Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tanger

2014/2015
AP2
Algèbre 3

Réduction des matrices

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.
2. Déterminer les sous-espaces propres de f.
3. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.
4. Ecrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D est une matrice diagonale.

Exercice 2.

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?
2. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1, v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = & 6u_n & -2v_n \\ v_{n+1} = & -2u_n & +9v_n \end{cases}$

   Calculer u_n et v_n en fonction de n.
3. Soient α, β, γ dans $\mathbb{R}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Pour quelles valeurs de α, β, γ, la matrice C est-elle diagonalisable ? Dans ce cas, diagonaliser C.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, c'est-à-dire $f(F) \subseteq F$, et soit $f' = f|_F$ la restriction de f à F. Montrer que $\chi_{f'}(X)$ divise $\chi_f(X)$.
2. Soit G un autre sous-espace de E stable par f et soit $f'' = f|_G$. On suppose que $E = F \oplus G$. Montrer que $\chi_f(X) = \chi_{f'}(X)\chi_{f''}(X)$.

Exercice 4.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique, et donc aussi les mêmes valeurs propres.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors ${}^tA$ est diagonalisable.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Considérons les matrices $A_\lambda = \begin{pmatrix} A & \lambda I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} B & -\lambda I_n \\ -I_n & A \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

   Calculer les matrices $A_\lambda B_\lambda$ et $B_\lambda A_\lambda$ ainsi que leurs déterminants.
2. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
3. On suppose que B est inversible. Montrer que si AB est diagonalisable, alors BA est diagonalisable.
4. En prenant le cas particulier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que le résultat précédent n'est pas valable si B n'est pas inversible.