k\,|^2)^{m_k}$$

- **<u>Eléments simples de première espèce d'un pôle réel a_j : (rappels et lemmes) :</u>**

D'après la théorie des décompositions en éléments simples, on peut écrire $\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$ sous la forme [1, 2 et 4]:

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\boldsymbol{A_{j,k}}}{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_j}\right)^{\boldsymbol{k}}}+\sum_{\substack{jo=1\\jo\neq j}}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\boldsymbol{A_{jo,k}}}{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_{jo}}\right)^{\boldsymbol{k}}}+\sum_{jo=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\boldsymbol{M_{jo,k}x+N_{jo,k}}}{\left(\boldsymbol{x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(a_{jo})\cdot x+|\, a_{jo}\,|^2}\right)^{\boldsymbol{k}}}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{\left(x-a_j\right)^k}+\boldsymbol{g_j(x)}$$

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}=\frac{\boldsymbol{A_{j,1}}}{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_j}\right)}+\frac{\boldsymbol{A_{j,2}}}{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_j}\right)^2}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A_{j,m_j}}}{\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_j}\right)^{\boldsymbol{m_j}}}+\boldsymbol{g_j(x)}$$

$$\text{où}\;\; g_j(x)=\sum_{\substack{jo=1\\jo\neq j}}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jo,k}}{\left(x-a_{jo}\right)^k}+\sum_{jo=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{jo,k}x+N_{jo,k}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_{jo}})\cdot x+|\, a_{jo}\,|^2\right)^k}$$

$\boldsymbol{g_j(x)}$ est une fraction rationnelle qui n'admet plus a_j comme pôle et y est définie.

$$\frac{N(x)}{D_j(x)}=\frac{N(x)}{D(x)}\cdot\left(x-a_j\right)^{m_j}$$

$$\frac{N(x)}{D_j(x)}=A_{j,1}\left(x-a_j\right)^{m_j-1}+A_{j,2}\left(x-a_j\right)^{m_j-2}+\cdots+A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k}+\cdots+A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k}+\cdots+A_{j,m_j}+\boldsymbol{g_j}(x)\cdot\left(x-a_j\right)^{m_j}$$

$$\frac{N(x)}{D_j(x)} = \sum_{ko=1}^{k-1} A_{j,ko}\left(x-a_j\right)^{m_j-ko} + A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k} + A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k} + \sum_{ko=k+1}^{m_j} A_{j,ko}\left(x-a_j\right)^{m_j-ko} + \boldsymbol{g_j(x)} \cdot \left(x-a_j\right)^{m_j}$$

On dérive $(m_j - k)$ fois de part et d'autre et on remplace x par a_j :

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)} = \left(\sum_{ko=1}^{k-1} A_{j,ko}\left(x-a_j\right)^{m_j-ko} + A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k} + A_{j,k}\left(x-a_j\right)^{m_j-k} + \sum_{ko=k+1}^{m_j} A_{j,ko}\left(x-a_j\right)^{m_j-ko} + \boldsymbol{g_j(x)} \cdot \left(x-a_j\right)^{m_j}\right)^{(m_j-k)}$$

- ***Lemmes:***

Soit m, k et k_0 des entiers naturels non nuls on montre aisément que:

$$\left(A_{j,ko} \cdot \left(x-a_j\right)^{m-ko}\right)^{(m-k)}$$
$$= A_{j,ko} \cdot (m-ko) \cdot (m-ko-1) \ldots (k-ko+1) \cdot \left(x-a_j\right)^{k-ko}$$

- ***Lemme (1):*** si $ko < k$ alors on a $m - ko > m - k$.

D'où pour $\boldsymbol{x = a_j}$, $\left(\boldsymbol{A_{j,ko} \cdot (x-a_j)^{m-ko}}\right)^{(\boldsymbol{m-k})} = \left(\boldsymbol{A_{j,ko} \cdot (x-a_j)^{m-ko}}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m_j-k})} = \mathbf{0}$ **car** $(\boldsymbol{a_j - a_j})^{\boldsymbol{k-ko}} = \mathbf{0}$.

- ***Lemme (2):*** si $ko > k$ alors on a $k - ko < 0, k - ko \le -1$: $k - ko + 1 \le 0 \le m - ko < m - k$

D'où pour $\boldsymbol{x = a_j}$, $\left(\boldsymbol{A_{j,ko} \cdot (x-a_j)^{m-ko}}\right)^{(\boldsymbol{m-k})} = \left(\boldsymbol{A_{j,ko} \cdot (x-a_j)^{m-ko}}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m-k})} = \mathbf{0}$ car

$(m-ko) \cdot (m-ko-1) \ldots \cdot (k-ko+1) = 0$.

- ***Lemme (3):*** si $k \ge 1,\ m - k < m$ alors on a

$\left(\boldsymbol{g_j(x) \cdot (x-a_j)^m}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m-k})} = \left(\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{m-k}} \left(\boldsymbol{(x-a_j)^m}\right)^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(\boldsymbol{m-k-n})}\right)_{\boldsymbol{a_j}} = \mathbf{0}$ en vertu du lemme($\mathbf{1}$)

car $m > m - k \ge n$.

- ***Lemme (4):*** si $k \ge m,$ alors on a:

$$\left(\boldsymbol{g_j(x) \cdot (x-a_j)^m}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{k})} = \left(\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{(x-a_j)^m}\right)^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(\boldsymbol{k-n})}\right)_{\boldsymbol{a_j}}$$

$$\left(\boldsymbol{g_j(x) \cdot (x-a_j)^m}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{m! \cdot C_k^m \cdot \left(g_j(x)\right)_{a_j}^{(k-m)}}, \text{en effet}$$

$$\left(\boldsymbol{g_j(x)} \cdot (x-a_j)^m\right)_{a_j}^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{m-1} C_k^n \left(\left(x-a_j\right)^m\right)^{(n)} \left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(k-n)}\right)_{a_j} + C_k^m \left(\left(\left(x-a_j\right)^m\right)^{(m)} \left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(k-m)}\right)_{a_j} + \left(\sum_{n=m+1}^{k} C_k^n \left(\left(x-a_j\right)^m\right)^{(n)} \left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(k-n)}\right)_{a_j}$$

❖ ***Rappel et généralisation:***

La première et la dernière sommes sont nulles respectivement en vertu des lemmes (1) et (2) donc on a: $\left(\boldsymbol{g_j(x)} \cdot (x-a_j)^{m_j}\right)_{a_j}^{(k)} = m_j! \cdot C_k^{m_j} \left(\left(\boldsymbol{g_j(x)}\right)^{(k-m_j)}\right)_{a_j}$.

En vertu des lemmes (1), (2) et (3):

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} = 0 + A_{j,k}(m_j-k)! + 0 = A_{j,k} \cdot (m_j-k)!$$

et on a

$$\boxed{\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{1}{(m_j-k)!}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}^{(m_j-k)}}}$$

Cette expression est aussi valable pour les pôles complexes prise isolémént sans leur conjuguée. Mais le calcul litéral de la suite des polynômes $N_{j,k}$ s'effectue donc sur $\mathbb{C}$, ce qui peut rendre les calculs plus complexes.

➢ Eléments simples de seconde espèce pour un pôle non réel (complexe a_j):

En isolant les éléments simples du pôle $\boldsymbol{a_j}$ on peut écrire $\dfrac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$ sous la forme de:

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{j,k}x+N_{j,k}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^k}+\sum_{jo=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jo,k}}{(x-a_{jo})^k}+\sum_{\substack{jo=p+1\\ jo\neq j}}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{jo,k}x+N_{jo,k}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_{jo}})\cdot x+|\,a_{jo}\,|^2\right)^k}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{j,k}x+N_{j,k}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^k}+g_j(x)$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{M_{j,1}x+N_{j,1}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)}+\frac{M_{j,2}x+N_{j,2}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^2}+\cdots+\frac{M_{j,m_j}x+N_{j,m_j}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^{m_j}}+g_j(x)$$

$$\text{où }\; g_j(x)=\sum_{jo=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jo,k}}{(x-a_{jo})^k}+\sum_{\substack{jo=p+1\\ jo\neq j}}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{jo,k}x+N_{jo,k}}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_{jo}})\cdot x+|\,a_{jo}\,|^2\right)^k}$$

$\boldsymbol{g_j(x)}$ est une fraction rationnelle qui n'admet plus a_j comme pôle et y est défini.

$$\frac{N(x)}{D_j(x)}=\frac{N(x)}{D(x)}\cdot\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_{jo}})\cdot x+|\,a_{jo}\,|^2\right)^{m_j}=\frac{N(x)}{D(x)}\cdot(x-\bar{a}_j)^{m_j}(x-a_j)^{m_j}$$

$$\frac{N(x)}{D_j(x)}=(M_{j,1}x+N_{j,1})\cdot\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^{m_j-1}+(M_{j,2}x+N_{j,2})\cdot\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^{m_j-2}+\cdots+(M_{j,k}x+N_{j,k})$$

$$\cdot\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^{m_j-k}+\cdots+(M_{j,k+n}x+N_{j,k+n})\cdot\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^{m_j-k-n}+\cdots+(M_{j,m_j}x+N_{j,m_j})+g_j(x)$$

$$\frac{N(x)}{D_j(x)} = (M_{j,1}x + N_{j,1}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-1}(x - a_j)^{m_j-1} + (M_{j,2}x + N_{j,2}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-2}(x - a_j)^{m_j-2} + \cdots + (M_{j,k}x + N_{j,k}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k}(x - a_j)^{m_j-k} + \cdots + (M_{j,k+n}x + N_{j,k+n}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k-n}(x - a_j)^{m_j-k-n} + \cdots + (M_{j,m_j}x + N_{j,m_j}) + g_j(x) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j}(x - a_j)^{m_j}$$

$$\frac{N(x)}{D_j(x)} = \sum_{ko=1}^{k-1} (M_{j,ko}x + N_{j,ko}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-ko}(x - a_j)^{m_j-ko} + (M_{j,k}x + N_{j,k}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k}(x - a_j)^{m_j-k} + \sum_{ko=k+1}^{m_j} (M_{j,ko}x + N_{j,ko}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-ko}(x - a_j)^{m_j-ko} + g_j(x) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j}(x - a_j)^{m_j}$$

On dérive $(m_j - k)$ fois de part et d'autre et on obtient puis on remplace x par a_j:

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} = \sum_{ko=1}^{k-1} \left((M_{j,ko}x + N_{j,ko}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-ko}(x - a_j)^{m_j-ko}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} + \left((M_{j,k}x + N_{j,k}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k}(x - a_j)^{m_j-k}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} + \sum_{n=1}^{m_j-k} \left((M_{j,k+n}x + N_{j,k+n}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k-n}(x - a_j)^{m_j-k-n}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} + \left(g_j(x) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j}(x - a_j)^{m_j}\right)_{a_j}^{(m_j-k)}$$

En vertu du lemme (3) pour la première somme et le dernier terme simple, et du lemme (4) pour le premier terme simple et la deuxième somme. Il faut aussi remarquer le changement de variable $n = ko - k$:

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} = 0 + (m_j - k)! \cdot (M_{j,k}a_j + N_{j,k}) \cdot (a_j - \bar{a}_j)^{m_j-k} + \sum_{n=1}^{m_j-k} \left((M_{j,k+n}x + N_{j,k+n}) \cdot (x - \bar{a}_j)^{m_j-k-n}\right)_{a_j}^{(n)} (m_j - k - n)!\, C_{m_j-k}^{m_j-k-n} + 0$$

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{a_j}^{(m_j-k)} = (m_j - k)! \cdot (M_{j,k}a_j + N_{j,k}) \cdot (a_j - \bar{a}_j)^{m_j-k} + \sum_{n=1}^{m_j-k} (m_j - k - n)!\, C_{m_j-k}^{n} \cdot \left(C_n^0 (M_{j,k+n}a_j + N_{j,k+n}) \cdot \left((x - \bar{a}_j)^{m_j-k-n}\right)_{a_j}^{(n)} + C_n^1 M_{j,k+n} \cdot \left((x - \bar{a}_j)^{m_j-k-n}\right)_{a_j}^{(n-1)} + 0 + \cdots\right)$$

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})} = (m_j-\boldsymbol{k})!\cdot(\boldsymbol{M_{j,k}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k}})\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}}$$
$$+\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!\,C_{m_j-\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}\cdot\left((\boldsymbol{M_{j,k+n}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k+n}})\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})\cdot\ldots\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{2})\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})\cdot\ldots\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{2})(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1}}\right)$$

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})} = (m_j-\boldsymbol{k})!\cdot(\boldsymbol{M_{j,k}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k}})\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}}$$
$$+\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!\frac{(m-k)!}{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!\,(n)!}\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})\cdot\ldots\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{2})(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}}\left((\boldsymbol{M_{j,k+n}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k+n}})(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})\right)$$

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})} = (m_j-\boldsymbol{k})!\cdot(\boldsymbol{M_{j,k}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k}})\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}}$$
$$+\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!\frac{(m-k)!}{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!\,(n)!}\cdot\frac{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!}{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})!}\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})^{m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}}\left((\boldsymbol{M_{j,k+n}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k+n}})(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot(\boldsymbol{a_j}-\boldsymbol{\bar{a}_j})\right)$$

On désignera par $C_{j,k}$ l'expression $\boldsymbol{M_{j,k}a_j}+\boldsymbol{N_{j,k}}$ pour $\boldsymbol{k}=m_j, m_j-1,\ldots 2, 1$.

$$\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})} = (m_j-\boldsymbol{k})!\cdot C_{j,k}\cdot\left(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j)\right)^{m_j-\boldsymbol{k}}+\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}\frac{(m-k)!\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!}{(n)!\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})!}\cdot\left(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j)\right)^{m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}}\left((m_j-k-2n+1)\cdot C_{j,k+n}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j)\right)$$

Ainsi on a : $C_{j,k}=\frac{1}{(m_j-\boldsymbol{k})!\cdot(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{m_j-\boldsymbol{k}}}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})}-\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}\frac{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})!}{(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(n)!\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})!\cdot}\cdot\left((m_j-k-2n+1)\cdot C_{j,k+n}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j)\right)$

$$C_{j,k}=\frac{1}{(m_j-\boldsymbol{k})!}\cdot\frac{1}{(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{m_j-\boldsymbol{k}}}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j-\boldsymbol{k})}-\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}}\frac{(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(n)!\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})!\cdot(m_j-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})}\cdot\left[(m_j-k-2n+1)\cdot C_{j,k+n}+\boldsymbol{2ni}\mathcal{I}m(a_j)\cdot\boldsymbol{M_{j,k+n}}\cdot\right]$$

$$C_{j,k} = \frac{1}{(m_j - \boldsymbol{k})! \cdot (\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{m_j - \boldsymbol{k}}} \left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(m_j - \boldsymbol{k})} - \sum_{n=1}^{\frac{m_j - k+1}{2}} \frac{C^{\boldsymbol{n}}_{m_j - \boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}-\boldsymbol{n}}}{(\boldsymbol{2i}\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(m_j - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{n})} \cdot [(m_j - k - 2n + 1) \cdot C_{j,k+n} + \boldsymbol{2in}\mathcal{I}m(a_j) \cdot \boldsymbol{M_{j,k+n}} \cdot]$$

Or on a: $C_{j,k} = \boldsymbol{M_{j,k}a_j} + \boldsymbol{N_{j,k}} = \boldsymbol{M_{j,k}}\left(\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot +\boldsymbol{i}\mathcal{I}m(a_j)\right) + \boldsymbol{N_{j,k}} = \left(\boldsymbol{M_{j,k}}\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) + \boldsymbol{N_{j,k}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{M_{j,k}}\mathcal{I}m(a_j)$ **d'où** $\mathcal{I}m(C_{j,k}) = \boldsymbol{M_{j,k}}\mathcal{I}m(a_j)$

et $\boldsymbol{M_{j,k}} = \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)}$; puis $\mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k}) = \boldsymbol{M_{j,k}}\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) + \boldsymbol{N_{j,k}}$ **d'où** $\boldsymbol{N_{j,k}} = \mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k}) - \boldsymbol{M_{j,k}}\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) = \mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k}) - \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)}\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})$

$$\boldsymbol{N_{j,k}} = \frac{\mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k}) \cdot \mathcal{I}m(a_j) - \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot \mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)} = \frac{\mathcal{I}m(\overline{C_{j,k}} \cdot \boldsymbol{a_j})}{\mathcal{I}m(a_j)}$$

$$\boldsymbol{C_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{k})! \cdot (\boldsymbol{2i\mathcal{I}m(a_j)})^{\boldsymbol{m_j - k}}} \left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m_j - k})} - \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\frac{\boldsymbol{m_j - k+1}}{\boldsymbol{2}}} \frac{C^{\boldsymbol{n}}_{m_j - \boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}-\boldsymbol{n}}}{(\boldsymbol{2}i\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(m_j - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{n})} \cdot [(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{2n} + \boldsymbol{1}) \cdot \boldsymbol{C_{j,k+n}} + \boldsymbol{2in\mathcal{I}m(C_{j,k+n})}]$$

En somme: pour $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{m_j}$, $(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{1})$, $(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{2})$, $\ldots, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}$;

$$\boldsymbol{C_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{k})! \cdot (\boldsymbol{2i\mathcal{I}m(a_j)})^{\boldsymbol{m_j - k}}} \left[\left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m_j - k})}\right] - \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\frac{\boldsymbol{m_j - k+1}}{\boldsymbol{2}}} \frac{\boldsymbol{C^{n}_{m_j - k+1-n}} \cdot [(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{2n}) \cdot \boldsymbol{C_{j,k+n}} + \boldsymbol{2in} \cdot \boldsymbol{\mathcal{I}m(C_{j,k+n})}]}{(\boldsymbol{2}i\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(\boldsymbol{m_j} - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{n})}$$

et on a: $\boldsymbol{M_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{I}m(C_{j,k})}}{\boldsymbol{\mathcal{I}m(a_j)}}$ $\boldsymbol{et\ N_{j,k}} = \boldsymbol{\mathcal{R}\mathrm{e}(C_{j,k})} - \boldsymbol{\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})} \cdot \boldsymbol{M_{j,k}}$

- **Résumé: formules de calcul direct:**

$f(x) = \frac{N_0(x)}{D(x)} = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0 + \frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$ avec $d^oN < d^oD$.

$\boldsymbol{d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{d_0}$ et $\boldsymbol{N(x)}$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $N_0(x)$ par le polynôme $D(x)$.

$(a_j)_{1 \le j \le p+2q}$ sont toutes les p+2q racines de $D(x)$chacune de multiplicité m_j.

$(a_j)_{1 \le j \le p}$ sont les p racines réelles de $D(x)$ ou pôles réelles de f.

$(a_j)_{p+1 \le j \le p+q}$:q racines des 2q pôles complexes restants) avec $\mathcal{Im}(a_j) > 0$.

$$f(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}$$
$$+ \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}x + B_{j,k}}{(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot x + |\ a_j\ |^2)^k}:$$

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{A_{j,k}}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_j})^{\boldsymbol{k}}} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\boldsymbol{A_{j,k}x + B_{j,k}}}{(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2\mathcal{R}}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot \boldsymbol{x} + |\ \boldsymbol{a_j}\ |^2)^{\boldsymbol{k}}} \quad \text{où}$$

Pour $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, p, p+1, p+2, \dots, p+q}$ et pour $\boldsymbol{k = m_j, \ (m_j - 1), \dots 2, 1}$

- Si $\boldsymbol{a_j} \in \mathbb{R}$ soit $1 \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{A_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{m_j - k})!}\left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)_{\boldsymbol{a_j}}^{(\boldsymbol{m_j - k})}$$

- Si $\boldsymbol{a_j} \in \mathbb{C}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{Im}(a_j)} > 0$ soit $\boldsymbol{p} + 1 \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{C_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{m_j - k})! \cdot (\boldsymbol{2i\mathcal{Im}(a_j)})^{\boldsymbol{m_j - k}}}\left[\left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)_{a_j}^{(\boldsymbol{m_j - k})} - \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\frac{\boldsymbol{m_j - k + 1}}{\boldsymbol{2}}} \frac{\boldsymbol{C^n_{m_j - k + 1 - n}} \cdot \left[(\boldsymbol{m_j - k + 1 - 2n}) \cdot \boldsymbol{C_{j,k+n}} + \boldsymbol{2in} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Im}(C_{j,k+n})}\right]}{(\boldsymbol{2i\mathcal{Im}(a_j)})^{\boldsymbol{2n}}(\boldsymbol{m_j - k + 1 - n})}\right]$$

Et on obtient: $\boldsymbol{A_{j,k}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{Im}(C_{j,k})}}{\boldsymbol{\mathcal{Im}(a_j)}}$ ***et*** $\boldsymbol{B_{j,k}} = \boldsymbol{\mathcal{Re}(C_{j,k})} - \boldsymbol{\mathcal{Re}(a_j)} \cdot \boldsymbol{A_{j,k}}$

- **Méthode hybride**

Remarque: très connue pour trouver les éléments de 2nde espèce sans calculer les $C_{j,k}$, elle consiste à regrouper les éléments simples conjugués (de même ordre du même pôle complexe) [1 et 2].

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}+\sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\left(\frac{B_{j,k}}{(x-a_j)^k}+\frac{B'_{j,k}}{(x-\bar{a}_j)^k}\right)$$

$$A_{j,k}=\frac{1}{(m_j-k)!}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)}_{a_j},\ B_{j,k}=\frac{1}{(m_j-k)!}\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)}_{a_j}\ et\ B'_{j,k}=\frac{1}{(m_j-k)!}\left(\frac{N(x)}{D_{pj}(x)}\right)^{(m_j-k)}_{\bar{a}_j}=\overline{B_{j,k}}$$

$$si\ 1\le j\le p:\ D_j(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(x-a_k)^{m_k}\cdot\prod_{k=p+1}^{p+q}(x-a_j)^{m_k}(x-\bar{a}_j)^{m_k}$$

$$si\ p+1\le j\le p+q:\ D_j(x)=\prod_{k=1}^{p}(x-a_k)^{m_k}\cdot\prod_{\substack{k=p+1\\k\neq j}}^{p+q}(x-a_k)^{m_k}\prod_{k=p+1}^{p+q}(x-\bar{a}_k)^{m_k}$$

$$D_{pj}(x)=\prod_{k=1}^{p}(x-a_k)^{m_k}\cdot\prod_{k=p+1}^{p+q}(x-a_k)^{m_k}\prod_{\substack{k=p+1\\k\neq j}}^{p+q}(x-\bar{a}_k)^{m_k}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}+\sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{B_{j,k}\cdot(x-\bar{a}_j)^k+\overline{B_{j,k}}\cdot(x-a_j)^k}{(x-a_j)^k(x-\bar{a}_j)^k}$$

$$B_{j,k}(x-\bar{a}_j)^k+B'_{j,k}(x-a_j)^k=B_{j,k}\sum_{n=0}^{k}C_k^n x^n(-\bar{a}_j)^{k-n}+\overline{B_{j,k}}\cdot\sum_{n=0}^{k}C_k^n x^n(-a_j)^{k-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{k}C_k^n(-1)^{k-n}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}+\overline{B_{j,k}}\cdot(a_j)^{k-n}\right]x^n=\sum_{n=0}^{k}2C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]x^n$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k}+\sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\left(\sum_{n=0}^{k}2C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]\right)\cdot x^n}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|\,a_j\,|^2\right)^k}$$

$\frac{\left(\sum_{n=0}^{k}2C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]\right)\cdot x^n}{\left(x^2-2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x+|a_j|^2\right)^k}$ peut être décomposé en éléments simples en faisant plusieurs divisions euclidiennes successives de:

$$\left(\sum_{n=0}^{k}2C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]\right)\cdot x^n\ \text{par}\ x^2-2\mathcal{R}e(a_j)\cdot x+|\,a_j\,|^2.$$

On peut écrire $\left(\sum_{n=0}^{k} 2C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathbf{e}\left[B_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]\right)\cdot x^n$ comme développement suivants les puissances croissantes de $(x^2 - 2\mathcal{R}e(a_j)\cdot x + |a_j|^2)$ à coefficients polynomiaux (les restes des divisions euclidienne, de premier degré), on simplifie ce développement par $(x^2 - 2\mathcal{R}e(a_j)\cdot x + |a_j|^2)^k$, puis on regroupe les termes des éléments simples analogue ; on obtient la décomposition totale en éléments simples:

III. Vulgarisation du calcul des dérivés n^{ième}:

Cette partie vise à alléger le calcul des dérivées nièmes $\left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)}$ en $\boldsymbol{a_j}$ dans les expressions, en les remplaçant par celui d'une simple famille de polynômes $\left(N_{j,k}\right)_{0\leq k\leq m_j-1}$ que nous désignons par *suite de polynômes N-dérivées* de la fonction rationnelle $\frac{N}{D_j}$.

- ***Lemme(a):***

Dérivation des fonctions numériques factorisées [1] ou à dénominateur factorisé: soient $v_1, v_2, \cdots v_p, u$ et f une suite de fonctions et $m_1, m_2, \cdots m_p$ une suite de réels, on montre aisément par récurrence sur p que:

$$\left(v_1^{m_1}\cdot v_2^{m_2}\cdots v_p^{m_p}\right)' = \sum_{i=1}^{p} v_1^{m_1}\cdot v_2^{m_2}\cdots v_{i-1}^{m_{i-1}}\left(m_i v_i' v_i^{m_i-1}\right) v_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots v_p^{m_p} \quad (\mathbf{1}).$$

$$\text{Si } f = \frac{u}{v_1^{m_1}\cdot v_2^{m_2}\cdots v_p^{m_p}} \text{ alors d'apres } (\mathbf{1})$$

$$f' = \frac{u'(v_1\cdot v_2\cdots v_p) - u\cdot\sum_{i=1}^{p}\left(v_1\cdot v_2\cdots v_{i-1}\cdot(m_i v_i')\cdot v_{i+1}\cdots v_p\right)}{\left(v_1^{m_1}\cdot v_2^{m_2}\cdots v_p^{m_p}\right)\cdot(v_1\cdot v_2\cdots v_p)}.$$

- ***Lemme(b):***

Dérivation des polynômes réels totalement factorisé sur $\mathbb{C}$.

$$(\boldsymbol{Q_n(x)})' = \left(\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = \left(\sum_{u=1}^{n}\frac{\boldsymbol{m_u}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})}\right)\cdot\left(\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)$$

$$= \left(\sum_{u=1}^{n}\frac{\boldsymbol{m_u}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})}\right)\cdot \boldsymbol{Q_n(x)}$$

En toute rigueur ici et dans toute la suite, l'égalité (=) signifie que les deux fonctions sont égaux au sens large du terme (effectivement sur $\mathbb{R}\setminus\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}\ldots\}$ ou en terme de limite pour les points singuliers $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}\ldots$ et on adoucira la rigueur des notations pour progressez plus aisément.

<u>Démonstration</u>

- ✓ Pour n=1 :

$$\left(\prod_{u=1}^{1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = ((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1})' = \boldsymbol{m_1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1-1} = \frac{\boldsymbol{m_1}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1}$$

- ✓ Pour n=2

$$\left(\prod_{u=1}^{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = ((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_2})^{m_2})'$$

$$= \boldsymbol{m_1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_2})^{m_2} + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1}.\boldsymbol{m_2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_2-1}$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{m_1}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})}+\frac{\boldsymbol{m_2}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_1})^{m_1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_2})^{m_2}$$

- ✓ Si pour $n \geq 2$ on a :

$$\left(\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = \left(\sum_{u=1}^{n}\frac{\boldsymbol{m_u}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})}\right)\cdot\left(\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)$$

alors on a :

$$\left(\prod_{u=1}^{n+1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = \left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_{n+1}})^{m_{n+1}}\cdot\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)'$$

$$= \boldsymbol{m_{n+1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_{n+1}})^{m_{n+1}-1}\cdot\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u} + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_{n+1}})^{m_{n+1}}\cdot\left(\sum_{u=1}^{n}\frac{\boldsymbol{m_u}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})}\right)\cdot\left(\prod_{u=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)$$

$$\left(\prod_{u=1}^{n+1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)' = \left(\sum_{u=1}^{n+1}\frac{\boldsymbol{m_u}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})}\right)\cdot\left(\prod_{u=1}^{n+1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_u})^{m_u}\right)$$

- ✓ D'où $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\prod_{u=1}^{n}(x-a_u)^{m_u}\right)' = \left(\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{(x-a_u)}\right)\cdot\left(\prod_{u=1}^{n}(x-a_u)^{m_u}\right)$$

Remarque: Les a_u étant réels ou deux à deux conjugués de même multiplicité s'ils sont complexes on peut écrire :

$$\left(\prod_{u=1}^{n}(x-a_u)^{m_u}\right) = \prod_{u\le n, a_u\in\mathbb{R}}(x-a_u)^{m_u}\cdot\prod_{u\le n, Im(a_u)>0}(x-a_u)^{m_u}\,(x-\overline{a_u})^{m_u}$$

$$= \prod_{u\le n, a_u\in\mathbb{R}}(x-a_u)^{m_u}\cdot\prod_{u\le n, Im(a_u)>0}(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)^{m_u}$$

$$\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{(x-a_u)} = \sum_{u\le n, a_u\in\mathbb{R}}\frac{m_u}{(x-a_u)} + \sum_{u\le n, Im(a_u)>0}\left(\frac{m_u}{(x-a_u)}+\frac{m_u}{(x-\overline{a_u})}\right)$$

$$\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{(x-a_u)} = \sum_{u\le n, a_u\in\mathbb{R}}\frac{m_u\cdot 1}{(x-a_u)} + \sum_{u\le n, Im(a_u)>0}\left(\frac{m_u\cdot[2x+2Re(a_u)]}{(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)}\right)$$

Et on remarque d'ailleurs que:

$$\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{(x-a_u)} = \sum_{u\le n, a_u\in\mathbb{R}}\frac{m_u\cdot(x-a_u)'}{(x-a_u)} + \sum_{u\le n, Im(a_u)>0}\left(\frac{m_u\cdot(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)'}{(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)}\right)$$

On désignera par $q_u(x)$ le facteur irréductible de $Q_n(x)$ relatif à a_u soit $q_u(x)=(x-a_u)^{m_u}$ si $a_u\in\mathbb{R}$ou $q_u(x)=(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)^{m_u}$ si $Im(a_u)>0$. On posera $p_u(x)=(x-a_u)$ si $a_u\in\mathbb{R}$, ou $p_u(x)=(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)$ si $Im(a_u)>0$.

$$\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{(x-a_u)} = \sum_{u=1}^{n}\frac{m_u[p_u(x)]'}{[p_u(x)]},\quad Q_n(x)=\prod_{u=1}^{n}q_u(x)=\prod_{u=1}^{n}\big(p_u(x)\big)^{m_u}.$$

- ***Lemme(c):***

Dérivation de polynôme décomposé en produit de facteurs (de préférence) irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Soit: $\boldsymbol{Q_n(x)} = \prod_{\boldsymbol{u\leq n, a_u}\in\mathbb{R}} \boldsymbol{(x-a_u)^{m_u}} \cdot \prod_{\boldsymbol{u\leq n, Im(a_u)}>0} \boldsymbol{(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)^{m_u}}$

$$= \prod_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}}^{n} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}}$$

D'âpres le lemme (b) on a:

$$(\boldsymbol{Q_n(x)})' = \left(\prod_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im(a_u)\geq 0}}^{n} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}}\right)' = \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{u=1}\\ Im\,(a_u)\geq 0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{m_u}\left(p_u(x)\right)'}{\left(p_u(x)\right)}\right) \cdot \prod_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ \boldsymbol{Im(a_u)\geq 0}}}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{p_u(x)}\right)^{\boldsymbol{m_u}}.$$

$$\boldsymbol{P_n(x)} = \prod_{\boldsymbol{u\leq n, a_u}\in\mathbb{R}} \boldsymbol{(x-a_u)^1} \cdot \prod_{\boldsymbol{u\leq n, Im(a_u)}>0} \boldsymbol{(x^2-2Re(a_u)x+|a_u|^2)^1} = \prod_{\boldsymbol{u=1}}^{n} \left(p_u(x)\right)$$

- ***Lemme(d):***

Dérivée n^ième^ de fonction rationnelle à dénominateur décomposé en produit de facteurs (de préférence) irréductibles p_u.

<u>Dérivée première:</u>

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \cdot \boldsymbol{P_n(x)} - \boldsymbol{N_0(x)} \cdot \sum_{Im\,(a_u)\geq 0} \left(\boldsymbol{m_u} \cdot \boldsymbol{P_{n,u}(x)}\right)}{\left(\boldsymbol{Q_n(x)}\right) \cdot \boldsymbol{P_n(x)}}$$

$\boldsymbol{P_{n,u}(x)} = \left(\boldsymbol{p_u(x)}\right)' \cdot \prod_{\substack{\boldsymbol{v\neq u,}\\ \boldsymbol{Im(a_v)\geq 0}}} \left(\boldsymbol{p_v(x)}\right)$ est le polynome $P_n(x)$ où le facteur $p_u(x)$ (relatif au pôle a_u) est remplacé par sa dérivée 1 ou $(2x+2Re(a_u))$, avec $\boldsymbol{P_n(x)} = \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right) = \prod_{Im\,(a_u)\geq 0}^{\prime} \left(p_u(x)\right)$.

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}} - \boldsymbol{N_0(x)}\left(\sum^{\boldsymbol{n}}_{\substack{\boldsymbol{u=1}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \frac{\boldsymbol{m_u}\left(p_u(x)\right)'}{\left(p_u(x)\right)}\right) \cdot \prod^{\boldsymbol{n}}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ \boldsymbol{Im(a_u)\geq 0}}} \left(\boldsymbol{p_u(x)}\right)^{\boldsymbol{m_u}}}{\prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}} \cdot \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}}}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{N_0(x)}\left(\sum^{\boldsymbol{n}}_{\substack{\boldsymbol{u=1}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \frac{\boldsymbol{m_u}\left(p_u(x)\right)'}{\left(p_u(x)\right)}\right) \cdot \prod^{\boldsymbol{n}}_{\substack{\boldsymbol{v=1,}\\ \boldsymbol{Im(a_v)\geq 0}}} \left(\boldsymbol{p_v(x)}\right)^{\boldsymbol{1}}}{\prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}} \cdot \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \cdot \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im\,(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right) - \boldsymbol{N_0(x)} \cdot \left(\sum_{Im\,(a_u)\geq 0} \boldsymbol{m_u} \cdot \left(p_u(x)\right)' \cdot \prod_{\substack{\boldsymbol{v\neq u,}\\ \boldsymbol{Im(a_v)\geq 0}}} \left(\boldsymbol{p_v(x)}\right)\right)}{\prod_{Im\,(a_u)\geq 0} \left(p_u(x)\right)^{\boldsymbol{m_u}} \cdot \prod^{n}_{\substack{\boldsymbol{u=1,}\\ Im(a_u)\geq 0}} \left(p_u(x)\right)}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_k(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \cdot \boldsymbol{P_n(x)} - \boldsymbol{N_0(x)} \cdot \sum_{Im(a_u)\geq 0}\left(\boldsymbol{m_u} \cdot \boldsymbol{P_{n,u}(x)}\right)}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \boldsymbol{P_n(x)}}$$

$P_{n,u}(x) = \left(p_u(x)\right)^{/} \cdot \prod_{\substack{v\neq u,\\ Im(a_v)\geq 0}} \left(p_v(x)\right)$ est le polynome $P_n(x)$ où le facteur $p_u(x)$ (relatif au pôle a_u) est remplacé par sa dérivée $\left(\boldsymbol{p_u}(\boldsymbol{x})\right)^{/}$.

Posons $\boldsymbol{S_0} = \sum_{\substack{u=1\\ Im(a_u)\geq 0}}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{m_u} \cdot \boldsymbol{P_{n,u}(x)}\right)$ donc on a :

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{(\boldsymbol{N_0(x)})' \cdot \boldsymbol{P_n(x)} - \boldsymbol{N_0(x)} \cdot \boldsymbol{S_0(x)}}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \boldsymbol{P_n(x)}}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)' = \frac{-\boldsymbol{S_0(x)} \cdot \boldsymbol{N_0(x)} + (\boldsymbol{N_0(x)})' \cdot \boldsymbol{P_n(x)}}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \boldsymbol{P_n(x)}} = \frac{\boldsymbol{N_1(x)}}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \left(\boldsymbol{P_n(x)}\right)^{\boldsymbol{1}}}$$

<u>Dérivée k^{ième} par les *polynômes N-dérivées:*</u>

Ainsi de proche en proche la dérivée $k^{ième}$ prendrait la forme de :

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)^{(k)} = \frac{\boldsymbol{N_k(x)}}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \left(\boldsymbol{P_n(x)}\right)^{\boldsymbol{k}}}$$

Avec ;

$\boldsymbol{Q_n}(\boldsymbol{x}) = \prod_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{p_u}(\boldsymbol{x})\right)^{\boldsymbol{m_u}}$,

$\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x}) = \prod_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{p_u}(\boldsymbol{x})\right)$,

$\boldsymbol{S_0} = \sum_{u=1}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{m_u} \cdot p_u' \prod_{u\neq v=1}^{n} p_v\right)$,

$\boldsymbol{N_0} = \boldsymbol{N}$,

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)^{(k+1)} = \frac{\boldsymbol{N_{k+1}(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}\left(\boldsymbol{P_n(x)}\right)^{\boldsymbol{k+1}}} = \left(\frac{\boldsymbol{N_k(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}\left(\boldsymbol{P_n(x)}\right)^{\boldsymbol{k}}}\right)'$$

$$= \frac{-\boldsymbol{S_k(x)} \cdot \boldsymbol{N_k(x)} + (\boldsymbol{N_k(x)})' \cdot \boldsymbol{P_n(x)}}{(\boldsymbol{Q_n(x)}) \cdot \left(\boldsymbol{P_n(x)}\right)^{\boldsymbol{k+1}}}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)^{(k)} = \frac{\boldsymbol{N_k(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)(P_n(x))^k}} = \left(\frac{\boldsymbol{N_{k-1}(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)(P_n(x))^{k-1}}}\right)' = \frac{-\boldsymbol{S_{k-1}(x)\cdot N_{k-1}(x) + (N_{k-1}(x))' \cdot P_n(x)}}{\boldsymbol{(Q_n(x))\cdot (P_n(x))^k}}$$

$$\boldsymbol{S_k} = \sum_{u=1}^{\boldsymbol{n}}\left((\boldsymbol{m_u}+\boldsymbol{k})\cdot p_u' \prod_{u\neq v=1}^{n} p_v\right),$$

Car les multiplicités dans $(Q_n(x))\cdot(P_n(x))^k = Q_n \cdot {P_n}^k(x)$ augmentent de k par rapport à celles dans $Q_n(x)$ ainsi de suite …

$$\boldsymbol{S_k} = \sum_{u=1}^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{m_u}\cdot p_u' \prod_{u\neq v=1}^{n} p_v\right) + \boldsymbol{k}\cdot\sum_{u=1}^{\boldsymbol{n}}\left(p_u' \prod_{u\neq v=1}^{n} p_v\right),$$

$$\boldsymbol{R_n} = \sum_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{p_u'} \prod_{\boldsymbol{u\neq v=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_v}\right) = \boldsymbol{P_n'},$$

$$\boldsymbol{S_k = S_0 + k\cdot R_n = S_{k-1} + R_n},$$

$$\boldsymbol{N_k = -S_{k-1}\cdot N_{k-1} + N_{k-1}' \cdot P_n = -(S_0 + (k-1)\cdot P_n')\cdot N_{k-1} + N_{k-1}'\cdot P_n},$$

Ainsi la dérivée k$^{\text{ième}}$ s'exprime sous la forme de: $\left(\frac{\boldsymbol{N_0(x)}}{\boldsymbol{Q_n(x)}}\right)^{(k)} = \frac{\boldsymbol{N_k(x)}}{\boldsymbol{(Q_n(x))\cdot(P_n(x))^k}}$. On obtient ici une technique optimale de calcul des dérivées k$^{\text{ième}}$ des fractions rationnelles voir au-delà. Les $\boldsymbol{N_k}$ seront désigné les ***polynômes N-dérivées* de la fonction rationnelle** $\boldsymbol{\frac{N}{Q_n}}$**.**

- **<u>Simplification des dérivés n$^{\text{ièmes}}$ dans les expressions de $A_{j,k}$ *et* $C_{j,k}$:</u>**

Posons $\boldsymbol{F_{j,k}(x)} = \left(\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D_j(x)}}\right)^{(\boldsymbol{m_j-k})}$ avec $\boldsymbol{k = m_j,\ (m_j-1),\dots 2,1}$.

$\boldsymbol{D_j(x)} = \prod_{\boldsymbol{i=1,i\neq j}}^{\boldsymbol{p+q}}(p_i(x))^{m_i}$ **où** $p_i(x) = (x-a_i)$ ou $p_i(x) = (x^2 - 2Re(a_i)\cdot$ $x+|ai|2$ respectivement selon que $aj\in\mathbb{R}$ ou $aj\in\mathbb{C}$.

$$\boldsymbol{P_j}(x) = \prod_{i=1,\boldsymbol{i\neq j}}^{p}(x-a_i)\cdot \prod_{i=p+1,\boldsymbol{i\neq j}}^{p+q}(x^2 - 2\mathcal{R}e(a_i)\cdot x + |\,a_i\,|^2) = \prod_{\boldsymbol{i=1,i\neq j}}^{\boldsymbol{p+q}}(p_i(x))$$

$$\boldsymbol{P_{j,i}(x)} = (\boldsymbol{p_i(x)})' \prod_{\boldsymbol{i=1,u\neq j,u\neq i}}^{\boldsymbol{p+q}}(\boldsymbol{p_u(x)})$$

$$S_j(x) = S_{j,0}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ Im(a_i)\geq 0}}^{n} \left(m_i \cdot P_{j,i}(x)\right)$$

$$R_j(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ Im(a_i)\geq 0}}^{n} \left(P_{j,i}(x)\right) = P_j'$$

$$F_{j,m_j}(x) = \left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(0)} = \frac{N(x)}{D_j(x)} = \frac{N_{j,0}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^0} = \frac{N_{j,m_j-m_j}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^{m_j-m_j}}$$

$$F_{j,m_j-1}(x) = \left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(1)} = \left(\frac{N(x)}{\prod_{i\neq j}\left(p_i(x)\right)^{m_i}}\right)' = \frac{-S_{j,0}(x)\cdot N_{j,0}(x) + \left(N_{j,0}(x)\right)'\cdot P_j(x)}{\left(D_j(x)\right)\cdot P_j(x)}$$

$$= \frac{-\left(S_{j,0}(x) + (m_j - m_j)\cdot R_j(x)\right)\cdot N_{j,0}(x) + \left(N_{j,0}(x)\right)'\cdot P_j(x)}{\left(D_j(x)\right)\cdot P_j(x)} = \frac{N_{j,1}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^1} = \frac{N_{j,,m_j-(m_j-1)}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^{m_j-(m_j-1)}}$$

Si on a :

$$F_{j,k}(x) = \frac{N_{j,m_j-k}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^{m_j-k}}$$

Alors on a

$$F_{j,k-1}(x) = \left(\frac{N_{j,m_j-k}(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^{m_j-k}}\right)' = \frac{-\left(S_{j,0}(x) + (m_j-k)\cdot R_j(x)\right)\cdot N_{j,m_j-k}(x) + \left(N'_{j,m_j-k}(x)\right)\cdot P_j(x)}{D_j(x)\left(P_j(x)\right)^{m_j-(k-1)}} = \frac{N_{j,m_j-(k-1)}(x)}{D_j(x)\cdot\left(P_j(x)\right)^{m_j-(k-1)}}$$

Où $N_{j,0}(x) = N(x)$, $N_{j,m_j-(k-1)}(x) = -S_{j,m_j-k}(x)\cdot\left(N_{j,m_j-k}(x)\right) + \left(N'_{j,m_j-k}(x)\right)\cdot P_j(x)$:

$$N_{j,0} = N, \qquad N_{j,m_j-(k-1)} = -S_{j,m_j-k}\cdot N_{j,m_j-k} + N'_{j,m_j-k}\cdot P_j \;;\; N_{j,m_j-(k-1)}$$

$$S_{j,m_j-k} = s_{j,0}(x) + \left(m_j - k\right)\cdot R_j(x) \text{ et,}$$

$$N_{j,m_j-(k-1)} = -\left(S_{j,0} + (m_j-k)\cdot P_j'\right)\cdot N_{j,m_j-k} + N'_{j,m_j-k}\cdot P_j$$

pour $k = m_j, \left(m_j - 1\right), \ldots 2, 1$, voir lemme(d).

$$F_{j,k}(x) = \left(\frac{N(x)}{D_j(x)}\right)^{(m_j-k)} = \frac{N_{j,m_j-k}(x)}{D_j(x)\cdot\left(P_j(x)\right)^{m_j-k}}:$$

Pour $k = 1, 2 \ldots (m_j - 1)$,

$N_{j,0}(x) = N(x), \qquad S_j(x) = S_{j,0}(x);\ N_{j,k}(x) = -\left(S_{j,0}(x) + (k-1)\cdot R_j(x)\right)\cdot\left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N'_{j,k-1}(x)\right)\cdot P_j(x)$

$$N_{j,k} = -\left(S_j + (k-1)\cdot R_j\right)\cdot\left(N_{j,k-1}\right) + \left(N'_{j,k-1}\right)\cdot P_j,$$

$$N_{j,k} = -\left(S_j + (k-1)\cdot P'_j\right)\cdot N_{j,k-1} + N'_{j,k-1}\cdot P_j,$$

❖ ***<u>Théorème de la méthode directe :</u>***

Cette méthode est recommandée pour les pôles de multiplicités supérieures à 2. Elle permet d'évaluer directement les éléments simples y compris ceux d'ordre non maximal.

Remarque:

$$\begin{aligned}(m_j - k + 1 - 2n)\cdot C_{j,k+n} + 2in\cdot \mathcal{Im}\left(C_{j,k+n}\right)\\ &= (m_j - k + 1 - 2n)\cdot \mathcal{Re}\left(C_{j,k+n}\right) + (m_j - k + 1)\cdot \mathcal{Im}\left(C_{j,k+n}\right)\\ &= (m_j - k + 1)\cdot C_{j,k+n} - 2n\mathcal{Re}\left(C_{j,k+n}\right)\end{aligned}$$

Pour chaque pôle a_j on a:

$D_j(x) = (p_1(x))^{m_1}\cdot(p_2(x))^{m_2}\cdots\left(p_{j-1}(x)\right)^{m_{j-1}}\cdot\left(p_{j+1}(x)\right)^{m_{j+1}}\cdots\left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}}: D_j(a_j)$

$P_j(x) = p_1(x)\cdot p_2(x)\cdots\left(p_{j-1}(x)\right)\left(p_{j+1}(x)\right)\cdots p_{p+q}(x)$, calculer $P_j(a_j)$

$$S_j(x) = \sum_{i=1, p_u\neq p_j}^{p+q}\left(p_1(x)\cdots m_i\left(p_i(x)\right)'\cdots p_{p+q}(x)\right),$$

$$R_j(x) = \sum_{i=1, p_u\neq p_j}^{p+q}\left(p_1(x)\cdots\left(p_i(x)\right)'\cdots p_{p+q}(x)\right) = P'_j(x),$$

$N_{j,0}(x) = N(x)$, calculer $N(a_j)$

Et pour $k = 1, 2\ldots(m_j-2), (m_j-1)$**:**

$$N_{j,k}(x) = -\left(S_j(x) + (k-1)\cdot P'_j(x)\right)\cdot\left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N'_{j,k-1}(x)\right)\cdot P_j(x)$$

Et calculer $N_{j,k}(a_j)$

Enfin pour ce même pôle a_j et pour $k = m_j,\ (m_j - 1), (m_j - 1), \dots 2, 1$:

- Si $a_j \in \mathbb{R}$ soit $1 \leq j \leq p$:

$$A_{j,k} = \frac{N_{j,m_j-k}(a_j)}{(m_j-k)!\cdot D_j(a_j)\cdot\left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}$$

- Si $a_j \in \mathbb{C}\ et\ \mathcal{Im}(a_j) > 0$ soit $p+1 \leq j \leq p+q$:

$$C_{j,k} = \frac{N_{j,k}(a_j)}{(m_j-k)!\, D_j(a_j)\cdot\left(2i\mathcal{Im}(a_j)\cdot P_j(a_j)\right)^{m_j-k}} - \sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{C^n_{m_j-k+1-n}\cdot\left[(m_j-k+1)\cdot C_{j,k+n} - 2n\mathcal{Re}(C_{j,k+n})\right]}{(2i\mathcal{Im}(a_j))^{2n}(m_j-k+1-n)}$$

On obtient: $A_{j,k} = \dfrac{\mathcal{Im}(C_{j,k})}{\mathcal{Im}(a_j)}$ $\quad et \quad$ $B_{j,k} = \mathcal{Re}(C_{j,k}) - \mathcal{Re}(a_j)\cdot A_{j,k}$.

D_j , P_j , S_j et $N_{j,k}$ sont les seules expressions littérales nécessaires au calcul. Ainsi cette méthode est baptisée : *méthode des **N-dérivées***.

Algorithme de calcul optimal:

Pour chaque pôle a_j de multiplicité m_j on a :

$$D_j(x) = (p_1(x))^{m_1}\cdots\left(p_{j-1}(x)\right)^{m_{j-1}}\cdot\left(p_{j+1}(x)\right)^{m_{j+1}}\cdots\left(p_{p+q}(x)\right)^{m_{p+q}},$$

$$P_j(x) = p_1(x)\cdots\left(p_{j-1}(x)\right)\left(p_{j+1}(x)\right)\cdots p_{p+q}(x),$$

$$S_j(x) = \sum_{i=1, p_u\neq p_j}^{p+q}\left(p_1(x)\cdot p_2(x)\cdots p_{i-1}(x)\cdot m_i\left(p_i(x)\right)'\cdot p_{i+1}(x)\cdots p_{p+q}(x)\right),$$

$$R_j(x) = \sum_{i=1, p_u\neq p_j}^{p+q}\left(p_1(x)\cdots\left(p_i(x)\right)'\cdots p_{p+q}(x)\right) = P'_j(x),$$

$N_{j,0}(x) = N(x), N_{j,0} = N(a_j)$,

$G_{j,0} = D_j(a_j)$, $si\ a_j \in \mathbb{R}\ (j \leq p)$: $P_j = P_j(a_j)$ sinon $P_j = 2i\mathcal{Im}(a_j)\cdot P_j(a_j)$,

Et pour $k = 1, 2,\ \dots(m_j - 2), (m_j - 1)$:

$$N_{j,k}(x) = -\left(S_j(x) + (k-1)\cdot P'_j(x)\right)\cdot\left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N'_{j,k-1}(x)\right)\cdot P_j(x)$$

Et calculer $\boldsymbol{N_{j,k}(a_j)}$

$$\boldsymbol{G_{j,k} = G_{j,k-1} \cdot P_j.}$$

Enfin pour $\boldsymbol{k = m_j,\ (m_j - 1), (m_j - 1), \ldots 2, 1:}$

- Si $1 \leq j \leq p$ soit $a_j \in \mathbb{R}$:

On a: $$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}}{G_{j,m_j-k}}}$$

- Si $p + 1 \leq j \leq p + q$ soit $\mathcal{I}m(a_j) > 0$:

$$\boldsymbol{C_{j,k} = \frac{1}{(m_j - k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}}{G_{j,m_j-k}} + \sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C_{m_j-k+1-n}^{n} \cdot \left[(m_j - k + 1) \cdot C_{j,k+n} - 2n\mathcal{R}e(C_{j,k+n})\right]}{(2\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(m_j - k + 1 - n)}}$$

On a: $$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)} \quad et \quad B_{j,k} = \mathcal{R}e(C_{j,k}) - A_{j,k} \cdot \mathcal{R}e(a_j).}$$

Six expressions détaillées des $\boldsymbol{C_{j,k}}$ **pour** $\boldsymbol{k = m_j,\ (m_j - 1),\ (m_j - 2),\ (m_j - 3),\ (m_j - 4),\ (m_j - 5), \ldots}$.

- $\boldsymbol{C_{j,m_j} = \frac{N(a_j)}{D_j(a_j)} = \frac{N_{j,0}(a_j)}{D_j(a_j)}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-1} = \frac{N_{j,1}(a_j)}{2 \cdot D_j(a_j) \cdot (\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j))} + \frac{C_{j,m_j} - \mathcal{R}e(C_{j,m_j})}{2(\mathcal{I}m(a_j))^2}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-2} = \frac{N_{j,2}(a_j)}{8 \cdot D_j(a_j) \cdot (\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j))^2} + \frac{3 \cdot C_{j,m_j-1} - 2\mathcal{R}e(C_{j,m_j-1})}{4(\mathcal{I}m(a_j))^2}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-3} = \frac{N_{j,3}(a_j)}{48 \cdot D_j(a_j) \cdot (\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j))^3} + \frac{2C_{j,m_j-2} - \mathcal{R}e(C_{j,m_j-2})}{2(\mathcal{I}m(a_j))^2} - \frac{C_{j,m_j-1} - \mathcal{R}e(C_{j,m_j-1})}{8(\mathcal{I}m(a_j))^4}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-4} = \frac{N_{j,4}(a_j)}{384 \cdot D_j(a_j) \cdot (\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j))^4} + \frac{5C_{j,m_j-3} - 2\mathcal{R}e(C_{j,m_j-3})}{4(\mathcal{I}m(a_j))^2} - \frac{5C_{j,m_j-2} - 4\mathcal{R}e(C_{j,m_j-2})}{16(\mathcal{I}m(a_j))^4}}$
- $\boldsymbol{C_{j,m_j-5} = \frac{N_{j,5}(a_j)}{3840 \cdot D_j(a_j) \cdot (\mathcal{I}m(a_j) \cdot iP_j(a_j))^5} + \frac{3C_{j,m_j-4} - \mathcal{R}e(C_{j,m_j-4})}{2(\mathcal{I}m(a_j))^2} - \frac{3\left[3C_{j,m_j-3} - 2\mathcal{R}e(C_{j,m_j-3})\right]}{16(\mathcal{I}m(a_j))^4} + \frac{\left[C_{j,m_j-2} - \mathcal{R}e(C_{j,m_j-2})\right]}{32(\mathcal{I}m(a_j))^6}}$

❖ ***Théorème de la méthode hybride :***

Cette méthode est recommandée quand tous les pôles sont tous de multiplicités au moins 6. $\sum_{n=1}^{\frac{m_j-k+1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} C_{m_j-k+1-n}^{n} \cdot [(\boldsymbol{m_j-k+1}) \cdot \boldsymbol{C_{j,k+n}} - \boldsymbol{2n\mathcal{R}e(C_{j,k+n})}]}{(2\mathcal{I}m(a_j))^{2n}(m_j-k+1-n)}$ étant une expression plutôt complexe (lourde) à mémorise, la méthode hybride remédie à ce problème, mais ne permet plus de trouver *directement* les éléments simple de secondes espèces. Il faut donc en plus effectuer des divisions euclidiennes successives par $x^2 - 2\mathcal{R}e(a_k) \cdot x + |\, a_k \,|^2$ ou utiliser la formule $C'_{j,u} = N_u(a_j)$ (voir la fin de cette partie) à plusieurs reprises.

$$\boldsymbol{\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \left(\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \frac{\overline{A_{j,k}}}{(x-\overline{a}_j)^k} \right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\left(2\sum_{n=0}^{k} C_k^n (-1)^{k-n} \mathcal{R}\mathrm{e}\left[A_{j,k} \cdot (\overline{a}_j)^{k-n}\right] \cdot x^n\right)}{\left(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j}) \cdot x + |\, a_j \,|^2\right)^k}}$$

Pour $\boldsymbol{j = 1, 2, \cdots, p+q \ et \ k = m_j, (m_j - 1), (m_j - 2), \ldots 2, 1}$:

$$\boldsymbol{A_{j,k} = \frac{1}{(m_j-k)!} \cdot \frac{N_{j,m_j-k}(a_j)}{D_j(a_j) \cdot \left(P_j(a_j)\right)^{m_j-k}}} \quad \text{avec;}$$

$$D_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p} (x-a_i)^{m_i} \cdot \prod_{\substack{i=p+1 \\ i\neq j}}^{p+q} (x-\boldsymbol{a}_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=p+1}^{p+q} (x-\overline{\boldsymbol{a}}_i)^{m_i} = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p+2q} (x-a_i)^{m_i}$$

$$P_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p+2q} (x-a_i)$$

$$\boldsymbol{S_j(x)} = \sum_{\boldsymbol{i\geq 1, a_u \neq a_j}}^{p+2q} (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1}) \cdot m_i \cdot (x-a_{i+1}) \cdots (x-a_i)(x-a_i)$$

$$\boldsymbol{R_j(x)} = \sum_{\boldsymbol{i=1, a_u \neq a_j}}^{p+2q} (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1}) \cdot (x-a_{i+1}) \cdots (x-a_i)(x-a_i)$$

Pour $k = 1,\ 2, \cdots, (m_j - 1)$:

$$N_{j,0} = N;\ N_{j,k}(x) = -\left(S_j(x) + (k-1)\cdot R_j(x)\right)\cdot\left(N_{j,k-1}(x)\right) + \left(N'_{j,k-1}(x)\right)\cdot P_j(x):$$

On a :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\left(2\sum_{n=0}^{k} C_k^n(-1)^{k-n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left[A_{j,k}(\bar{a}_j)^{k-n}\right]\cdot x^n\right)}{\left(x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{a_j})\cdot x + |\,a_j\,|^2\right)^k}$$

Les $\frac{N_u(x)}{\left(x^2-2\mathcal{R}e(\mathrm{a_j})\cdot x+|a_j|^2\right)^u}$ peut être décomposé en éléments simples (2nde espèce) en faisant plusieurs divisions euclidiennes successives ou en appliquant à plusieurs reprises la 1ière, les deux 1ières, où les 3…expressions suivantes:

$$C'_{j,u} = N_u(a_j),\ C'_{j,u-1} = \frac{N'_u(a_j)}{2i\mathcal{I}m(a_j)} + i\frac{\mathcal{I}m(C_{j,u})}{2\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2},\ C'_{j,u-2} = -\frac{N''_u(a_j)}{8\cdot\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2} + \frac{1}{4\left(\mathcal{I}m(a_j)\right)^2}\cdot\left[C'_{j,u-1} + 2i\cdot\mathcal{I}m(C_{j,u-1})\right]$$

Avec bien sûr $\mathrm{A}'_{j,k} = \frac{\mathcal{I}m(C_{j,k})}{\mathcal{I}m(a_j)}$ ***et*** $\mathrm{B}'_{j,k} = \mathcal{R}e(C_{j,k}) - \mathrm{A}'_{j,k}\cdot\mathcal{R}e(a_j)$.

IV. Détail littéral de la technique et exemples de calculs:

❖ *Détail littéral de la technique de calculs pour un pôle a:*

Soit une fonction rationnelle f où le dénominateur est factorisé dont nous considérons le pôle a de multiplicité m, intéressons nous au **calcul des éléments simples relatifs à a**.

$$f(x) = \frac{N(x)}{(x-a)^m\cdot\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}} \text{ ou } \frac{N(x)}{(x^2-2\mathcal{R}e(a)\cdot x+|a|^2)^m\cdot\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}$$

Respectivement si $a \in \mathbb{R}$ ou si $a \in \mathbb{C}$: $I(a) = \mathcal{I}m(a) > 0$ et $N(x)$ est un polynôme a**vec $d°N(x) < d°((x-a)^m\cdot\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u})$.**

Où $P_u(x) = \begin{cases} (x-a_u),\ si\ a \in \mathbb{R} \\ (x^2 - 2\mathcal{R}e(a_u)\cdot x + |a_u|^2), si\ I(a_u) > 0 \end{cases}$

$a, a_1, a_2, \dots\ a_n$ sont les pôles tous distinct de f et $m, m_1, m_2, \dots\ m_n$ sont leurs multiplicités.

- **Pôle a de multiplicité m.**

On considère les polynômes D, P, S et N :

$\boldsymbol{D(x) = \prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}$: calculer $D(a)$,

$\boldsymbol{P(x) = \prod_{u=1}^{n} P_u(x)} : \boldsymbol{P(a)}$, à calculer seulement si $m \geq 2$,

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i P_i'(x) \cdot \prod_{u\geq 1, u\neq i}^{n}\left(P_u(x)\right)\right)}, \text{si } \boldsymbol{m} \geq 2$$

$$\boldsymbol{R(x) = P'(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i'(x) \cdot \prod_{u\geq 1, u\neq i}^{n}\left(P_u(x)\right)\right)}, \text{si } \boldsymbol{m} \geq 3 ,$$

$\boldsymbol{N_0(x) = N(x)}: \boldsymbol{N_0(a) = N(a)}$,

Pour $k = 1, 2 \dots (m-2), (m-1)$: (famille des polynômes N_k d'où le nom **'*méthode des N-dérivées*'**).

$$\boldsymbol{N_k = -(S + (k-1) \cdot P') \cdot N_{k-1} + N_{k-1}' \cdot P}:\ \boldsymbol{N_k(a)},$$

Enfin on a :

- Si $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{M(x)}{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}$$

Pour $k = m, (m-1), \dots 2{,}1$:

$$\boldsymbol{A_k = \frac{N_{m-k}(a)}{(m-k)! \cdot D(a) \cdot \left(P(a)\right)^{m-k}}}.$$

- Si $a \in \mathbb{C}\ et\ I(a) > 0$:

$$f(x) = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - 2\mathcal{R}e(a)\cdot x + |a|^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2 - 2\mathcal{R}e(a)\cdot x + |a|^2)^m} + \frac{M(x)}{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}$$

$$\boldsymbol{C_k = \frac{N_{m-k}(a)}{(m-k)!\, D(a) \cdot \left(2i\mathcal{I}m(a) \cdot P(a)\right)^{m-k}} - \sum_{n=1}^{\frac{m-k+1}{2}} \frac{C_{m-k-n}^{n-1}\left((m-k+1)C_{k+n} - 2n\mathcal{R}e(C_{k+n})\right)}{n \cdot (2i\mathcal{I}m(a))^{2n}}}.$$

Et on a: $\quad \boldsymbol{A_k = \frac{\mathcal{I}m(C_k)}{\mathcal{I}m(a)}} \quad ; \quad \boldsymbol{B_k = \mathcal{R}e(C_k) - A_k \cdot \mathcal{R}e(a)}$.

$a = -\frac{\beta}{2\alpha} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$ est la racine complexe à considérer pour $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ et $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 - 2\mathcal{R}e(a) \cdot x + |a|^2$.

❖ Quelques exemples:

➢ Exemple1:

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{2,1}x+B_{2,1}}{(x^2+1)} + \frac{A_{2,2}x+B_{2,2}}{(x^2+1)^2}}$

La méthode directe:

$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}}$ **:**

- Pour $\boldsymbol{a_1 = 0, m_1 = 1}$:

  $A_{1,1} = \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right)_0^{(1-1)} = \boldsymbol{-1}$: Quand $m_j = 1$: n'y allez pas par 2 chemins!

- Pour $\boldsymbol{a_2 = i,\ m_2 = 2}$: $\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x}}$

  $D_2(x) = x, \quad D_2(i) = i,$

  $P_2(x) = x\ , \ \ P_2(i) = i$

  $R_2(x) = 1,$

  $S_2(x) = (1 \cdot 1) = 1,$

  $N_{2,0}(x) = N(x) = x^2 - 1, \quad N_{2,0}(i) = -2$

  $N_{2,1}(x) = -(S + 0 \cdot R)N + N'P = (-1)(x^2-1) + (2x)x = x^2 + 1,$

$N_{2,1}(i) = 0,$

$C_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)_i = \frac{-2}{i} = 2i;$

$A_{2,2} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}\ et\ B_{2,2} = 0 - 2 \cdot 0 = \mathbf{0}$: $E_{2,2} = \boldsymbol{\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}}$:

$C_{2,1} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{N_{2,1}(i)}{D_2(i) \cdot \left(2 \cdot 1 \cdot \cdot iP_2(i)\right)} - \frac{2C_{2,2} - 2R\left(C_{2,2}\right)}{(2i)^2} = 0 - \frac{2 \cdot 2i - 2 \cdot 0}{-4} = i;$

$A_{2,1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}\ et\ B_{2,1} = 0 - 0 \cdot 1 = \mathbf{0}$: $E_{2,1} = \boldsymbol{\frac{x}{\left(x^2+1\right)}}$

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

La méthode hybride:

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2-1}{x(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \left(\frac{B_{2,1}}{(x-i)} + \frac{\overline{B_{2,1}}}{(x+i)}\right) + \left(\frac{B_{2,2}}{(x-i)^2} + \frac{\overline{B_{2,2}}}{(x+i)^2}\right)}$$

$$B_{2,2} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-2)} = \frac{-2}{-4i} = -\frac{1}{2}i$$

$$B_{2,1} = \left(\frac{x^2-1}{x(x+i)^2}\right)_i^{(2-1)} = \left(\frac{(i+3x+ix^2-x^3)}{x^2(x+i)^3}\right)_i = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{x(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{-1}{x} + \left(\frac{0,5}{(x-i)} + \frac{0,5}{(x+i)}\right) + \left(\frac{-0,5i}{(x-i)^2} + \frac{0,5i}{(x+i)^2}\right) = \frac{-1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

- ***Exemple 2:***

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$A = \left(\frac{1}{(x+1)}\right)_1^{(0)} = 0,5;\ B = \left(\frac{1}{(x-1)}\right)_{-1}^{(0)} = -0,5$$

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1/2}{(x-1)} + \frac{-1/2}{(x+1)}$$

- ***Exemple 3:***

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x-2)}$$

$$A = \left(\frac{x+3}{(x-1)(x+2)(x-2)}\right)_{-1}^{(0)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ B = \left(\frac{x+3}{(x+1)(x+2)(x-2)}\right)_1^{(0)} = -\frac{2}{3}$$

$$C = \left(\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}\right)_{-2}^{(0)} = -\frac{1}{12};\ D = \left(\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)}\right)_2^{(0)} = \frac{5}{12}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{-1/3}{(x+1)} + \frac{-2/3}{(x-1)} + \frac{-1/12}{(x+2)} + \frac{5/12}{(x-2)}$$

- ***Exemple 4:***

$$f(x) = \frac{10x^2 + 12x + 20}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Pôle 2 de multiplicité 1 :

$$A_1 = \left(\frac{10x^2 + 12x + 20}{(x^2 + 2x + 4)}\right)_2^{(0)} = \frac{84}{12} = 7;$$

Pôle $-1 + i\sqrt{3}$ de multiplicité 1 :

$$C_1 = \left(\frac{10x^2+12x+20}{x-2}\right)_{-1+i\sqrt{3}}^{(0)} = \frac{10(-1+i\sqrt{3})^2+12(-1+i\sqrt{3})+20}{(-1+i\sqrt{3})-2} = 1 + i3\sqrt{3};$$

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3, B_1 = 1 - (-1)(3) = 4;$$

$$f(x) = \frac{7}{(x-2)} + \frac{3x+4}{(x^2 + 2x + 4)}$$

- ***Exemple 5:***

$$f(x) = \frac{25}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

Pôle -2 de multiplicité 1 :

$$A_1 = \left(\frac{25}{(x^2+1)^2}\right)_{-2}^{(0)} = \frac{25}{25} = 1$$

Pôle i de multiplicité 2 :

$$C_2 = \left(\frac{25}{x+2}\right)_{0+i}^{(0)} = \frac{25}{2+i} = \frac{25(2-i)}{5} = 10 - 5i$$

$$A_2 = \frac{-5}{1} = -5, B_2 = 10 - 0 \cdot (-5) = 10;$$

$$D(x) = x + 2, D(i) = 2 + i$$

$$P(x) = x + 2, P(i) = 2 + i$$

$$S(x) = (x+2)' = 1,$$

$$N_0(x) = 25, \quad N_0(i) = 25$$

$$N_1(x) = -SN + N'P = -1 \cdot 25 + 0 \cdot (x+2) = -25$$

$$C_1 = \frac{-25}{(2+i)(2i(2+i))} - \frac{2C_2 - 2R(C_2)}{(2i)^2(1)} = \frac{-25}{(2+i)(2i(2+i))} - \frac{2(10-5i)-2\cdot 10}{(2i)^2(1)} = 2 - i$$

$$A_1=\frac{-1}{\mathbf{1}}=-1, B_1=2-0\cdot(-1)=2;$$

➢ ***Exemple 6:***

$$f(x)=\frac{3}{(x^3+1)}=\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Pôle -1 de multiplicité 1

$$A_1=\left(\frac{3}{(x^2-x+1)}\right)_{-1}=\frac{3}{3}=1$$

Pôle $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ de multiplicité 1

$$C_1=\left(\frac{3}{(x+1)}\right)^{0}_{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1)}=\frac{6}{(1+i\sqrt{3}+2)}=\frac{6(3-i\sqrt{3})}{12}=\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$A_1=\frac{-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-1, B_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot(-1)=2;$$

$$\frac{3}{(x^3+1)}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{-x+2}{(x^2-x+1)}$$

➢ ***Exemple 7:***

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)}}\ :$$

Pôle -2 de multiplicité 1

$$A_1=\left(\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\right)_{-2}=\frac{27}{27}=1$$

Pôle 1 de multiplicité 2

$$A_2=\left(\frac{x^3-21x-7}{(x+2)(x^2+x+1)}\right)_{1}=\frac{-27}{9}=-3$$

$D(x)=(x+2)(x^2+x+1);\ D(1)=9$

$S(x)=(1)(x^2+x+1)+(2x+1)(x+2)=3x^2+6x+3;$

$P(x) = (x+2)(x^2+x+1);\ P(1) = 9,$

$N_0(x) = x^3 - 21x - 7,$

$N_1(x) = -SN + N'P = -(3x^2+6x+3)(x^3-21x-7) + (3x^2-21)(x+2)(x^2+x+1),$

$N_1(1) = -(12)(-27) + (-18)(3)3 = 162,$

$$\mathrm{A}_1 = \frac{162}{9 \cdot 9} = 2$$

Pôle $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ de multiplicité 1

$$\mathrm{C}_1 = \left(\frac{\boldsymbol{x^3 - 21x - 7}}{(\boldsymbol{x+2})(\boldsymbol{x-1})^2}\right)_{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \mathbf{21}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) - \mathbf{7}}{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathbf{2})(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathbf{1})^2} = \frac{8 - \mathbf{21}(-4+i4\sqrt{3}) - \mathbf{56}}{(-\mathbf{1}+i\sqrt{3}+\mathbf{4})(-3+i\sqrt{3})^2} = \frac{5}{2} + i\frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$\mathrm{A}_1 = -3;\ \mathrm{B}_1 = \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)(-3) = 1$

$$\frac{\mathrm{x}^3 - 21\mathrm{x} - 7}{(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-1)^2(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)} = \frac{1}{(\mathrm{x}+2)} + \frac{2}{\mathrm{x}-1} + \frac{-3}{(\mathrm{x}-1)^2} + \frac{-3\mathrm{x}+1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}$$

- ***Exemple 8:***

$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+2})^2(\boldsymbol{x^2+1})^3}$ **:**

Pôle 1 de multiplicité 1

$$\mathrm{A}_1 = \left(\frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)_1 = -1,$$

Pôle -2 de multiplicité 2

$$\mathrm{A}_2 = \left(\frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x-1)(x^2+1)^3}\right)_{-2} = -3,$$

$\boldsymbol{D(x) = (x-1)(x^2+1)^3, D(-2) = -375},$

$\boldsymbol{S(x) = 1 \cdot 1(x^2+1) + 3 \cdot (2x)(x-1) = 7x^2 - 6x + 1, S(-2) = 41},$

$\boldsymbol{P(x) = (x-1)(x^2+1)}$

$N_0(x) = 3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13, N_0(-2) = \mathbf{1125},$

$N_1(1) = -SN + N'P = -41 \cdot \mathbf{1125} + (\mathbf{-3825}) \cdot (\mathbf{-15}) = \mathbf{11250},$

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\mathbf{11250}}{\mathbf{-375 \cdot (-15)}} = 2$$

Pôle i de multiplicité 3

$$\mathrm{C}_3 = \left(\frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x-1)(x+2)^2}\right)_i = 1 + i,$$

$\mathrm{A}_3 = \frac{1}{1} = 1; \quad \mathrm{B}_3 = 1 - 0 \cdot 1 = 1\,;$

$\boldsymbol{D(x)} = (x-1)(x+2)^2, \boldsymbol{D(i)} = \mathbf{-7} - \boldsymbol{i},$

$\boldsymbol{P(x)} = (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(x+2), \boldsymbol{P(i)} = \mathbf{-3} + \boldsymbol{i},$

$\boldsymbol{R(x)} = (x-1)'(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) + (x+2)'(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) = (\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) + (\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}\,, \boldsymbol{R(i)} = \mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{i},$

$\boldsymbol{S(x)} = \mathbf{1} \cdot (x-1)'(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) + \mathbf{2} \cdot (x+2)'(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) = \mathbf{1} \cdot (\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) + \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}\,, \boldsymbol{S(i)} = \mathbf{3}\boldsymbol{i},$

$N_0(x) = 3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13, N_0(i) = \mathbf{-6} - \mathbf{8}\boldsymbol{i},$

$N_1(x) = -SN + N'P = 15x^9 + 24x^8 - 60x^7 - 64x^6 - 60x^5 + 168x^4 + 21x^3 + 96x^2 + 66x + 10,$

$N_2(x) = -(S+R)N + N'P\,,$

$N_2(x) = 60\,x^{10} + 192\,x^9 - 222\,x^8 - 808\,x^7 + 520\,x^6 + 360\,x^5 + 1062\,x^4 - 1590\,x^3 - 294\,x^2 - 434\,x - 142\,,$

$N_1(i) = 170 + 60\boldsymbol{i}, \quad N_2(i) = 412 + 2516\boldsymbol{i},$

$$\boldsymbol{C_2} = \frac{170 + 60\boldsymbol{i}}{(\mathbf{-7} - \boldsymbol{i}) \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-3} + \boldsymbol{i}))^{\mathbf{1}}} - \frac{\mathbf{2}(1+i) - \mathbf{2} \cdot \mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{i})^2(\mathbf{1})} = \mathbf{2} - \mathbf{3}\boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{A_2} = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{1}} = \mathbf{-3} \quad ; \quad \boldsymbol{B_2} = \mathbf{2} - \mathbf{0}(\mathbf{-3}) = \mathbf{2};$

$$\boldsymbol{C_1} = \frac{412 + 2516\boldsymbol{i}}{(\mathbf{2})!\,(\mathbf{-7} - \boldsymbol{i}) \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-3} + \boldsymbol{i}))^2} - \frac{\mathbf{2}(\mathbf{3}(\mathbf{2} - \mathbf{3}\boldsymbol{i}) - \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{2})}{(\mathbf{2}\boldsymbol{i})^2(\mathbf{2})} = -1 + 2\boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{A_1} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}} = \mathbf{2} \quad ; \quad \boldsymbol{B_1} = \mathbf{-1} - \mathbf{0}(\mathbf{2}) = \mathbf{-1};$

D'où :

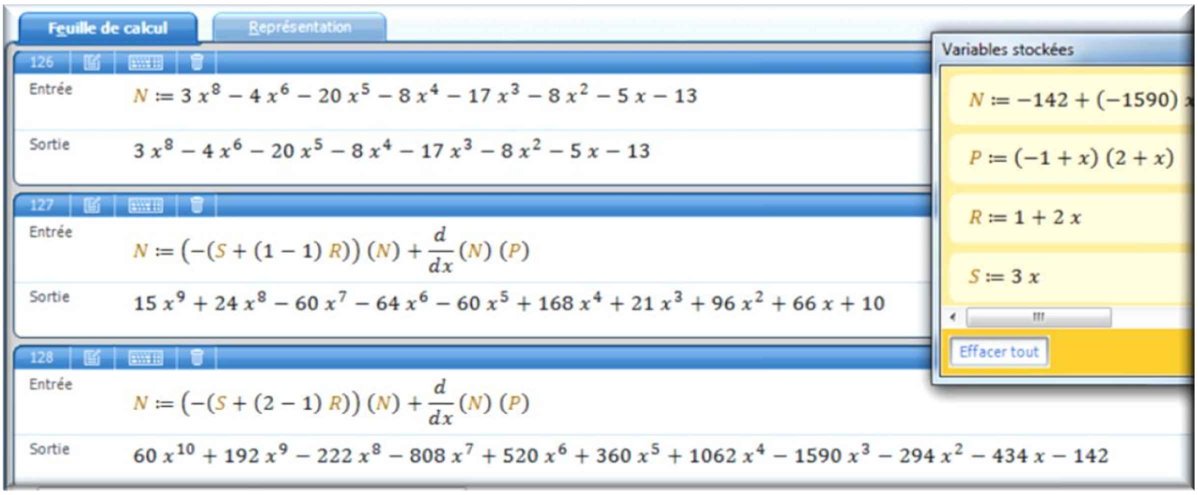
$$\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{2\,x-1}{x^2+1}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}$$

➢ ***Exemple 9:***

- $f(x)=\frac{4\,x^{12}+120\,x^{11}+1696\,x^{10}+14847\,x^9+89353\,x^8+388810\,x^7+1255223\,x^6+3043495\,x^5+5564147\,x^4+7644764\,x^3+7742675\,x^2+5373950\,x+1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$

$$f(x)=\frac{N(x)}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$
$$=\frac{4\,x^{12}+120\,x^{11}+1696\,x^{10}+14847\,x^9+89353\,x^8+388810\,x^7+1255223\,x^6+3043495\,x^5+5564147\,x^4+7644764\,x^3+7742675\,x^2+5373950\,x+1966676}{(x+2)^3\,(x^2+6\,x+13)^5}$$

Les calculs ici, compte tenu de leur grande taille sont effectués par les outils de calcul symbolique (littéral) de ***Microsoft-Mathematics*** en suivant le schéma de calcul de l'exemple suivant pour le calcul des polynômes N_k.



✓ <u>La méthode de *directe* donne le résultat suivant:</u>

$$f(x)=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{4}{(x+2)^3}+\frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13}+\frac{-3\,x+1}{\left(x^2+6\,x+13\right)^2}+\frac{2\,x+5}{\left(x^2+6\,x+13\right)^3}+\frac{2\,x+2}{\left(x^2+6\,x+13\right)^4}+\frac{2\,x-2}{\left(x^2+6\,x+13\right)^5}$$

✓ <u>La méthode hybride:</u>

$$f(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{4}{(x+2)^3}+\frac{\frac{5}{2}-\frac{48339}{16384}i}{x+(3+2i)}+\frac{\frac{5}{2}+\frac{48339}{16384}i}{x+(3-2i)}+\frac{-\frac{4909}{8192}-\frac{5851}{16384}i}{\left(x+(3+2i)\right)^2}+\frac{-\frac{4909}{8192}+\frac{5851}{16384}i}{\left(x+(3-2i)\right)^2}+\frac{-\frac{293}{4096}-\frac{79}{2048}i}{\left(x+(3-2i)\right)^3}$$
$$+\frac{-\frac{293}{4096}+\frac{79}{2048}i}{\left(x+(3+2i)\right)^3}+\frac{-\frac{13}{512}-\frac{19}{1024}i}{\left(x+(3+2i)\right)^4}+\frac{-\frac{13}{512}+\frac{19}{1024}i}{\left(x+(3-2i)\right)^4}+\frac{\frac{1}{256}-\frac{1}{128}i}{\left(x+(3+2i)\right)^5}+\frac{\frac{1}{256}+\frac{1}{128}i}{\left(x+(3-2i)\right)^5}$$

On fusionne deux à deux les éléments simples conjugués et on obtient:

$$f(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{4}{(x+2)^3}+\frac{5\,x+\frac{13101}{4096}}{x^2+6\,x+13}+\frac{-\frac{4909x^2}{4096}-\frac{10289x}{1024}-\frac{59651}{4096}}{(x^2+6\,x+13)^2}+\frac{-\frac{293}{2048}x^3-\frac{1689}{2048}x^2+\frac{1293}{2048}x+\frac{9905}{2048}}{(x^2+6\,x+13)^3}$$
$$+\frac{-\frac{13\,x^4}{256}-\frac{29\,x^3}{32}-\frac{537\,x^2}{128}-5\,x+\frac{407}{256}}{(x^2+6\,x+13)^4}+\frac{\frac{x^5}{128}-\frac{5x^4}{128}-\frac{95x^3}{64}-\frac{505x^2}{64}-\frac{1795x}{128}-\frac{841}{128}}{(x^2+6\,x+13)^5}$$

En effectuant des divisions euclidiennes successives du numérateur $\mathrm{Nu_k}(x)$ des **éléments non-simples** $\frac{\mathrm{Nu_k}(x)}{(x^2+6x+13)^k}$ par $(x^2+6x+13)$ on peut les écrire suivant les puissances croissantes de $(x^2+6x+13)$, en simplifiant les différents termes de ce développement par $(x^2+6x+13)^k$ puis en regroupant les termes des éléments simples analogues on obtient la décomposition:

$$\frac{5x+\frac{13101}{4096}}{x^2+6x+13}=\frac{5x+\frac{13101}{4096}}{x^2+6x+13}$$

$$\frac{-\frac{4909x^2}{4096}-\frac{10289x}{1024}-\frac{59651}{4096}}{(x^2+6x+13)^2}=\frac{-\frac{4909}{4096}(x^2+6x+13)-\frac{5851x}{2048}+\frac{2083}{2048}}{(x^2+6*x+13)^2}=\frac{-\frac{4909}{4096}}{(x^2+6*x+13)}+\frac{-\frac{5851x}{2048}+\frac{2083}{2048}}{(x^2+6*x+13)^2}$$

$$\frac{-\frac{293}{2048}x^3-\frac{1689}{2048}x^2+\frac{1293}{2048}x+\frac{9905}{2048}}{(x^2+6x+13)^3}=\frac{0x+0}{(x^2+6x+13)}+\frac{\frac{-293x}{2048}+\frac{69}{2048}}{(x^2+6x+13)^2}+\frac{\frac{293x}{128}+\frac{563}{128}}{(x^2+6x+13)^3}$$

$$\frac{-\frac{13x^4}{256}-\frac{29x^3}{32}-\frac{537x^2}{128}-5x+\frac{407}{256}}{(x^2+6x+13)^4}=\frac{0x+0}{(x^2+6x+13)}+\frac{0x-\frac{13}{256}}{(x^2+6x+13)^2}+\frac{-\frac{19x}{64}+\frac{47}{64}}{(x^2+6x+13)^3}+\frac{\frac{19x}{8}+\frac{5}{8}}{(x^2+6x+13)^4}$$

$$\frac{\frac{x^5}{128}-\frac{5x^4}{128}-\frac{95x^3}{64}-\frac{505x^2}{64}-\frac{1795x}{128}-\frac{841}{128}}{(x^2+6x+13)^5}=\frac{0x+0}{x^2+6x+13}+\frac{0x+0}{(x^2+6x+13)^2}+\frac{\frac{x}{128}-\frac{17}{128}}{(x^2+6x+13)^3}+\frac{\frac{-3x}{8}+\frac{11}{8}}{(x^2+6x+13)^4}+\frac{2x-2}{(x^2+6x+13)^5}$$

Ainsi en faisant la **somme des éléments simples analogues** on retrouve :

$$f(x)=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{4}{(x+2)^3}+\frac{5x+2}{x^2+6x+13}+\frac{-3x+1}{(x^2+6x+13)^2}+\frac{2x+5}{(x^2+6x+13)^3}+\frac{2x+2}{(x^2+6x+13)^4}+\frac{2x-2}{(x^2+6x+13)^5}$$

V. <u>Etude comparative du coût de calcul de la nouvelle méthode avec les autres techniques générales:</u>

On se propose donc d'étudier la performance de cette nouvelle technique (dite *des N-dérivées*) qui diffère déjà dans le fond des autres techniques dès que $m \geq 2$, particulièrement pour les éléments d'ordre non-maximal. Cette étude se basera sur l'exemple d'illustration 8.

$$f(x)=\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}$$

Le calcul par la *méthode des N-dérivées* ayant déjà été détaillé (voir exemple 8 précédent), nous présenterons dans la suite l'essentiel des techniques générales usuelles tout en mettant l'accent sur *le coût du calcul*.

❖ ***Itération du calcul des éléments simples d'ordre maximal***

Soit $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{(x-a)^m \cdot \prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}}$ ou $\frac{\boldsymbol{N(x)}}{(x^2-2\mathcal{R}\boldsymbol{e(a)}\cdot x+|\boldsymbol{a}|^2)^{\boldsymbol{m}}\cdot\prod_{u=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_u(x)}\right)^{\boldsymbol{m_u}}}$

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{(x-a)^m \cdot \prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{x-a}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{(x-a)^2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A_m}}{\boldsymbol{(x-a)^m}} + \frac{\boldsymbol{M(x)}}{\boldsymbol{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}}$$

ou bien

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{(x^2-2\mathcal{R}\boldsymbol{e(a)}\cdot x+|\boldsymbol{a}|^2)^{m}\cdot\prod_{u=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_u(x)}\right)^{m_u}} = \frac{\boldsymbol{A_1 x + B_1}}{x^2-2\mathcal{R}\boldsymbol{e(a)}\cdot x+|\boldsymbol{a}|^2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A_m x + B_m}}{(x^2-2\mathcal{R}\boldsymbol{e(a)}\cdot x+|\boldsymbol{a}|^2)^m} + \frac{\boldsymbol{M(x)}}{\prod_{u=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_u(x)}\right)^{m_u}}$$

Prenons en illustration les cas des éléments simples de premières espèces on a:

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{(x-a)^m \cdot \prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{x-a}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{(x-a)^2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A_m}}{\boldsymbol{(x-a)^m}} + \frac{\boldsymbol{M(x)}}{\boldsymbol{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}}$$

On multiplie par $(x-a)^m$ de part et d'autre et on a :

$$\frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}} = \boldsymbol{A_1(x-a)^{m-1}} + \boldsymbol{A_2(x-a)^{m-2}} \ldots + \boldsymbol{A_m} + \frac{\boldsymbol{M(x)}}{\boldsymbol{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(x)\right)^{m_u}}}\boldsymbol{(x-a)^m}$$

On remplace x par a et on a :

$$\boldsymbol{A_m} = \frac{\boldsymbol{N(a)}}{\boldsymbol{\prod_{u=1}^{n}\left(P_u(a)\right)^{m_u}}}$$

Par analogie on calcule de la même façon C_m puis A_m et B_m pour les éléments simples de seconde espèce d'ordre maximale relatif à a. Il est donc évident que le calcul de A_m (ou C_m) pour les éléments simples d'ordre maximal ne présente fondamentalement pas de différence avec notre nouvelle technique. La démarcation (performance) de la nouvelle méthode (dite des *N-dérivées*) se met clairement en évidence à partir du calcul de A_{m-1} (ou C_{m-1}), A_{m-2} (ou C_{m-2}),… A_1 (ou C_1). En effet l'énorme calcul littéral (développement, sommations et divisions euclidiennes pour la simplification des fonctions rationnelles intermédiaires) nécessaire à l'isolation des éléments simples d'ordre maximal $\frac{\boldsymbol{A_m}}{(\boldsymbol{x-a})^{\boldsymbol{m}}}$ n'est plus nécessaire, cette difficulté étant remplacée par le très simple calcul de la suite de polynômes N_k.

Illustration

$$f(x)=\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{\mathrm{C}}{(x+2)^2}+\frac{D\,x+\mathrm{E}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{F}\,x+\mathrm{G}}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+\mathrm{I}}{(x^2+1)^3}$$

Calcul des éléments simples d'ordre maximal (première itération)

$$A=\left(\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)_{x=1}=-1,$$

$$C=\left(\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x^2+1)^3}\right)_{x=-2}=-3,$$

$$Hi+I=\left(\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x+2)^2}\right)_{x=i}=1+i\colon H=1\;et\;I=1,$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\left(\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x+2)^2}+\frac{-(x+1)}{(x^2+1)^3}\right)$$

$$f(x)$$
$$=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}$$
$$+\left(\frac{3x^8-4x^6-20x^5-8x^4-17x^3-8x^2-5x-13+(x+2)^2(x^2+1)^3+3(x-1)(x^2+1)^3+-(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\left(\frac{4\,x^8+7\,x^7+x^5-3\,x^4-7\,x^2+6\,x-8}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

Les éléments simples d'ordre maximaux ayant été isolés, les multiplicités de chaque pôle doivent diminuer de 1 et le numérateur $4\,x^8+7\,x^7+x^5-3\,x^4-7\,x^2+6\,x-8$ peut être factorisé par $(x-1)(x+2)(x^2+1)$. .. On effectue la division euclidienne de $4\,x^8+7\,x^7+x^5-3\,x^4-7\,x^2+6\,x-8$ par $(x-1)(x+2)(x^2+1)$et on obtient$4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4$. Il en résulte donc la simplification de la fonction rationnelle intermédiaire. La fraction rationnelle $\frac{4\,x^8+7\,x^7+x^5-3\,x^4-7\,x^2+6\,x-8}{(x+2)(x^2+1)^2}$ est donc simplifiable par$(x-1)(x+2)(x^2+1)$. On est donc sur que le calcul est sans erreur de calcul jusqu'ici (première itération).

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\left(\frac{(x-1)(x+2)(x^2+1)(4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4)}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)(x^2+1)^2}\right)$$

Calcul des éléments simples d'ordre maximal (2ème itération)

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)(x^2+1)^2}\right)$$

$$\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x+2}+\frac{D\,x+\mathrm{E}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{F}\,x+\mathrm{G}}{(x^2+1)^2}$$

$$B=\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x^2+1)^2}\right)_{x=-2}=2,$$

$$\mathrm{F}\,i+\mathrm{G}=\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)}\right)_{x=-2}=2-3\boldsymbol{i}: F=-3\;et\;G=2,$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)(x^2+1)^2}+\frac{-2}{x+2}+\frac{3\,x-2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4}{(x+2)(x^2+1)^2}+\frac{-2}{x+2}+\frac{3\,x-2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{4\,x^4+3\,x^3+x^2-x+4-2(x^2+1)^2+(3\,x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{2x^4+3x^3+3x-2}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

On effectue la division euclidienne de $2x^4+3x^3+3x-2$ par $(x+2)(x^2+1)$ et on obtient $2\,x-1$. La fraction rationnelle $\frac{2x^4+3x^3+3x-2}{(x+2)(x^2+1)^2}$ est donc simplifiable par $(x+2)(x^2+1)$. On est donc sur que le calcul est sans erreur de calcul jusqu'ici (2ème itération).

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{(x+2)(x^2+1)(2\,x-1)}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{(x+2)(x^2+1)(2\,x-1)}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{x+2}+\frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{(2\,x-1)}{(x^2+1)}$$

Enfin on met les éléments dans le bon ordre et on a:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3}}$$

Il faut remarquer que la **méthode itérative est une méthode horizontale**, en effet le calcul se fait par lot d'éléments simples d'ordre maximal (ou maximal intermédiaire) des différents pôles alors que **la *technique des N-dérivées* est méthode verticale** c'est-à-dire qu'on calcule tout les éléments simples relatif à un pôle avant de passer au pôle suivant: $\boldsymbol{f(x) = \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{-1}{x-1}}$.

Coût du calcul de la méthode itérative

On voit donc que chaque itération nécessite un long calcul littéral (développements, sommations, factorisations par division euclidienne pour la simplification des fonctions rationnelle intermédiaire). Le coût de ce calcul littéral est évidemment plus fastidieux que le calcul littéral de la suite de polynôme N_k.

Vérification des résultats partielle

La décomposition en éléments simples consiste à calculer progressivement un nombre donné de paramètres $(A_{j,k}\ (et\ B_{j,k}))$ utile pour l'écriture de la décomposition. Au cours d'un tel calcul qui pourrait s'avérer long, il est important de pouvoir s'assurer que les résultats partiels (l'ensemble des paramètres déjà calculés) sont sans erreur de calcul car la justesse le reste du calcul en dépend. La méthode itérative offre cette possibilité de vérification grâce à la simplifiabilité de la fraction rationnelle intermédiaire c'est-à-dire quant le reste de la division euclidienne est nul.

Cette possibilité est aussi présente pour la *méthode des **N-dérivées***, il est judicieux de commencer par le pôle de plus grande multiplicité afin de baisser rapidement la taille (degré) des polynômes après les simplifications. En effet on isole la somme des éléments simples relatif à chaque pôle dès qu'ils sont calculés. Faisons donc une illustration toujours grâce à l'exemple précédent.

$$f(x) = \frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}$$

Parmi $(x-1)$, $(x+2)^2$ et $(x^2+1)^3$, $(x^2+1)^3$ a le plus grand degré et on a en appliquant la *technique des N-dérivées*:

$$f(x) = \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \left(\frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3} + \frac{-2\,x+1}{(x^2+1)} + \frac{3\,x-2}{(x^2+1)^2} + \frac{-(x+1)}{(x^2+1)^3}\right)$$

$$f(x) = \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \left(\frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13 + [(-2\,x+1)(x^2+1)^2 + (3\,x-2)(x^2+1) - (x+1)](x-1)(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \left(\frac{x^8 - 5\,x^7 - 2\,x^6 - 15\,x^5 - 12\,x^4 - 15\,x^3 - 14\,x^2 - 5\,x - 5}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \left(\frac{(x^2 - 5\,x - 5)(x^2+1)^3}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}\right)$$

Ainsi le fait que la fraction soit simplifiable par $(x^2+1)^3$ montre que les éléments déjà calculé sont tous juste.

$$f(x) = \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{x^2 - 5\,x - 5}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{(x+2)^2}} + \left(\frac{x^2 - 5\,x - 5}{(x-1)(x+2)^2} + \frac{\mathbf{-2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{(x+2)^2}}\right)$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{(x+2)^2}} + \left(\frac{x^2 - 5\,x - 5 + (-2(\boldsymbol{x+2}) + 3)\big((x-1)\big)}{(x-1)(x+2)^2}\right)$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{(x+2)^2}} + \left(\frac{-x^2 - 4\,x - 4}{(x-1)(x+2)^2}\right)$$

$$= \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{(x+2)^2}} + \left(\frac{-(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2\,x-1}{(x^2+1)} + \frac{-3\,x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{(\boldsymbol{x+2})^2} + \frac{-1}{(x-1)}$$
$$= \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x-1}} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{-3}}{(\boldsymbol{x+2})^2} + \frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2+1})} + \frac{\mathbf{-3}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{(\boldsymbol{x^2+1})^2} + \frac{\boldsymbol{x+1}}{(\boldsymbol{x^2+1})^3}$$

Une différence fondamentale entre les deux techniques reste donc le fait que la méthode itérative passe par l'isolation de la somme des éléments d'ordre maximal (de l'ensemble des différents pôles) alors que la *méthode des N-dérivées* isole la somme des éléments relatifs à un pôle (de préférence celui de plus grande multiplicité). D'où l'intérêt de *la méthode des N-dérivées* lorsque **le nombre de pôles est relativement petit et que leurs multiplicités sont grandes**. Il faux aussi noter que si cette isolation est nécessaire pour la méthode itérative, elle reste facultative pour *la méthode des N-dérivées* (voir l'algorithme de la résumé page 1).

- ***Résolution de système linéaire***

On fait une identification en rendant l'égalité suivante au même dénominateur ou en remplacent x par 9 valeurs (de préférence réelle) tous distinctes des pôles (1, -2, *i*). On forme ainsi **un système linéaire de 9 équations à 9 inconnues** (A, B, C, D, E, F, G, H, I). S'il n'est pas nécessaire de calculer au préalable les éléments simples d'ordre maxi, le calcul de ses derniers diminue considérablement la taille du système linéaire ici on pourrait ainsi passer d'un système de taille 9 à celui d'une taille 5.

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\mathrm{C}}{(x+2)^2} + \frac{D\,x+\mathrm{E}}{x^2+1} + \frac{\mathrm{F}\,x+\mathrm{G}}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+\mathrm{I}}{(x^2+1)^3}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x-1}} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2+1})} + \frac{\mathbf{-3}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{(\boldsymbol{x^2+1})^2} + \frac{\boldsymbol{x+1}}{(\boldsymbol{x^2+1})^3}$$

Coût du calcul de la méthode

Résolution de système linéaire de taille élevée: calcul matriciel fastidieux. Le coût de ce calcul matriciel est encore plus lourd que le calcul littéral de la suite de polynôme N_k.

Cette technique (matricielle) bien qu'elle soit universelle (applicable pour les éléments de 1ère et 2nde espèces) n'offre **aucune possibilité de vérification séquentielle**.

- ***Changement de variable (applicable seulement pour les éléments de première espèce).***

On fait le changement de variable $x = t + a$ $(t = x - a)$ de préférence à partir des pôles de plus grande multiplicité en l'occurrence $x = -2$ pour notre exemple illustratif. Ainsi on pose $x = t - 2$ $(t = x + 2)$ pour notre exemple illustratif.

$$f(x) = \frac{3x^8 - 4x^6 - 20x^5 - 8x^4 - 17x^3 - 8x^2 - 5x - 13}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{3\,t^8 - 48\,t^7 + 332\,t^6 - 1316\,t^5 + 3312\,t^4 - 5489\,t^3 + 5918\,t^2 - 3825\,t + 1125}{t^2(t-3)\ \left((t-2)^2+1\right)^3}$$

On fait la division du numérateur par $(t-3)\ \left((t-2)^2+1\right)^3$ suivant les puissances croissante de t. On s'arrête dès que le nombre de termes du quotient est égale à $m = 2$.

$$= \frac{(\boldsymbol{t-3})\ \left((\boldsymbol{t-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{3}}(-3+2\,t) + t^2(t^6 - 15\,t^5 + 89\,t^4 - 273\,t^3 + 459\,t^2 - 398\,t + 133)}{t^2(\boldsymbol{t-3})\left((\boldsymbol{t-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{3}}}$$

$$= \frac{(-3+2\,t)}{t^2} + \frac{(t^6 - 15\,t^5 + 89\,t^4 - 273\,t^3 + 459\,t^2 - 398\,t + 133)}{(\boldsymbol{t-3})\left((\boldsymbol{t-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{3}}}$$

$$= \frac{2}{\mathrm{t}} + \frac{-3}{t^2} + \frac{t^6 - 15\,t^5 + 89\,t^4 - 273\,t^3 + 459\,t^2 - 398\,t + 133}{(\boldsymbol{t-3})\left((\boldsymbol{t-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{3}}}$$

En suite on pose $u = t - 3$ pour le pôle $x = -1$, et on réitère la méthode.

Coût du calcul de la méthode de changement de variable

Cette technique exige un long calcul littéral de polynômes de degré élevé: développements et sommations, division euclidienne suivant les puissances croissantes de t et enfin itération(s) de la méthode pour le reste des pôles. Division euclidienne ou application de l'une des méthodes précédentes pour les pôles de secondes espèces. Le coût de ce calcul littéral est donc toujours plus fastidieux que le calcul littéral de la suite de polynôme N_k.

Pour la méthode de changement de variable, il n'y a non plus **aucune possibilité de vérification séquentielle**.

VI. Implémentation de la méthode sous *Matlab*:

Nous implémentons ici un programme *Matlab* basé sur la *technique des N-dérivées*. Ce programme calcul et donne automatiquement les éléments simples.

❖ *Script Matlab:*

- ***Méthode des** N-dérivées:*

Programme principal:

```
clc;
global Nt F FF p
syms x F FF;
FF=0;
%donner la fonction rationnelle par: son numérateur N(x) et son
%dénominateur( en donnant les pôles et leur multiplicités)
Nt=4*x^12+120*x^11+1696*x^10+14847*x^9+89353*x^8+388810*x^7+1255223*x^6
+3043495*x^5+5564147*x^4+7644764*x^3+7742675*x^2+5373950*x+1966676;
% D(x) en donnant les pôles a et leur multiplicité m
% si a est réel de multiplicité m ca correspond au facteur (x-a)^m sinon,
% si a est complexe de multiplicité m pour les éléments simples de seconde
% espèce associé au facteur(x-a)^m*(x-à)^m=(x2-2Re(a)*x+![a]2)^m  où à est
% le conjugué de a et x2 signifie "x au carrée", [a], module de a
a(1)= -2;  m(1)=3;
a(2)= -3+2i; m(2)=5;% ici Mt=2 est les nombre de pôles pour l'exemple 2
a(3)=0;     m(3)=0;
a(4)=0;      m(4)=0;
j=1; D=1; p=1; pmax=0;
while (m(j) ~= 0)
    if  imag(a(j))== 0
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x-a(j))^m(j);
    else
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x^2-2*Re(a(j))*x+(abs(a(j)))^2)^m(j);
    end
    Mt=j; j=j+1;
end
F(pmax)=0*x; D; Mt;
Nt/D
% Mt est le nombre de racines réelles ou complexes à partie imaginaire
positive
% j est l'indice de ces racines j=1, 2, ... Mt.
for j=1:Mt
    Da=1;
    for jj=[1:j-1 j+1:Mt ]
       if imag(a(jj))== 0
         Da=Da*(x-a(jj))^m(jj);
       else
         Da=Da*(x^2-2*Re(a(jj))*x+(abs(a(jj)))^2)^m(jj);
       end
    end
    Decomp2_a_m(a(j),m(j),Da);
end
F      % liste des éléments simples
%FF     %la fraction rationnelle décomposée
```

Résultat: (présente les éléments simples ; séparé par des virgules au lieu de +)

$$\left\{-\frac{1}{x+2},\frac{2}{(x+2)^2},\frac{4}{(x+2)^3},\frac{5\,x+2}{x^2+6\,x+13},\frac{1-3\,x}{(x^2+6\,x+13)^2},\frac{2\,x+5}{(x^2+6\,x+13)^3},\frac{2\,x+2}{(x^2+6\,x+13)^4},\frac{2\,x-2}{(x^2+6\,x+13)^5}\right\}$$

❖ *Les fonctions appelées:*

```
function [ Decomp ] = Decomp( a, m, Da)
syms x ;
global aj F FF p
aj=a;
if imag(a) == 0
 for k=m:-1:1
  A(k)= 1/(factorial(m-k))*dN_Da(Da,m-k);
 end
 for k=1:m
   F(p)=A(k)/(x-a)^k;
   FF=FF+F(p);
   p=p+1;
 end
else
 for k = m:-1:1
    S=0;
    for n=1:((m-k+1)/2)
       S=S+(-1)^(n+1)*nCk(m-k+1-n,n)/(4^(n)*(Im(a))^(2*n)*(m-k+1-n))*((m-
k+1-2*n)*C(k+n)+2*1i*n*Im(C(k+n)));
    end
    C(k)=dN_Da(Da,m-k)/((2i*Im(a))^(m-k)*factorial((m-k)))+S;
    M(k)=Im(C(k))/Im(a);
    N(k)=Im(conj(C(k))*a)/Im(a);
 end
 for k = 1:m
    F(p)=(M(k)*x+N(k))/(x^2-2*Re(a)*x+(abs(a))^2)^(k);
    FF=FF+F(p);
    p=p+1;
 end
end
end  % pour la fonction ignorer dans les hiérarchies
function [Da] = dN_Da(Da,d)
 syms x ;
 global aj Nt
 fa = Nt/Da;
 T=diff(fa, x, d);
 Da=sym(subs(T, aj));
End
function [nCk] = nCk(n,k)
 nCk=nchoosek(n,k);
end
function [ Im ] = Im( a )
 Im=imag(a);
end
function [ Re ] = Re( a )
 Re=real(a);
end
```

- ***Méthode alternative:***

Programme principal:

```
clc;
%donner la fonction rationnelle par son numerateur N(x) et son denominateur
global Nt F FF p
```

```
syms x F FF;
FF=0;
%Nt=4*x^12+120*x^11+1696*x^10+14847*x^9+89353*x^8+388810*x^7+1255223*x^6+30
43495*x^5+5564147*x^4+7644764*x^3+7742675*x^2+5373950*x+1966676;
Nt=x^2-1;
% D(x) en donnant les poles a et leur multiplicité m
% si a est réel de multiplicité m xa correspond au facteur (x-a)^m
% si a est cmplexe de multiplicité m pour les éléments simples de seconde
% espece associé au facteur(x-a)^m*(x-à)^m=(x2-2Re(a)*x+![a]2)^m
% où à est le conjugé de a et x2 signifie "x au carrée", [a], module de a
a(1)=0;     m(1)=1;
a(2)=1i;  m(2)=2;% ici Mt=2 est les nombre de poles
a(3)=1i;      m(3)=0;
a(4)=0;       m(4)=0;
a(5)=0;       m(5)=0;
j=1; D=1; p=1; pmax=0;
while (m(j) ~= 0)
    if  imag(a(j))== 0
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x-a(j))^m(j);
    else
        pmax=pmax+m(j);
        D=D*(x^2-2*Re(a(j))*x+(abs(a(j)))^2)^m(j);
    end
    Mt=j;
    j=j+1;
end
F(pmax)=0*x;
D; Mt; Dpa=1;
Nt/D
% Mt est le nombre racines réelles ou complexes à partie imaginaire
positive j est l'indice de ces racines j=1, 2, ... Mt.
for j=1:Mt
    a(j)
    Da=1;
    for jj=[1:j-1 j+1:Mt ]
       if imag(a(jj))== 0
         Da=Da*(x-a(jj))^m(jj);
       else
         Da=Da*(x^2-2*Re(a(jj))*x+(abs(a(jj)))^2)^m(jj);
       end
    end
     if imag(a(j))~= 0
         Da0=Da;
         Da=Da0*(x-conj(a(j)))^m(j);
         Dpa=Da0*(x-(a(j)))^m(j);
     end
     Da;Dpa;
    Decomp3_a_m(a(j),m(j),Da,Dpa);
end
F      % liste des éléments simples
%FF     %la fraction rationnelle décomposée
```

<u>Résultat (présente les éléments simples; séparés par des virgules au lieu de +)</u>

$$\left\{-\frac{1}{x},\frac{\frac{1}{2}}{x-i},\frac{\frac{1}{2}}{x+i},\frac{-\frac{1}{2}i}{(x-i)^2},\frac{\frac{1}{2}i}{(x+i)^2}\right\}$$

```
function [ Decomp ] = Decomp3_a_m( a, m, Da, Dpa)
syms x ;
global aj F FF p
aj=a;
```

```
 for k=m:-1:1
  A(k)= 1/(factorial(m-k))*dN_Da(Da,m-k);
   if imag(aj)~= 0
        B(k)= 1/(factorial(m-k))*dN_Dpa(Dpa,m-k);
   end
 end
 for k=1:m
   F(p)=A(k)/(x-a)^k;
   FF=FF+F(p);
   p=p+1;
   if imag(aj)~= 0
        F(p)=B(k)/(x-conj(a))^k;
        FF=FF+F(p); p=p+1;
   end
 end
end  % pour la fonction ignorer dans les hoerachies
function [Dpa] = dN_Dpa(Dpa,d)
syms x ;
global aj Nt
fa = Nt/Dpa;
T=diff(fa, x, d); Dpa=sym(subs(T, conj(aj)));
End
```

Références bibliographiques:

[1] DESCHAMPS Claude, WARUSFEL André, Mathématiques tout en un - 1re année, cours et exercices corriges, Dunod, Paris, 2003.

[2] CHIPATCHEV V., (traduit du russe par EMBAREK Djilali), Mathématiques supérieures, MIR Moscou, 1988.

[3] ARNAUDIES Jean-Marie, FRAYSSE Henri, Cours de mathématiques, tome 1, 2 (Analyse) et tome 3 (Compléments d'analyse), Dunod 1994.

[4] fr.m.wikipedia.org/wiki/décomposition_en_éléments_simples: consulté le 2 mai 2014.

[5] www.les-mathematique.net/a/d/a/node6.php: décomposition en éléments simples. Consulté le 3 mai 2014.

Table des matières