
FORMULE MATHEMATIQUE DE
FACTORISATION D'UN NOMBRE
ENTIER (EN PRODUIT DE
NOMBRES PREMIERS)

MATHEMATICAL FORMULA OF
FACTORIZATION OF AN
INTEGER (IN PRODUCT OF
PRIME NUMBERS)

WEIDMANN Sébastien

(mise à jour du 15 Août 2014)

Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Travaux en cinq chapitres, débutés en Octobre 2007. Tous droits réservés à **WEIDMANN Sébastien**, né à Chaumont (52 000), FRANCE.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord.**

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscription est relativement simple) :

[Cliquez ici pour m'envoyer un e-mail \(message privé, pseudo : **WizartS**\)](#)

Merci à tous les intervenants du site internet FUTURA SCIENCES qui ont participé au forum de discussion à propos de mes travaux :

Formule de factorisation d'un nombre entier

Je dédicace mes travaux à mes parents et ma famille.

Résumé

Pour cette recherche, mon objectif a été de trouver une formule mathématique permettant de factoriser un nombre entier N en produit de nombres premiers (avec leur puissance). J'appelle $D(N)$ cette formule. A la fin de cette étude, ces travaux m'ont permis d'établir des liens avec d'autres disciplines : avec la fonction ζ de *RIEMANN*, avec la physique (en associant N à une longueur d'onde ou à une période) et avec le calcul propositionnel classique. Par conséquent, il serait aussi possible d'établir un lien entre chacun des ces sujets.

Abstract

For this research, my goal was to find a mathematical formula allowing to factorize an integer N in product of prime numbers (with their power). I call $D(N)$ this formula. At this end of this study, these works allowed me to establish links with other disciplines : with the *RIEMANN* ζ function, with physical phenomenon (by applying N to a wavelength or to a period) and with the classical propositional calculus. Consequently, it would be also possible to establish a link between each of these subjects.

SOMMAIRE

Modifications éventuelles et droits d'utilisation / mail	i
Résumé	iii
Abstract	iii
Introduction	1
 I Formule mathématique de factorisation d'un nombre entier (en produit de nombres premiers)	 2
La formule	3
Rappels	5
Remarque préalable	7
 1 Factorisation et mécanique des puissances	 8
1.1 Etude de la puissance de 2	11
1.2 Etude de la puissance de 3	16
1.3 Etude de la puissance de P_n	20
1.4 Problème lorsque P_n est inconnu	22
1.5 Formule $D(N)$ de factorisation d'un nombre entier	25
 2 Démonstration complète	 27
2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre	27
2.2 Démonstration complète	29
2.2.1 Remarques préalables sur le tableau de référence <i>T.R.2</i>	32
2.2.2 Début de l'étude	37
2.2.3 Construction de la fonction F_p	75
2.2.4 Supposons P_n non connu (construction de F_p , suite)	104
2.2.5 Construction de la fonction α_M	115
2.3 Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers	121
 3 Compléments et hypothèses	 122

Introduction

Les travaux qui vont suivre sont issus d'une remarque simple mais d'une importance fondamentale sur la régularité des variations de la puissance de chaque nombre premier P_n , dont la puissance est notée α_n , dans le cas de la factorisation d'un nombre entier positif $N \geq 2$. L'étude sera divisée en plusieurs parties car elle fait intervenir plusieurs formules utiles pour atteindre cet objectif. Nous terminerons en donnant simplement une formule unique permettant cette factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

Je précise que je suis l'auteur unique de ces réflexions, de ces démonstrations, de ces travaux et de leurs conclusions.

CHAPITRE I

Formule mathématique de
factorisation d'un nombre
entier (en produit de nombres
premiers)

La formule

Voici cette formule permettant la factorisation de tout nombre entier N en produit de nombre(s) premier(s) avec leur puissance. Elle est définie pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$N = \prod_{M=2}^{M=N} M \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x}} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right] \right\}$$

M représente un nombre entier. Sa puissance aura exactement 0 pour résultat si M n'est pas un nombre premier, et le nombre entier adéquat si M est un nombre premier. La formule qui donne la puissance de M constitue le coeur de cette découverte.

Il est possible de la généraliser, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$N = \prod_{M=2}^{M=N} M \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x}} \right)^m \cdot \frac{\pi}{M} \right] \right\}$$

En Reprenant la formule qui donne la puissance de M de départ (où $m = 2$) et en la simplifiant, on peut même se rendre compte que la formule de *MINÁC-WILLANS* [1] n'est qu'un cas particulier de cette formule qui donne la puissance de M . En effet, lorsqu'on cherche seulement à savoir si un nombre M est premier ou pas, il n'est pas nécessaire de conserver x allant de 1 à $+\infty$, le calcul pour $x = 1$ suffit. En remplaçant alors simplement N par M dans la formule de la puissance de M , que nous noterons $s(M)$, nous avons :

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-1)!^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1 \text{ si } M \text{ est un nombre premier.}$$

Et

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-1)!^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \text{ si } M \text{ n'est pas un nombre premier.}$$

Ce qui est exactement le cas de la formule de *MINÁC-WILLANS* [1], pour laquelle la formule ci-dessus est donc une formule équivalente.

Je travaille actuellement à faire évoluer cette formule permettant la factorisation de tout nombre entier N en produit de nombre(s) premier(s) avec leur puissance vers une forme optimale qui permettra d'alléger les calculs.

Rappels

Afin de situer le problème de factorisation d'un nombre entier, nous allons donner une première approche à l'aide de quelques exemples, puis nous suivrons une démarche qui nous permettra de porter des conclusions à partir de cas généralisables.

- Tout d'abord, Il a déjà été démontré de plusieurs manières différentes dans l'Histoire qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- Rappelons que tout nombre $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 2$, est factorisable en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) de cette manière :

$$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times P_3^{\alpha_3} \times \dots \times P_n^{\alpha_n}$$

avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$,
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
(c'est-à-dire $P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5, P_4 = 7, P_5 = 11, \dots$).

- Nous pourrions nous limiter à un nombre de termes "utiles" (limité par n) ou encore écrire N sous la forme d'un produit d'une infinité de nombres premiers P_n :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Dans ce cas, les termes non utiles auront leur puissance $\alpha_n = 0$ (notamment tous les P_n supérieur au plus grand nombre premier utile à la factorisation).

- Mais il faut aussi noter que nous aurions pu écrire ce nombre comme produit de tous les nombres entiers $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$ ainsi :

$$N = \prod_{i=1}^{i \rightarrow +\infty} (M_i)^{a_i}$$

Dans ce cas, nous pouvons ramener cette formule à la formule précédente car les seuls termes utiles sont ceux contenant des nombres premiers.

En effet, la plupart des puissances a_i pourront être égales à 0, notamment lorsque $M_i \notin \mathbb{P}$, mais aussi lorsque M_i est un nombre premier non utile à la factorisation de N .

Remarque préalable

Nous noterons que :

$$N = P_n \quad \text{si} \quad \sum_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 1$$

Remarquons ici aussi que nous pourrions nous limiter à une somme de termes utiles plutôt qu'à une somme infinie (Ce que nous tenterons de faire).

A noter :

Une démonstration complète de ce qui va suivre est proposée dans la partie intitulée “**2 Démonstration complète**” (page 27). La partie intitulée “**1 Factorisation et mécanique des puissances**” (page 8) n'étant ici que pour appuyer et renforcer par des exemples la partie démonstration. Celle-ci permet également de se rendre compte et de s'accoutumer au phénomène régulier qui se produit concernant les nombres premiers.

1

Factorisation et mécanique des puissances

Commençons par la formule suivante :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Avec $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$),
avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$,
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
(c'est-à-dire $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11$, ...).

Rappel :

α_1 correspond à la puissance de P_1
 α_2 correspond à la puissance de P_2
 α_3 correspond à la puissance de P_3
...
 α_n correspond à la puissance de P_n

Nous pouvons construire un tableau de référence *T.R.1* (qui est immuable)
où la première colonne représente N , et toutes les suivantes représentent les
 α_n qui correspondent à N :

Exemple préalable, pour $N = 12$, $N = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times \dots \times P_n^0 \times \dots$
Donc $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = 0$; ... $\alpha_n = 0$; ...

T.R.1

N	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	...	α_n
1	0	0	0	0	0	0	0	...	0
2	1	0	0	0	0	0	0		0
3	0	1	0	0	0	0	0		0
4	2	0	0	0	0	0	0		0
5	0	0	1	0	0	0	0		0
6	1	1	0	0	0	0	0		0
7	0	0	0	1	0	0	0		0
8	3	0	0	0	0	0	0		0
9	0	2	0	0	0	0	0		0
10	1	0	1	0	0	0	0	...	0
11	0	0	0	0	1	0	0		0
12	2	1	0	0	0	0	0		0
13	0	0	0	0	0	1	0		0
14	1	0	0	1	0	0	0		0
15	0	1	1	0	0	0	0		0
16	4	0	0	0	0	0	0		0
17	0	0	0	0	0	0	1		0
18	1	2	0	0	0	0	0		0
19	0	0	0	0	0	0	0		0
20	2	0	1	0	0	0	0	...	0
21	0	1	0	1	0	0	0		0
22	1	0	0	0	1	0	0		0
23	0	0	0	0	0	0	0		0
24	3	1	0	0	0	0	0		0
25	0	0	2	0	0	0	0		0
26	1	0	0	0	0	1	0		0
27	0	3	0	0	0	0	0		0
28	2	0	0	1	0	0	0		0
29	0	0	0	0	0	0	0		0
30	1	1	1	0	0	0	0	...	0
31	0	0	0	0	0	0	0		0
32	5	0	0	0	0	0	0		0
33	0	1	0	0	1	0	0		0
34	1	0	0	0	0	0	1		0
35	0	0	1	1	0	0	0		0
36	2	2	0	0	0	0	0		0
37	0	0	0	0	0	0	0		0
38	1	0	0	0	0	0	0		0
39	0	1	0	0	0	1	0		0
40	3	0	1	0	0	0	0	...	0
41	0	0	0	0	0	0	0		0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_n	0	0	0	0	0	0	0	...	1

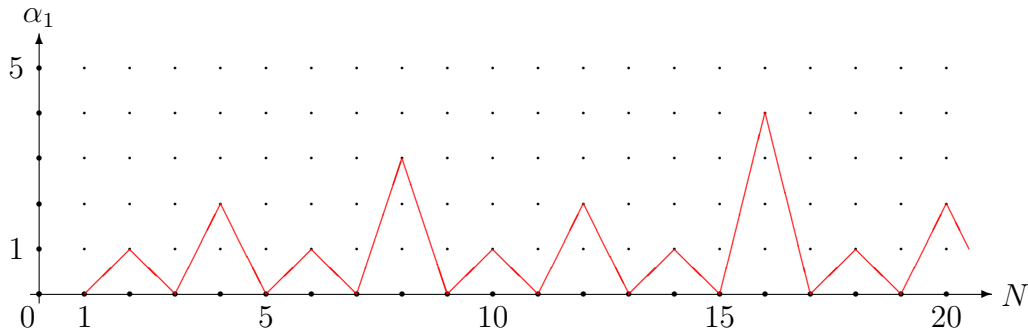
La compréhension de ce tableau est essentielle pour la suite de l'étude de la factorisation d'un nombre entier. Nous remarquons aisément des symétries et des régularités à l'intérieur de chaque colonne. De plus, les données de ce tableau sont immuables (elles seront toujours constantes) : nous pouvons donc nous en servir en permanence. Par la suite, nous allons donner une représentation graphique à ces données, et pour plus de lisibilité, nous allons lier chaque point du graphique par des segments (ceux-ci ne représentant donc pas une continuité, puisque passer d'un nombre entier à un autre invoque nécessairement la discontinuité). Comme nous allons le voir, et pour N un nombre entier positif, chaque graphique correspondant à une puissance α_n est assimilable à une "onde" qui peut être décomposée en somme de plusieurs ondes plus simples.

Remarque :

Le tableau de référence *T.R.1* peut être construit de manière "mécanique", une fois que l'on comprend comment se répètent (par symétries) et s'incrémentent les valeurs dans une colonne α_n . Nous pouvons déjà constater facilement qu'un nombre N est un nombre premier si et seulement si la somme de toutes les valeurs de α_n (pour un nombre N , cela correspondant à une ligne complète de valeurs de α_n) vaut 1.

1.1 Etude de la puissance de 2

Colonne α_1 , correspondant à $P_1 = 2$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 2 (c'est-à-dire P_1) grâce à la "courbe" de α_1 .

On distingue clairement ces symétries sur des longueurs finies :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 2$ de Longueur $L_1 = 2$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_2 en $N = 4$ de Longueur $L_2 = 6$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_3 en $N = 8$ de Longueur $L_3 = 14$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_4 en $N = 16$ de Longueur $L_4 = 30$ sur l'axe N ;
 ...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_1)^a$ de Longueur $L_a = 2(P_1)^a - 2$ sur l'axe N .

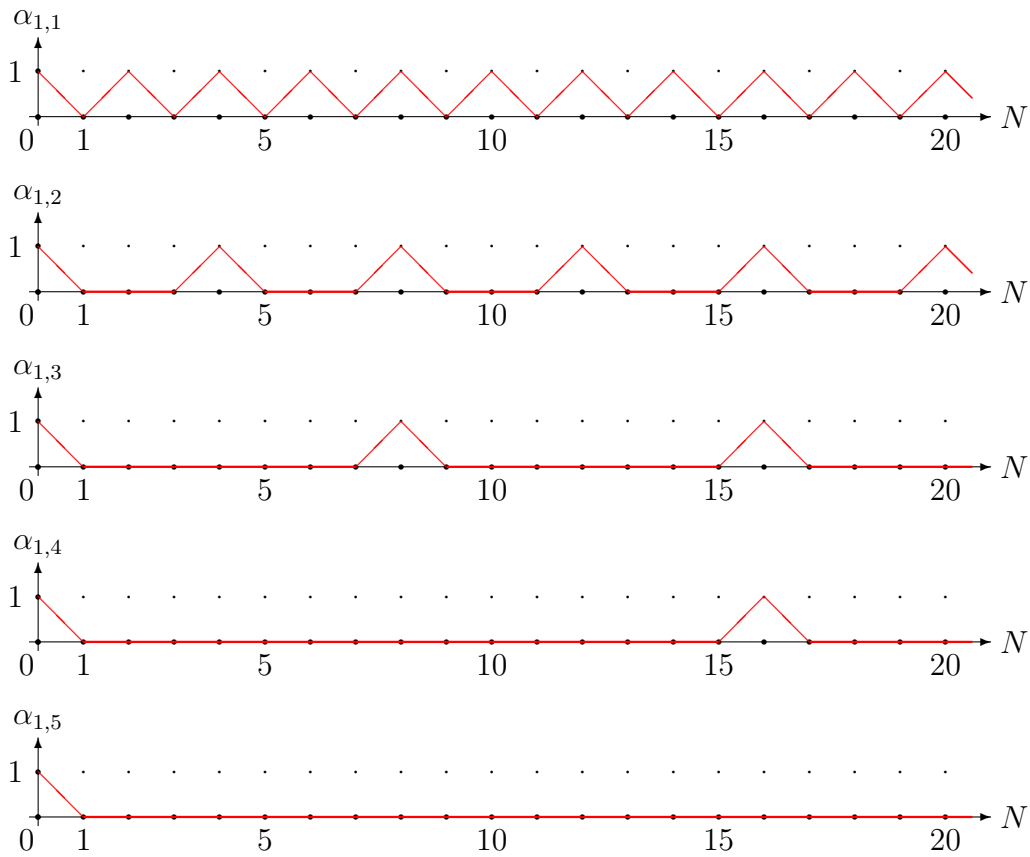
Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_1 - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_1^a - 1$

Pour comprendre que la "courbe" α_1 est régulière, nous devons garder à l'esprit qu'elle dépend directement de N . Car dans le cas de cette courbe, P_1 voit logiquement sa puissance α_1 s'annuler lorsque N est impaire (c'est-à-dire lorsque N n'est pas multiple de 2) : c'est-à-dire une fois sur 2. Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres paires restant, nous avons

ceux qui sont multiples de 2^1 , ceux multiples de 2^2 , ceux multiples de 2^3 , ...
ceux multiples de $P_1^{\alpha_1}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_1 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme une somme de courbes $\alpha_{1,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie.

Nous avons donc :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{1,x})$$

Nous devons prendre en compte le caractère périodique de chaque $\alpha_{1,x}$ pour la construction de leur courbe. les fonctions recherchées devront donc refléter cette périodicité. De plus, nous devons avoir $\alpha_{1,x} = 1$ pour $N = 0$. Nous sommes dans le cas de la fonction *SINUS*. De plus $\alpha_{1,x}$ n'admettant pas de valeur négative mais seulement les valeurs 0 et 1, nous devons élever cette fonction au carré. De là, nous déduisons facilement $\alpha_{1,1}$. Pour les courbes suivantes, nous devons simplement trouver le moyen d'avoir une fonction nulle pour certaines valeurs de N réparties régulièrement, ce que permettent les fonctions polynômiales lorsqu'elles sont associées à la fonction *SINUS*. Nous devons finalement diviser ce polynôme $P(N)$ par une fonction qui nous permette d'avoir la valeur $\alpha_{1,x} = 1$ au moins tous les 2^x pour N . c'est-à-dire que la fonction *SINUS* élevée au carré doit valoir 1, ou encore :

$$\sin^2 \left(\frac{P(N) \cdot \pi}{d(N)} \right) = 1 \text{ (avec } d(N) \text{ le dénominateur).}$$

Pour qu'un polynôme $P(N)$ s'annule uniquement pour 1, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)$.

Pour que ce polynôme s'annule seulement pour 1 et pour 2, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2 et pour 3, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2, pour 3, ... et pour $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$, il doit être de la forme : $P(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3) \cdots (N - y)$.

En admettant que $N = 0$ pour chacune de ces lignes précédentes, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur.

Avec pour $\alpha_{1,x}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1) \cdot \pi}{2} \right) \\ \alpha_{1,2} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3) \cdot \pi}{4} \right) \\ \alpha_{1,3} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)(N-7) \cdot \pi}{32} \right) \\ \alpha_{1,4} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2) \cdots (N-14)(N-15) \cdot \pi}{4096} \right) \\ \alpha_{1,5} &= \sin^2 \left(\frac{(N-1)(N-2) \cdots (N-30)(N-31) \cdot \pi}{134217728} \right) \\ &\dots\end{aligned}$$

Il y a un lien direct entre le numérateur et le dénominateur car il n'est pas utile que ce dénominateur soit autre chose qu'une puissance de 2 (il suffit de faire référence à la trigonométrie). En effet, le numérateur faisant intervenir N , il sera composé en puissance de 2, on le remarque aisément en remplaçant N par 0 (pour des raisons pratiques ne gênant pas la suite du raisonnement, notons que cela fonctionne avec tout autre entier positif). Le dénominateur doit alors obligatoirement aussi être composé en puissance de 2 (au moins) mais seulement d'une unité supérieure, ceci afin de permettre la validité des courbes.

De plus, en comparant les " $\alpha_{1,x}$ ", nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance (de 2) dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 2; 5; 12; 27; 58; ... Or :

$$\begin{aligned}
 1 &= 2^1 - 1 \\
 2 &= 2^2 - 2 \\
 5 &= 2^3 - 3 \\
 12 &= 2^4 - 4 \\
 27 &= 2^5 - 5 \\
 58 &= 2^6 - 6 \\
 &\dots \\
 \dots &= 2^x - x
 \end{aligned}$$

D'où :

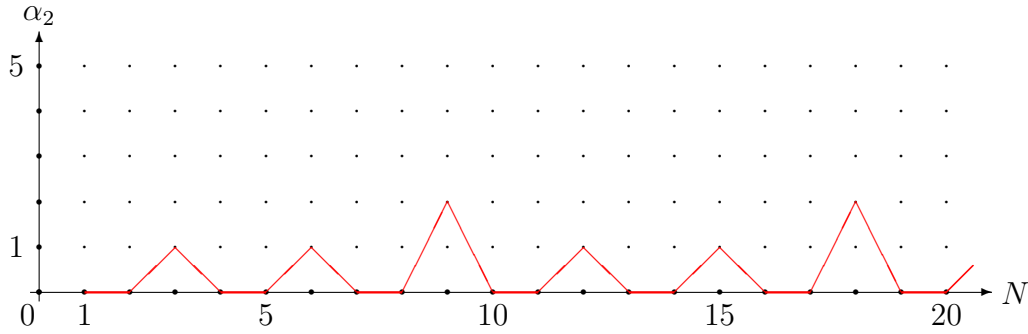
$$\alpha_{1,x} = \sin^2 \left(\pi \cdot \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

Et voici donc la formule de la puissance α_1 pour P_1 :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\pi \cdot \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

1.2 Etude de la puissance de 3

Colonne α_2 , correspondant à $P_2 = 3$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 3 (c'est-à-dire P_2) grâce à la courbe de α_2 .

De la même manière, des symétries apparaissent régulièrement :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 3$ de Longueur $L_1 = 4$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_2 en $N = 9$ de Longueur $L_2 = 16$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_3 en $N = 27$ de Longueur $L_3 = 52$ sur l'axe N ;
 Une Symétrie verticale S_4 en $N = 81$ de Longueur $L_4 = 160$ sur l'axe N ;
 ...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_2)^a$ de Longueur $L_a = 2(P_2)^a - 2$ sur l'axe N .

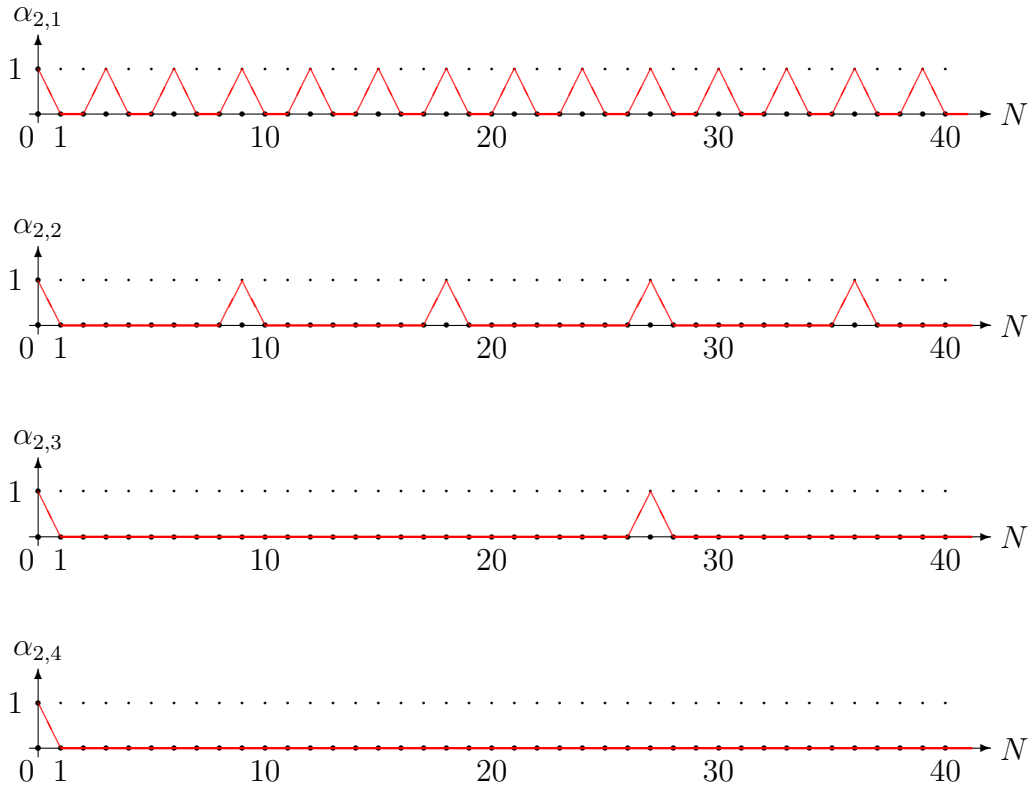
Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_2 - 1$
 Pour S_a , on a $R_a = P_2^a - 1$

Pour les mêmes raisons que la courbe α_1 , α_2 est régulière car elle aussi dépend directement de N . En effet, dans le cas de cette courbe, P_2 voit logiquement sa puissance α_2 s'annuler lorsque N n'est pas multiple de 3 : c'est-à-dire une fois sur 3.

Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres restants, nous avons ceux qui sont multiples de 3^1 , ceux multiples de 3^2 , ceux multiples de 3^3 , ... ceux multiples de $P_2^{\alpha_2}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_2 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme une somme de courbes $\alpha_{2,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{2,x})$$

De la même manière que pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, nous utiliserons les mêmes fonctions utiles à la construction des courbes $\alpha_{2,x}$: c'est-à-dire les fonctions $\sin^2$, les polynômes $(N-1)(N-2)\cdots(N-y)$, et un dénominateur $d(N)$ qui devra être nécessairement composé en puissance de 3.

Comme pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, en admettant que $N = 0$, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur. En cela, la méthode est la même que précédemment. Mais la différence avec les courbes de $\alpha_{1,x}$ apparaît ici et pour la suite de l'étude car nous devrons ensuite encore diviser l'ensemble par une valeur précise pour que la formule finale $\alpha_{2,x}$ puisse prendre 1 pour valeur lorsque N est un multiple de 3.

Avec pour $\alpha_{2,x}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{2,1} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2) \cdot \pi/3]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,2} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\cdots(N-7)(N-8) \cdot \pi/3^3]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,3} &= \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)\cdots(N-25)(N-26) \cdot \pi/3^{11}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,4} &= \frac{\sin^2[(N-1)\cdots(N-80) \cdot \pi/3^{37}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ \alpha_{2,5} &= \frac{\sin^2[(N-1)\cdots(N-242) \cdot \pi/3^{117}]}{\sin^2(\pi/3)} \\ &\dots\end{aligned}$$

ATTENTION : Il est important de remarquer que cette règle n'est valable que pour un nombre premier (ici, il s'agit de 3), car nous désirons construire ce dénominateur $d(N)$ de telle sorte qu'il "compte" le nombre concernant la puissance de 3 qui résulte du calcul du polynôme au numérateur. Clairement, nous souhaitons obtenir au dénominateur une puissance de 3 qui soit d'une unité supérieure à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Poursuivons en comparant les " $\alpha_{2,x}$ ", nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 3; 11; 37; 117; ... Or :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{3^1 - 1}{3 - 1} - 1 + 1 \\
 3 &= \frac{3^2 - 1}{3 - 1} - 2 + 1 \\
 11 &= \frac{3^3 - 1}{3 - 1} - 3 + 1 \\
 37 &= \frac{3^4 - 1}{3 - 1} - 4 + 1 \\
 117 &= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} - 5 + 1 \\
 \dots & \\
 \dots &= \frac{3^x - 1}{3 - 1} - x + 1
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha_{2,x} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(3^x-1)} (N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

Et voici donc la formule de la puissance α_2 pour P_2 :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(3^x-1)} (N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

1.3 Etude de la puissance de P_n

Colonne α_p , correspondant à P_n .

Nous avons une Symétrie verticale S_a en $N = (P_n)^a$ de Longueur $L_a = 2(P_n)^a - 2$ sur l'axe N .

Avec un nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie :

Pour S_1 , on a $R_1 = P_n - 1$

Pour S_a , on a $R_a = P_n^a - 1$

α_p est régulière (comme précédemment) car elle dépend directement de N . α_p est composée de la somme d'une infinité de "courbes" plus simples que nous noterons $\alpha_{p,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :

$$\alpha_p = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}} \right)}{\sin^2(\pi/P_n)}$$

Après vérification, nous pouvons aisément constater que cette formule inclu également α_1 (pour $P_1 = 2$), ce qui est intéressant si nous nous donnons pour objectif de généraliser.

Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous regroupons tous les multiples de P_n grâce à ce système de "courbes" de α_n . Ainsi, le calcul entre le dénominateur et le numérateur dans le "sin²" permet d'obtenir exclusivement :

- Un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $2c \cdot \pi / P_n$ (avec $c \in \mathbb{N}$) pour les nombres premiers impaires, de telle sorte que $(2c \pm 1) \cdot \pi / P_n = d \cdot \pi$ (avec $d \in \mathbb{N}$), et donc un nombre rationnel multiplié par π sous la forme :

$$(d \cdot P_n \pm 1) \cdot \pi / (2P_n) \text{ ce qui permet } \alpha_p = 1.$$

Et aussi un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $(2c + 1) \cdot \pi / 2$ (avec $c \in \mathbb{N}$) pour $P_1 = 2$ qui est le seul nombre premier paire.

Ou bien

- Un nombre entier multiplié par π et donc directement $\alpha_p = 0$, sauf pour le cas où P_n n'est pas connu et si nous le supposons égal à 4 : pour $x = 1$ (seulement), nous obtenons après calcul un nombre rationnel permettant $\alpha_p = 2$ pour tout N multiple de 4 alors que nous désirons avoir $\alpha_p = 0$ pour tout N dans ce cas (étant donné qu'en supposant $P_n = 4$ pour ce cas, 4 n'est pas un nombre premier). Nous allons donc aborder une étape supplémentaire pour résoudre ce problème.

1.4 Problème lorsque P_n est inconnu

Il est primordial de constater que la fonction α_p est construite de telle manière que la formule $d(N)$ du dénominateur ne se calcule qu'en fonction d'un nombre premier et non d'un autre nombre, c'est-à-dire que sans connaître ce nombre premier, nous pouvons maintenant remplacer P_n par un entier quelconque supérieur à 1, et obtenir un résultat très proche du résultat généralisé. Mais si nous nous arrêtons ici, nous rencontrons un problème si nous supposons que nous ne connaissions pas les nombres premiers dans le cas suivant :

Si nous supposons en particulier que $P_n = 4$, nous constaterions que les résultats obtenus seraient inexacts car la formule est incomplète. Effectivement, $\alpha_p = 2$ pour N multiple de 4. Nous devons donc construire une fonction qui nous permette de corriger ce problème. C'est-à-dire que nous devons construire une fonction $f(N)$ qui s'annule en tous les multiples de 4 et qui vaut 1 sinon, ceci afin de ne pas perturber les résultats donnés par le reste de la formule, ce qui nous permettra de la multiplier à α_p :

$$\alpha_n = f(N) \cdot \alpha_p$$

Avec sur le même principe de construction que dans les parties précédentes (sachant que ce que nous recherchons est une fonction complémentaire à celle de la fonction *SINUS*) :

$$\alpha_n = \alpha_p \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot (P_n - 1)(P_n - 2)(P_n - 3) \right)$$
$$\alpha_n = \alpha_p \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)$$

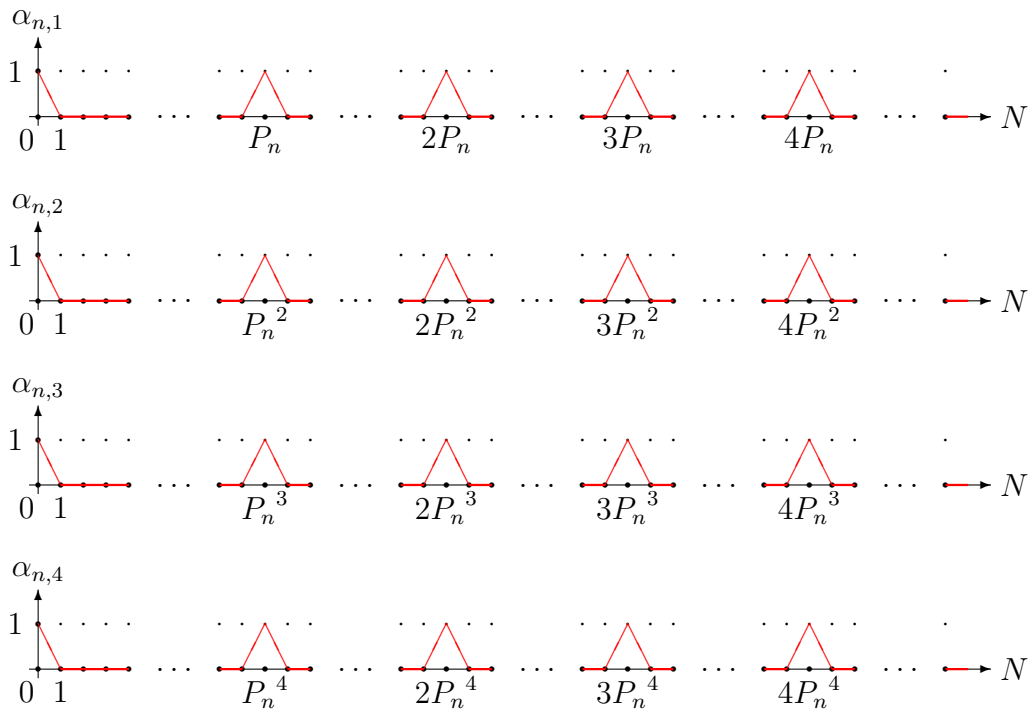
Ainsi, nous aurons construit la formule α_n permettant de donner les valeurs des puissances de chaque nombre premier P_n sans même avoir besoin de connaître P_n . En effet, cette formule ayant une valeur nulle dans le cas où nous prendrions pour P_n un autre nombre qu'un nombre premier, nous pouvons davantage la généraliser et remplacer P_n dans la formule α_n par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. D'ailleurs, par la suite nous donnerons la formule de factorisation sous les deux formes.

Précisons encore que M est bornée par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ car la formule de α_p construite contenant l'expression $\sin^2(\pi/P_n)$ sous le "grand" dénominateur,

si P_n valait 1, le dénominateur vaudrait 0, or, la division par 0 est interdite. D'autre part, la construction de la fonction α_p n'est valable qu'à partir du nombre 2 étant donné que tout nombre élevé à une puissance supérieur à 1 vaut autre chose que ce nombre lui-même, ce qui n'est pas le cas pour le nombre 1. En effet, lorsqu'on élève le nombre 1 à une puissance quelconque supérieur 1, on obtient toujours 1. Cette formule ne peut donc pas le concerner.

Ceci exclu le nombre 1 de l'ensemble des nombres premiers de façon naturelle, c'est-à-dire sans supposition ni convention.

Evidemment, le nombre 0 est à exclure également des valeurs que peut prendre M étant donné que cela amènerait aussi à effectuer une division par 0.



Notons que depuis le début de l'utilisation de ce système graphique, $\alpha_{n,x}$ vaut 1 seulement pour les multiples d'un nombre premier, puis d'un nombre premier élevé au carré, puis d'un nombre premier élevé au cube, ... etc. Voici donc une formule qui révèle la mécanique des puissances pour la factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

- Brève explication sur le problème rencontré pour l'hypothèse de $P_n = 4$:

Pour $x = 1$, pour $P_n = 4$ et pour cette partie de la formule de α_n :

$$\frac{\prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{4}$$

Or, lorsqu'on remplace (volontairement) N par 0, le résultat est un nombre rationnel pour cette partie de la formule. D'ailleurs, pour tout x entier positif, le résultat sera de la forme :

$$\frac{2^{a_1} \cdot b_1}{4^{a_2}} = \frac{2^{a_1} \cdot b_1}{2^{(2 \cdot a_2)}} = 2^{(a_1-2 \cdot a_2)} \cdot b_1$$

Avec a_1 et $a_2 \in \mathbb{N}$, et $b_1 \in \mathbb{Z}$ non multiple de 2.

Dans le cas de $x = 1$, nous avons $a_1 = a_2 = 1$, d'où il résulte un nombre rationnel de la forme $\frac{b_1}{2}$ permettant $\alpha_p = 2$.

Alors que pour $x \geq 2$, nous avons $a_1 > 2a_2$, d'où il résulte un nombre entier permettant $\alpha_p = 0$.

Il nous fallait donc une fonction complémentaire à la fonction "sin²" qui, multipliées avec cette dernière valait 0, précisément dans les cas recherchés.

1.5 Formule $D(N)$ de factorisation d'un nombre entier

Rappelons que nous avons noté :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Or, nous connaissons maintenant α_n , et $f(N)$ nous permet de contourner le problème de P_n inconnu, nous pouvons donc déduire une formule pour N :

$$N = D(N) = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n) \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v) \right)}{\sin^2(\pi/P_n)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N - h)}{P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1} - x + 1\right)}} \right) \right]$$

(Attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des “valeurs absolues”, ni de ceux des “parties entières” : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_n , c'est-à-dire la puissance de P_n).

Comme nous avons aussi noté (avec $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$) :

$$N = \prod_{i=1}^{i \rightarrow +\infty} (M_i)^{a_i}$$

Or, nous avons vu (rapidement) que la formule $D(N)$ pouvait s'appliquer pour tout entier $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ (voir “brève explication” précédemment, dans la partie “**1.4 Problème lorsque P_n est inconnu**” page 22, ou pour la démonstration dans la partie “**2 démonstration complète**” page 27).

Notons M_i cet entier M pour faire directement le lien avec cette dernière formule. Nous pouvons donc aussi déduire une autre formule équivalente mais “plus générale” pour N :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M-v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}} \right) \right]$$

Notons cette grande formule de Décomposition (ou factorisation) de N en produit de facteurs premiers $D(N)$, et appelons cette formule $D(N)$ la “Décomposée” de N :

$$N = D(N)$$

2

Démonstration complète

Dorénavant, certaines lettres qui vont être utilisées seront les mêmes que précédemment, mais elles n'auront pas de lien entre elles (exemple pour les variables comme a , comme b , comme c , comme d ou comme k ...). Nous préciserons ce changement par une redéfinition des variables concernées.

2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre

Cette grande formule $D(N)$ de factorisation d'un entier en produit de nombres premiers peut être vue comme un ensemble regroupant plusieurs "fonctions" ayant chacune une "tâche" précise à effectuer. C'est justement ce que nous allons expliquer.

Tout d'abord, si nous reprenons la formule de α_n et que nous la réécrivons sous cette forme :

$$\alpha_n = A \cdot Cc \cdot \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)$$

- Avec $F_p = \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h)$

F_p est la fonction qui permet à l'ensemble "sin²" de s'annuler de manière cyclique. F_p permet d'annuler cet ensemble lorsque le nombre de fois où elle est divisible par P_n est supérieur ou égal à F_c .

- Avec $F_c = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1$

F_c est la fonction qui permet de “calculer” la divisibilité de P_n sur $[0; P_n^x]$ (les facteurs de P_n dans les multiples de P_n que l’on retrouve dans le calcul de F_p).

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}}\right)$ permet d’obtenir soit 0 (notamment lorsque N n’est pas divisible par P_n), soit un nombre de la forme $\sin^2(\pi \cdot \varepsilon/P_n)$ (avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n).

- Avec $Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/P_n)}$

Cc est la fonction Coefficient Correcteur qui va permettre à α_n de valoir un nombre entier. En effet, $\sin^2(\pi \cdot \varepsilon/P_n)$ (comme précédemment avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n) a la même valeur que $\sin^2(\pi/P_n)$.

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}}\right)$ permet d’obtenir soit 0 (lorsque N n’est pas divisible par P_n), soit 1 (lorsque N est divisible par P_n). Ajoutons que si nous remplaçons P_n par un autre nombre entier qui n’est pas un nombre premier, le calcul permet aussi d’obtenir 0 (sauf pour $P_n = 4$ à ce stade du développement).

- Avec $A = \cos^2[(P_n - 1)(P_n - 2)(P_n - 3) \cdot \pi/4]$

A est la fonction qui permet d’éliminer le défaut lorsque P_n est inconnu et qu’on le suppose égal à 4 (défaut pour $x = 1$ uniquement).

- Avec $R_n = j$ Pour $N \in [(P_n)^j; (P_n)^{j+1} - 1]$

R_n est la fonction de Restriction permettant de limiter les calculs aux nombres premiers $P_n \leq N$.

▷ Ainsi, si N est divisible par P_n , la formule α_n donne le nombre de divisibilité(s) par P_n sous la forme d’une puissance de P_n .

2.2 Démonstration complète

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, N se décompose en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ tel que :

$$N = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

N ainsi défini contient nécessairement au moins un terme étant un nombre premier P_n . Supposons que P_n ne soit pas connu. Nous désirons savoir quelle est la “progression” de la puissance de α_n pour N .

Evidemment, nous savons déjà que $\alpha_n = 0$ pour N non multiple de P_n .

α_n prend une valeur entière si et seulement si N est multiple de P_n , c’est-à-dire si :

$N = t \cdot P_n$ (avec $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ car 1 n’est pas un nombre premier, par convention).

Par exemple, si $t = P_n$ alors $N = (P_n)^2$ et donc $\alpha_n = 2$.

Tableau de référence *T.R.2* :

(voir page suivante)

T.R.2

N	α_n
1	0
2	0
3	0
...	...
$P_n - 1$	0
P_n	1
$P_n + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n - 1$	0
$2 \cdot P_n$	1
$2 \cdot P_n + 1$	0
...	...
$P_n^2 - 1$	0
P_n^2	2
$P_n^2 + 1$	0
...	...
$P_n^2 + 2 \cdot P_n - 1$	0
$P_n^2 + 2 \cdot P_n = P_n \cdot (P_n + 2)$	1
$P_n^2 + 2 \cdot P_n + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n^2 - 1$	0
$2 \cdot P_n^2$	2
$2 \cdot P_n^2 + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n^2 + P_n - 1$	0
$2 \cdot P_n^2 + P_n = P_n(2P_n + 1)$	1
$2 \cdot P_n^2 + P_n + 1$	0
...	...
$P_n^3 - 1$	0
P_n^3	3
$P_n^3 + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} - P_n - 1$	0
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} - P_n = P_n(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$	1
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} - P_n + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} - 1$	0
$2 \cdot P_n^{\alpha_n}$	α_n
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} + 1$	0
...	...
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} + P_n - 1$	0
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} + P_n$	1
$2 \cdot P_n^{\alpha_n} + P_n + 1$	0
...	...

L'objectif est de trouver une formule qui permette d'obtenir α_n en fonction de N .

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que 1 n'est pas un nombre premier (par convention), nous avons :

$$P_n > (P_n - 1) \geq 1.$$

Aucun des nombres sur l'intervalle $[1; P_n - 1]$ n'est divisible par P_n .

2.2.1 Remarques préalables sur le tableau de référence *T.R.2*

▷ Règle n°1 :

Nous pouvons relever ceci :

- Sur l'intervalle $]0; P_n[$:
Il n'existe aucun multiple de P_n .
- Sur l'intervalle $]0; P_n^2[$:
Il existe $(P_n - 1)$ multiple(s) de P_n .
En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n - 1) \cdot P_n$.
De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre deux multiples de P_n consécutifs vaut P_n .
- Sur l'intervalle $]0; P_n^3[$:
Il existe $(P_n^2 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^2 .
En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n^2 - 1) \cdot P_n$
et le dernier multiple de P_n^2 de cet intervalle vaut $(P_n - 1) \cdot P_n^2$.
De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre deux multiples de P_n consécutifs vaut P_n . De même, pour chaque multiple de P_n^2 , leur répartition est régulière : l'écart entre deux multiples de P_n^2 consécutifs vaut P_n^2 (le raisonnement étant le même pour la suite, il est inutile de le réécrire à chaque fois).
- Sur l'intervalle $]0; P_n^4[$:
Il existe $(P_n^3 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^3 .

- Sur l'intervalle $]0; P_n^5[$:

Il existe $(P_n^4 - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de P_n^4 .

...

- Sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}[$:

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^{(\alpha_n-2)} - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
dont $(P_n^{(\alpha_n-3)} - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,

...

dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-3)}$,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-2)}$,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de $P_n^{(\alpha_n-1)}$.

- De manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq (\alpha_n - 1)$:

Sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}[$, qui peut encore s'écrire $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$:

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

dont la répartition de chaque multiples de $P_n^{(k+1)}$ est régulière puisque
l'écart entre deux de ces multiples vaut $P_n^{(k+1)}$.

▷ Règle n°2 :

par construction nous obtenons ce qui suit :

Soit $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, nous avons $(t - 1) \cdot P_n$ est multiple de P_n .

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1) \cdot P_n; t \cdot P_n[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1) \cdot P_n^2; t \cdot P_n^2[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1) \cdot P_n^3; t \cdot P_n^3[$$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1) \cdot P_n^4; t \cdot P_n^4[$$

...

De manière générale, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$](t - 1) \cdot P_n^{\alpha_n}; t \cdot P_n^{\alpha_n}[\text{ qui peut encore s'écrire } [(t - 1) \cdot P_n^{\alpha_n} + 1; t \cdot P_n^{\alpha_n} - 1]$$

Ces multiples sont répartis de manière “symétrique” dans le sens où l'écart entre deux multiples consécutifs vaut P_n . Ceci donne à α_n des symétries qui sont localisables sur ces intervalles. En effet, sur cet intervalle, le nombre de multiples de P_n se déduit ainsi :

(la longueur de l'intervalle est équivalente à la différence de ses deux bornes)

$$\begin{aligned} (t \cdot P_n^{\alpha_n} - 1) - [(t - 1) \cdot P_n^{\alpha_n} + 1] &= P_n^{\alpha_n} - 2 \\ &= P_n^{\alpha_n} - P_n + P_n - 2 \\ &= P_n \cdot (P_n^{(\alpha_n-1)} - 1) + (P_n - 2) \end{aligned}$$

Le plus petit nombre premier étant $P_n = 2$, les relations précédentes et suivantes sont donc valables pour tout P_n .

$(P_n - 2)$ n'étant pas multiple de P_n , nous avons toujours sur cet intervalle $(P_n^{(\alpha_n-1)} - 1)$ multiples de P_n .

(factorisation également valable pour toutes les puissances de P_n intermédiaires possibles jusqu'à l'égalité suivante)

$$\begin{aligned} (t \cdot P_n^{\alpha_n} - 1) - [(t - 1) \cdot P_n^{\alpha_n} + 1] &= P_n^{\alpha_n} - 2 \\ &= P_n^{\alpha_n-1} \cdot (P_n - 1) + (P_n^{\alpha_n-1} - 2) \end{aligned}$$

$(P_n^{(\alpha_n-1)} - 2)$ n'étant pas multiple de $P_n^{(\alpha_n-1)}$, nous avons toujours sur cet intervalle $(P_n - 1)$ multiples de $P_n^{(\alpha_n-1)}$.

La longueur de cet intervalle étant constante pour α_n constant, elle contient un nombre de multiples de P_n et de $P_n^{(\alpha_n-1)}$ constant qui est le même pour tout t .

(concernant toutes les autres puissances de P_n intermédiaires, le raisonnement est similaire à celui des égalités précédentes)

Or, pour $t = 1$, le nombre de multiples de P_n a été défini précédemment :

Il existe $(P_n^{(\alpha_n-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$ sur $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$.

Des symétries sont donc à constater sur α_n lorsque $\alpha_n \geq 1$:

Sur l'intervalle $[1; P_n^{\alpha_n} - 1]$, il existe une symétrie en $\frac{P_n^{\alpha_n}}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^{\alpha_n}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^{\alpha_n}}{2}; P_n^{\alpha_n} - 1\right]$$

▷ **Règle n°3 :**

D'après les valeurs que peut prendre N sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}]$, les nombres N pouvant être multiples de P_n apparaissent régulièrement dans le tableau de référence *T.R.2.* Or,

$$P_n^{\alpha_n} = P_n \cdot P_n^{(\alpha_n-1)}$$

Et donc, sur l'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}]$, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut $P_n^{(\alpha_n-1)}$

L'intervalle $]0; P_n^{\alpha_n}]$ peut aussi s'écrire $[1; P_n^{\alpha_n}]$. L'écart (c'est-à-dire la différence) entre les deux bornes vaut $(P_n^{\alpha_n} - 1)$.

Si nous faisons varier les bornes de cet intervalle ainsi (de manière à ce que cet écart soit constant) :

$$[1 + r; P_n^{\alpha_n} + r] \quad (\text{pour } r \in \mathbb{N})$$

Comme l'écart entre ces deux bornes est exactement le même, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours $P_n^{(\alpha_n-1)}$.

2.2.2 Début de l'étude

Soit k un nombre entier et soit ε un nombre entier non divisible par P_n . Menons l'étude d'après Le tableau de référence *T.R.2* (précédent). Nous "numéroterons" k et ε par des nombres et des lettres en indice correspondant à chaque cas étudié afin de les différencier. Abordons ces différents cas en différents points, qui seront une étape vers la démonstration complète.

Dans les formules, les trois points de suspensions "... *entre deux termes de la même ligne*" représentent les nombres entiers consécutifs entre ces deux termes.

• Pour $(P_n - 1)!$ nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! &= (P_n - 1) \cdot (P_n - 2) \cdot (P_n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= k_1 = \varepsilon_{n,1} \\ &= \prod_{h=1}^{h=(P_n-1)} (P_n - h)\end{aligned}$$

Par construction, $(P_n - 1)!$ est un nombre entier non divisible par P_n .

• Pour $(P_n^2 - 1)!$ nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n^2 - 1)! &= P_n \cdot 2P_n \cdot 3P_n \cdots (P_n - 1)P_n \cdot k_2 \\ &= (P_n \cdot P_n \cdot P_n \cdots P_n) \cdot [(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdots (P_n - 1)] \cdot k_2\end{aligned}$$

Ici, le nombre de multiples de P_n uniquement est $(P_n - 1)$, k_2 étant le produit de tous les autres nombres (k_2 est donc un nombre entier), il est non divisible par P_n (il n'y a aucun multiple de P_n dans k_2).

$$(P_n^2 - 1)! = P_n^{(P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,2}$$

avec $\varepsilon_{n,2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (P_n - 1) \cdot k_2 = (P_n - 1)! \cdot k_2$

k_2 est donc le produit de tous les nombres non divisibles par P_n , $\varepsilon_{n,2}$ n'est donc pas divisible par P_n .

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes) :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (1) \cdot (2) \cdots (P_n - 1) \cdot (1P_n) \\
 &\quad \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n) \\
 &\quad \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n) \\
 &\quad \cdot \dots \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (1) \cdot (2) \cdots (P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \\
 &\quad \cdot \dots \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
 &\quad \cdot (1P_n) \cdot (2P_n) \cdot (3P_n) \cdots [(P_n - 2) \cdot (P_n)] \cdot [(P_n - 1) \cdot (P_n)]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 (P_n^2 - 1)! &= (P_n - 1)! \\
 &\quad \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \\
 &\quad \cdot \dots \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
 &\quad \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n)^{(P_n - 1)}
 \end{aligned}$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,2}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre (c'est-à-dire entre deux parenthèses) tous les facteurs de P_n s'il y en a (c'est-à-dire le dernier terme de la dernière ligne dans notre cas puisqu'il regroupe tous les facteurs de P_n) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,2} &= (P_n - 1)! \\ &\quad \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \\ &\quad \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \\ &\quad \cdot \cdots \\ &\quad \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\ &\quad \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\ &\quad \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\ &\quad \cdot (P_n - 1)!\end{aligned}$$

• Pour $(P_n^3 - 1)!$ nous avons :

$$(P_n^3 - 1)! = P_n \cdot 2P_n \cdot 3P_n \cdots (P_n^2 - 1)P_n \cdot k_3$$

Ici, le nombre de termes sous la forme " $a \cdot P_n$ " multiples de P_n est $(P_n^2 - 1)$. Par conséquent, k_3 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n . Et le nombre de multiples de P_n^2 est $(P_n - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^3 - 1)! = P_n^2 \cdot 2P_n^2 \cdot 3P_n^2 \cdots (P_n - 1)P_n^2 \cdot k'_3$$

k'_3 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par $P_n^{(P_n^2-1)}$ et par $P_n^{(P_n-1)}$.

$$(P_n^3 - 1)! = P_n^{(P_n^2-1)} \cdot P_n^{(P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,3} = P_n^{(P_n^2+P_n-2)} \cdot \varepsilon_{n,3}$$

Et donc $\varepsilon_{n,3}$ n'est pas divisible par P_n .

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes et sur plusieurs pages) :

$$\begin{aligned}
(P_n^3 - 1)! &= (1) \cdot (2) \cdots (P_n - 1) \cdot (1P_n) \\
&\cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n) \\
&\cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n - 1)(P_n - 2) \cdot (P_n)(1)] \\
&\cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (1)] \\
&\cdot (P_n^2 + 1) \cdots (P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (P_n^2 + P_n + 1) \cdots (P_n^2 + 2P_n - 1) \cdot [(P_n + 2) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 + 3P_n - 1) \cdot [(P_n + 3) \cdot (P_n)] \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (2P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n - 1) \cdot (P_n) \cdot (2)] \\
&\cdot (2P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(2P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (2P_n^2 - P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (2)] \\
&\cdot (2P_n^2 + 1) \cdots (2P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(2P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (2P_n^2 + P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 2P_n - 1) \cdot [(P_n + 1) \cdot (P_n) \cdot (2)] \\
&\cdot (2P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 3P_n - 1) \cdot [(2P_n + 3) \cdot (P_n)] \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(3P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(3P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (3)] \\
&\cdot (3P_n^2 + 1) \cdots (3P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(3P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (3P_n^2 + P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 2P_n - 1) \cdot [(3P_n + 2) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (3P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 3P_n - 1) \cdot [(P_n + 1) \cdot (P_n) \cdot (3)] \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 3P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 3P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (P_n - 3)] \\
&\cdot (P_n^3 - 3P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 3P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
&\cdot \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (P_n - 2)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 1) \cdot [(P_n^2) \cdot (P_n - 1)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 + 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - P_n + 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n + 1) \dots (P_n^3 - 2P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 2) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n + 1) \dots (P_n^3 - P_n - 1) \cdot [(P_n^2 - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^3 - P_n + 1) \dots (P_n^3 - 1)
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
(P_n - 1)! &= (P_n - 1)! \\
&\cdot (P_n + 1) \dots (2P_n - 1) \\
&\cdot (2P_n + 1) \dots (3P_n - 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \dots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \dots (P_n^2 - P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 - P_n + 1) \dots (P_n^2 - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + 1) \dots (P_n^2 + P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + P_n + 1) \dots (P_n^2 + 2P_n - 1) \\
&\cdot (P_n^2 + 2P_n + 1) \dots (P_n^2 + 3P_n - 1) \\
&\cdot \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \dots \\
& \cdot (2P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 1) \cdots (2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 1) \cdots (3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 1) \\
& \cdot \dots
\end{aligned}$$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n :)

$$\begin{aligned}
& \cdot (1P_n) \cdot (2P_n) \cdot (3P_n) \cdots [(P_n - 2) \cdot (P_n)] \cdot [(P_n - 1) \cdot (P_n)] \\
& \cdot (P_n^2) \cdot [(P_n + 1) \cdot P_n] \cdot [(P_n + 2) \cdot P_n] \cdots [(P_n - 1) \cdot P_n \cdot 2] \cdot [(2P_n - 1) \cdot P_n] \\
& \cdot 2(P_n^2) \cdot [(2P_n + 1) \cdot P_n] \cdots [(3P_n - 2) \cdot P_n] \cdot [(3P_n - 1) \cdot P_n] \\
& \cdot 3(P_n^2) \cdot [(3P_n + 1) \cdot P_n] \cdots [(P_n - 3P_n - 2) \cdot P_n] \cdot [(P_n - 3P_n - 1) \cdot P_n] \\
& \cdot [P_n^2 \cdot (P_n - 3)] \cdot [(P_n^2 - 3P_n + 1) \cdot P_n] \cdots [(P_n^2 - 2P_n - 1) \cdot P_n] \\
& \cdot [P_n^2 \cdot (P_n - 2)] \cdot [(P_n^2 - 2P_n + 1) \cdot P_n] \cdots [(P_n^2 - P_n - 1) \cdot P_n] \\
& \cdot [P_n^2 \cdot (P_n - 1)] \cdot [(P_n^2 - P_n + 1) \cdot P_n] \cdots [(P_n^2 - 2) \cdot P_n] \cdot [(P_n - 1) \cdot P_n]
\end{aligned}$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,3}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre tous les facteurs de P_n s'il y en a, cela nous donne, en réorganisant de manière "avantageuse" les termes non multiples de P_n restants :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} = & (P_n - 1)! \\
& \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^2 + 1) \cdots (P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^2 + P_n + 1) \cdots (P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \dots \\
& \cdot (2P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 - P_n + 1) \cdots (2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 1) \cdots (2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (2P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (2P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 1) \cdots (3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 2P_n - 1) \\
& \cdot (3P_n^2 + 2P_n + 1) \cdots (3P_n^2 + 3P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - 3P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 + 1) \cdots (P_n^3 - P_n^2 + P_n - 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^3 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 1) \\
& \cdot \dots
\end{aligned}$$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les nombres restants non multiples de P_n :)

$$\begin{aligned}
& \cdot (1) \cdot (2) \cdot (3) \cdots (P_n - 2) \cdot (P_n - 1) \\
& \cdot (P_n + 1) \cdot (P_n + 2) \cdots (P_n - 1) \cdot (2P_n - 1) \\
& \cdot (2) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 2) \cdot (3P_n - 1) \\
& \cdot (3) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n - 3P_n - 2) \cdot (P_n - 3P_n - 1) \\
& \cdot (P_n - 3) \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot (P_n - 2) \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot (P_n - 1) \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2) \cdot (P_n^2 - 1)
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière partie de l'égalité, nous constatons que nous pouvons réorganiser les termes restants ainsi (les couleurs noires forment un ensemble et les couleurs rouges forment un autre ensemble):

$$\begin{aligned}
& (1) \cdot (2) \cdot (3) \cdots (P_n - 2) \cdot (P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(1)} \cdot (P_n + 1) \cdot (P_n + 2) \cdots (P_n - 1) \cdot (2P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(2)} \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 2) \cdot (3P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(3)} \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n - 3P_n - 2) \cdot (P_n - 3P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(P_n - 3)} \cdot (P_n^2 - 3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(P_n - 2)} \cdot (P_n^2 - 2P_n + 1) \cdots (P_n^2 - P_n - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(P_n - 1)} \cdot (P_n^2 - P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 2) \cdot (P_n^2 - 1) \\
& = \\
& (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
& \cdot \textcolor{red}{(P_n - 1)!}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} &= (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)!
\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_{n,3}$ non divisible par P_n .

• Pour $(P_n^4 - 1)!$ nous avons :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n \cdot 2P_n \cdot 3P_n \cdots (P_n^3 - 1)P_n \cdot k_4$$

Ici, le nombre de termes sous la forme “ $a \cdot P_n$ ” multiples de P_n est $(P_n^3 - 1)$. Par conséquent, k_4 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n . Le nombre de multiples de P_n^2 est $(P_n^2 - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n^2 \cdot 2P_n^2 \cdot 3P_n^2 \cdots (P_n^2 - 1)P_n^2 \cdot k'_4$$

k'_4 est le produit de tous les autres nombres. Le nombre de multiples de P_n^3 est $(P_n - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$(P_n^4 - 1)! = P_n^3 \cdot 2P_n^3 \cdot 3P_n^3 \cdots (P_n - 1)P_n^3 \cdot k''_4$$

k''_4 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par $P_n^{(P_n^3-1)}$, par $P_n^{(P_n^2-1)}$ et par $P_n^{(P_n-1)}$.

$$\begin{aligned} (P_n^4 - 1)! &= P_n^{(P_n^3-1)} \cdot P_n^{(P_n^2-1)} \cdot P_n^{(P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,4} \\ &= P_n^{(P_n^3+P_n^2+P_n-3)} \cdot \varepsilon_{n,4} \end{aligned}$$

Et donc $\varepsilon_{n,4}$ n'est pas divisible par P_n .

Même principe que précédemment pour la réécriture et une réorganisation adéquate (l'écriture de chaque ligne avant simplification serait trop lourde à gérer, même en plusieurs pages) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,4} &= (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^4 - 1) \\ &\quad \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 1) \\ &\quad \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\ &\quad \cdot (P_n - 1)! \end{aligned}$$

• Pour $(P_n^x - 1)!$ nous avons :

Ecrivons toutes les possibilités pour la divisibilité de ce produit factoriel, pour $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$:

$$(P_n^x - 1)! = P_n \cdot 2P_n \cdot 3P_n \cdots (P_n^{(x-1)} - 1)P_n \cdot k_x$$

Ceci signifie aussi que, sur l'intervalle $]0; P_n^x[$, il existe $(P_n^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n . Mais continuons (les trois points de suspension dans le produit suivant représentent des nombres entiers consécutifs dont chacun est à multiplier par P_n élevé à la même puissance que les autres P_n de la même ligne, du dernier nombre de cette forme qui précède ces points jusqu'au premier nombre de cette forme qui suit ces points) :

$$\begin{aligned} (P_n^x - 1)! &= P_n^2 \cdot 2P_n^2 \cdot 3P_n^2 \cdots (P_n^{(x-2)} - 1)P_n^2 \cdot k'_x \\ &= P_n^3 \cdot 2P_n^3 \cdot 3P_n^3 \cdots (P_n^{(x-3)} - 1)P_n^3 \cdot k''_x \\ &\dots \\ &= P_n^{(x-1)} \cdot 2P_n^{(x-1)} \cdot 3P_n^{(x-1)} \cdots (P_n - 1)P_n^{(x-1)} \cdot k_{x'} \end{aligned}$$

Avec k_x , k'_x , k''_x , ... , $k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

Et donc sur l'intervalle $]0; P_n^x[$, il existe $(P_n - 1)$ multiples de $P_n^{(x-1)}$, d'après cette dernière formule. Mais nous devons aussi tenir compte de ce qui suit :

Sur l'intervalle $]0; P_n^x[$,

Il existe $(P_n^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n ,
dont $(P_n^{(x-2)} - 1)$ sont multiples de P_n^2 ,
dont $(P_n^{(x-3)} - 1)$ sont multiples de P_n^3 ,
...
dont $(P_n^3 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-3)}$,
dont $(P_n^2 - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-2)}$,
et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de $P_n^{(x-1)}$.

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}(P_n^x - 1)! &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1)} \cdot P_n^{(P_n^{(x-2)}-1)} \cdot P_n^{(P_n^{(x-3)}-1)} \dots P_n^{(P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1+P_n^{(x-2)}-1+P_n^{(x-3)}-1+\dots+P_n-1)} \cdot \varepsilon_{n,x}\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n (par construction). Le terme “ -1 ” à l’intérieur des parenthèses est répété $(x-1)$ fois. Donc :

$$\begin{aligned}(P_n^x - 1)! &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+P_n^{(x-3)}+\dots+P_n-(x-1)]} \cdot \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+P_n^{(x-3)}+\dots+P_n+1-x]} \cdot \varepsilon_{n,x}\end{aligned}$$

Or,

$$[P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)} + \dots + P_n + 1] = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc,

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Et donc,

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Si P_n n’était pas un nombre premier, alors $\varepsilon_{n,x}$ serait un nombre entier divisible par ce nombre. Ce qui explique la fonction F_c , vue précédemment. En effet, pour :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}}$$

où l’on a simplement divisé l’expression de $\varepsilon_{n,x}$ par P_n , $\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est un autre nombre entier (non premier). Ainsi, nous n’avons pas besoin de connaître les nombres premiers pour formuler cette expression.

Démonstration :

Si M est un nombre entier qui n'est pas un nombre premier (M est tel que $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$), alors M peut se décomposer ainsi :

$$M = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

(développement 1)

Avec $P_1, P_2, P_3, \dots$ et P_n , avec $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$ et avec au moins deux des termes $\alpha_n \geq 1$.

Rappelons que pour M défini ainsi, nous avons nécessairement :

$$P_n < M$$

ou, autrement dit, un nombre entier non premier est supérieur à chaque nombre premier P_n (élevé à la puissance α_n) dont il est composé.

Et donc nécessairement :

$$P_n^x < M^x$$

Avec $x \geq 1$, car ce raisonnement s'applique seulement si M peut être décomposé en produit de nombres premiers. En reprenant la méthode précédente (voir la formule de $\varepsilon_{M,x}$), nous avons :

$$\begin{aligned} (M^x - 1)! &= M \cdot 2M \cdot 3M \cdots (M^{(x-1)} - 1) \cdot M \cdot k_x \\ &= M^2 \cdot 2M^2 \cdot 3M^2 \cdots (M^{(x-2)} - 1) \cdot M^2 \cdot k'_x \\ &= M^3 \cdot 2M^3 \cdot 3M^3 \cdots (M^{(x-3)} - 1) \cdot M^3 \cdot k''_x \\ &\dots \\ &= M^{(x-1)} \cdot 2M^{(x-1)} \cdot 3M^{(x-1)} \cdots (M - 1) \cdot M^{(x-1)} \cdot k_{x'} \end{aligned}$$

Avec $k_x, k'_x, k''_x, \dots, k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

(rappelons que cette méthode consiste à regrouper ensemble tous les facteurs premiers possibles pour chaque puissance de x).

Or, M étant composé d'un produit de facteurs premiers, nous retrouvons nécessairement tous ses facteurs dans le produit factoriel puisque chacun est inférieur à M :

$$\begin{aligned}(M^x - 1)! &= P_1^{(x \cdot \alpha_1)} \cdot P_2^{(x \cdot \alpha_2)} \cdot P_3^{(x \cdot \alpha_3)} \dots P_n^{(x \cdot \alpha_n)} \cdot k_{x''} \\ &= M^x \cdot k_{x''} \quad (\text{avec } k_{x''} \text{ un nombre entier})\end{aligned}$$

Pour alléger la démonstration, il n'est pas utile d'étudier tous les multiples de chaque facteur des P_n , ainsi, $(M^x - 1)!$ est divisible par au moins M "en plus de" :

$$M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x\right)}$$

Ce qui revient à écrire :

$$(M^x - 1)! = (\varepsilon_{M,x}) \cdot M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$).

Ceci est toujours vrai lorsque $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$ avec au moins deux des termes $\alpha_n \geq 1$.

(développement 2)

Supposons que $M = P_n^x$

Le résultat de $(P_n^x - 1)!/\varepsilon_{n,x}$ contient le nombre maximum possible de divisibilités par P_n . Ce nombre maximum se retrouve dans la puissance de P_n , c'est-à-dire dans $\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1} - x\right)$.

Pour $x = 1$,

$$(M - 1)! = (P_n - 1)!$$

Or, $(P_n - 1)!$ n'est jamais divisible par P_n car aucun des nombre du produit de la factorielle n'est divisible par P_n .

Pour $x > 1$,

$$(M - 1)! = (P_n^x - 1)!$$

Or, $(M - 1)!$ est divisible par M si et seulement si l'on retrouve le produit de ses facteurs premiers dans les produits de la factorielle.

Par exemple, pour $M = P_1 \cdot P_2$, comme $M > P_2 > P_1$, nous avons :

$$(M - 1)! = (M - 1) \cdot (M - 2) \cdots P_2 \cdot P_1 \cdots 3 \cdot 2$$

est divisible par M .

Et, de manière plus explicite, pour notre cas où $M = P_n^x$ avec quelques exemples :

* Si $P_n = 2$ et $x = 3$,

$$(M - 1)! = 7 \cdot (6) \cdot 5 \cdot (4) \cdot 3 \cdot (2) \cdot 1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 2$,

$$(M - 1)! = 8 \cdot 7 \cdot (6) \cdot 5 \cdot 4 \cdot (3) \cdot 2 \cdot 1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 3$,

$$(M-1)! = 26 \cdot 25 \cdot (24) \cdot 23 \cdot 22 \cdot (21) \cdot 20 \cdot 19 \cdot (18) \cdot 17 \cdot 16 \cdot (15) \cdot 14 \cdot 13 \cdot (12) \cdot 11 \cdot 10 \cdot (9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6) \cdot 5 \cdot 4 \cdot (3) \cdot 2 \cdot 1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

* Si $P_n = 5$ et $x = 2$,

$$(M-1)! = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot (20) \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot (15) \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot (10) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

La question qu'il convient alors de nous poser est : existe-t-il des nombres M qui échappent à cette règle? Y'a-t-il toujours des facteurs premiers en nombre suffisant dans la décomposition du produit factoriel de $(M-1)$?

Pour y répondre, étudions des inégalités, tout en gardant à l'esprit l'égalité $M = P_n^x$.

$(M-1)!$ est divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, avec, comme nous l'avons déjà déterminé :

$$\begin{aligned}(M-1)! &= (P_n^x - 1)! \\ (P_n^x - 1)! &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)} \cdot (\varepsilon_{n,x})\end{aligned}$$

$(\varepsilon_{n,x}$ non divisible par P_n , donc seul le reste de la formule est divisible par M).

Or, pour que $(M-1)!$ soit divisible au moins par M ou bien par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, nous pouvons borner l'inégalité par le minimum auquel $(M-1)!$ doit être divisible, c'est-à-dire par M , puis comparer cette borne inférieure à la formule théorique que nous avons déterminée pour obtenir le nombre de divisibilité par P_n :

$$P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)} \geq P_n^x$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) &\geq x \\ P_n^x &\geq 2x \cdot (P_n - 1) + 1 \\ P_n^x - 2x \cdot (P_n - 1) &\geq 1 \end{aligned}$$

Rappelons que ce raisonnement est à appliquer seulement si $x \geq 2$ car dans le cas où $x = 1$, $(P_n - 1)!$ n'est pas divisible par P_n .

(Vérification 1)

Si $x = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} P_n^2 - 4P_n + 4 &\geq 1 \\ \Rightarrow (P_n - 2)^2 &\geq 1 \\ \text{Donc } P_n &\geq 3 \end{aligned}$$

Les nombres entiers inférieurs à 3 se trouvent sur l'intervalle $]0; 3[$. Ces nombres entiers sont 1 et 2. Or, 2 est le plus petit nombre premier. La formule suivante ayant été établie :

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot (\varepsilon_{n,x})$$

Cette formule échappe donc au cas $P_n = 2$ lorsque $x = 2$. Or, 2 étant le plus petit nombre premier, tous les cas ont donc été examinés pour $x = 2$.

(Vérification 2, suite)

Si $x \geq 3$, nous cherchons toujours à établir la justesse de l'inégalité précédente, que nous redonnons ici :

$$P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \geq P_n^x$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right) &\geq x \\ \Rightarrow \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x &\geq 0 \end{aligned}$$

Remarquons que le plus petit nombre premier étant 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} \\ \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x \end{aligned}$$

Or, pour $x \geq 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} 2^x &\geq 2x + 2 \\ \Rightarrow 2^x - 1 - 2x &\geq 1 \\ \Rightarrow \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x &\geq 1 \end{aligned}$$

Et donc, pour $x \geq 3$, nous pouvons déduire que :

$$\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - 2x \geq 1$$

Ce qui est une condition nécessaire pour que les formules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$ établies soient telles que nous les avons définies juste avant cette démonstration.

Conclusion partielle :

- Pour $P_n \in \mathbb{P}$:

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot (\varepsilon_{n,x})$$

avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n , cette formule est donc toujours vraie sauf pour le seul cas de $P_n = 2$ et $x = 2$.

- Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \notin \mathbb{P}$:

$$(M^x - 1)! = M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)} \cdot (\varepsilon_{M,x})$$

Cette formule est donc toujours vraie sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$.

Et donc :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}}$$

$\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est nombre entier non premier supérieur à 3, toujours en dehors du seul cas $M = 4$ et $x = 1$.

$\Rightarrow$ ATTENTION :

Par la suite, nous considérerons ces deux cas comme acquis pour tout le reste de l'étude : à chaque fois que nous utiliserons les fomules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$, nous sous-entendrons que ces formules sont toujours valables sauf dans le cas de $P_n = 2$ et $x = 2$, et respectivement sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$.

(Explications)

Explication concernant le “problème” rencontré pour $M = 4$:

Ce problème s’explique parce qu’il n’existe qu’un multiple de 2 sur l’intervalle $]0; 4[$. Or, une division par $M (= 2^2)$ aurait été nécessaire pour que la formule donne toujours les résultats désirés, c’est-à-dire $\varepsilon_{M,x}$ divisible par M lorsque M est un nombre entier qui n’est pas un nombre premier.

Comme ce n’est pas le cas pour $M = 4$, nous avons plusieurs choix qui s’offrent à nous pour contourner ce problème : soit élever $(M - 1)!$ au carré pour obtenir la divisibilité par M lorsque $M = 4$, soit en construisant une formule “annexe” qui corrige ce problème, comme nous l’avons fait pour la “fonction A ” vu dans la partie précédente (voir partie “**2.1 Vue d’ensemble des étapes à suivre**” page 27).

En tenant compte de toutes ces informations nous pouvons formuler les “fonctions” F_c et A vues dans la partie “**2.1 Vue d’ensemble des étapes à suivre**” (page 27).

• Suite 1 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$:

Nous désirons maintenant savoir ce qu’il advient de la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$ et de $\varepsilon_{M,x}$ par P_n lorsque $x \geq 2$. Le théorème de *WILSON* [2] nous permettant directement de savoir que :

$$(P_n - 1)! = P_n \cdot w_1 - 1 \quad (\text{avec } w_1 \text{ un nombre entier})$$

D’après ce que nous venons de voir, nous pouvons déduire de la formule $\varepsilon_{n,x}$ qu’elle est équivalente aux produits de tous les termes non divisibles par P_n . Nous avons donc ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x \right)}$$

En décomposant $(P_n^x - 1)!$ (ceci étant un peu lourd à gérer, nous allons étaler l'égalité en produits sur plusieurs lignes et plusieurs pages, d'abord les produits des termes non multiples de P_n , puis les produits des termes multiples de P_n), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(P_n^x - 1)! &= (P_n^x - 1) \cdot (P_n^x - 2) \cdots (P_n^x - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n - 1) \cdot (P_n^x - P_n - 2) \cdots (P_n^x - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n - 1) \cdot (P_n^x - 2P_n - 2) \cdots (P_n^x - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - 1) \cdot (P_n^x - P_n^2 - 2) \cdots (P_n^x - P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - P_n - 1) \cdots (P_n^x - P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^2 - 2P_n - 1) \cdots (P_n^x - P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - P_n - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 1) \cdots (P_n^x - 3P_n^2 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - P_n - 1) \cdots (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \cdots (P_n^x - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - 1) \cdot (P_n^x - P_n^3 - 2) \cdots (P_n^x - P_n^3 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - P_n - 1) \cdots (P_n^x - P_n^3 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - P_n^3 - 2P_n - 1) \cdots (P_n^x - P_n^3 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^3 - P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - P_n - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n + 1) \\
&\cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n - 1) \cdots (P_n^x - 2P_n^3 - 3P_n + 1) \\
&\cdot \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^x - 3P_n^3 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 1) \dots (P_n^3 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^2 - 1) \dots (P_n^2 - P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^2 - P_n - 1) \dots (P_n^2 - 2P_n + 1) \\
& \cdot (P_n^2 - 2P_n - 1) \dots (P_n^2 - 3P_n + 1) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n - 1) \cdot (P_n - 2) \cdot (P_n - 3) \dots (3) \cdot (2) \cdot (1)
\end{aligned}$$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n et uniquement les termes multiples de P_n dans le même ordre décroissant que suivi précédemment : voir page suivante)

$$\begin{aligned}
& \cdot (P_n^x - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - P_n^2) \cdot (P_n^x - P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 2P_n^2) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^2) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - P_n^3) \cdot (P_n^x - P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 2P_n^3) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 2P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^x - 3P_n^3) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^x - 3P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3) \cdot (P_n^3 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - P_n^2) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 2P_n^2) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 2P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^3 - 3P_n^2) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^3 - 3P_n^2 - 3P_n) \\
& \cdot \dots \\
& \cdot (P_n^2) \cdot (P_n^2 - P_n) \cdot (P_n^2 - 2P_n) \cdot (P_n^2 - 3P_n) \dots (P_n)
\end{aligned}$$

En divisant ce “grand” produit par $P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n . Ceci nous permet d’observer des “trous” à la place des multiples de P_n dont la valeur est un “reste” non divisible par P_n . Nous obtenons donc ce qui suit : *(voir page suivante)*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} = & (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^x - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^{(x-1)} - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^{(x-2)} - 1) \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^3 - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)! \cdot (P_n + 1) \cdots (2P_n - 1) \cdot (2P_n + 1) \cdots (3P_n - 1) \cdot (3P_n + 1) \cdots (P_n^2 - 1) \\
& \cdot (P_n - 1)!
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire (produits étalés ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges pour plus de clarté, c'est-à-dire que par rapport à notre dernière formule de $\varepsilon_{n,x}$, lorsque nous passons à la ligne suivante de cette formule, les tirets servent à marquer ce passage d'une ligne à l'autre) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} = & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-1)} \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-1)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-1)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \quad \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-2)} \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-2)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-2)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^{(x-3)} \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-3)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^{(x-3)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \dots \\
& \text{-----}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n^2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^2 - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n^2 - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)
\end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} &= \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-1)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-2)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-3)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] \\
&\quad \cdot \dots \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^2} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^1} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] \\
&\quad \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^0} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right]
\end{aligned}$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a)$$

Et donc

$$\frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a)$$

Prenons un exemple pour bien voir concrètement comment cette formule se représente. Prenons $P_n = P_3 = 5$ ($n = 3$ car dans l'ordre croissant, 5 est le 3^{ème} de la liste des nombres premiers) et prenons $x = 3$ (les couleurs permettent une réorganisation en groupe, un groupe par couleur. Entre les parenthèses, les multiples de 5 sont mis en évidence par un produit par 5) :

$$\begin{aligned}
 (5^3 - 1)! &= 124! \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\textcolor{red}{1} \cdot 5) \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot (\textcolor{red}{2} \cdot 5) \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{3} \cdot 5) \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot (\textcolor{red}{4} \cdot 5) \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{blue}{1} \cdot 5 \cdot 5) \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot (\textcolor{red}{6} \cdot 5) \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{7} \cdot 5) \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot (\textcolor{red}{8} \cdot 5) \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{9} \cdot 5) \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot (\textcolor{blue}{2} \cdot 5 \cdot 5) \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{11} \cdot 5) \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot (\textcolor{red}{12} \cdot 5) \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{13} \cdot 5) \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot (\textcolor{red}{14} \cdot 5) \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{blue}{3} \cdot 5 \cdot 5) \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot (\textcolor{red}{16} \cdot 5) \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{17} \cdot 5) \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot (\textcolor{red}{18} \cdot 5) \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{19} \cdot 5) \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot (\textcolor{blue}{4} \cdot 5 \cdot 5) \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{21} \cdot 5) \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot (\textcolor{red}{22} \cdot 5) \cdot 111 \cdot 112 \cdot 113 \cdot 114 \\
 &\quad \cdot (\textcolor{red}{23} \cdot 5) \cdot 116 \cdot 117 \cdot 118 \cdot 119 \cdot (\textcolor{red}{24} \cdot 5) \cdot 121 \cdot 122 \cdot 123 \cdot 124
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5^3 - 1)! &= 5^{\left(\frac{5^3-1}{5-1}-3\right)} \cdot \varepsilon_{3,3} \quad (\varepsilon_{3,3} \text{ non divisible par } 5) \\
 &= 5^{28} \cdot \varepsilon_{3,3}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_{3,3}$ nous permet “d’éliminer” tous les 5 qui sont facteurs de chaque nombre dans notre produit.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{3,3} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\textcolor{red}{1}) \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot (\textcolor{red}{2}) \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot (\textcolor{red}{3}) \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot (\textcolor{red}{4}) \\
 &\quad \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot (\textcolor{blue}{1}) \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot (\textcolor{red}{6}) \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot (\textcolor{red}{7}) \\
 &\quad \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot (\textcolor{red}{8}) \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot (\textcolor{red}{9}) \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot (\textcolor{blue}{2}) \\
 &\quad \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot (\textcolor{red}{11}) \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot (\textcolor{red}{12}) \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot (\textcolor{red}{13}) \\
 &\quad \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot (\textcolor{red}{14}) \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot (\textcolor{blue}{3}) \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot (\textcolor{red}{16}) \\
 &\quad \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot (\textcolor{red}{17}) \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot (\textcolor{red}{18}) \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot (\textcolor{red}{19}) \\
 &\quad \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot (\textcolor{blue}{4}) \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 \cdot (\textcolor{red}{21}) \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot (\textcolor{red}{22}) \\
 &\quad \cdot 111 \cdot 112 \cdot 113 \cdot 114 \cdot (\textcolor{red}{23}) \cdot 116 \cdot 117 \cdot 118 \cdot 119 \cdot (\textcolor{red}{24}) \cdot 121 \cdot 122 \cdot 123 \cdot 124
 \end{aligned}$$

D'où l'on voit apparaître clairement dans chaque groupe de couleur une réorganisation possible :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3,3} = & (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \cdot (16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19) \cdot (21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24) \\ & \cdot (26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29) \cdot (31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34) \cdot (36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39) \cdot (41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44) \\ & \cdot (46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49) \cdot (51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54) \cdot (56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59) \cdot (61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64) \\ & \cdot (66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69) \cdot (71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74) \cdot (76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79) \cdot (81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84) \\ & \cdot (86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89) \cdot (91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94) \cdot (96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99) \cdot (101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104) \\ & \cdot (106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109) \cdot (111 \cdot 112 \cdot 113 \cdot 114) \cdot (116 \cdot 117 \cdot 118 \cdot 119) \\ & \cdot (121 \cdot 122 \cdot 123 \cdot 124) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \\ & \cdot (16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19) \cdot (21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à :

$$\varepsilon_{3,3} = \prod_{c=0}^{c=(3-1)} \prod_{b=1}^{b=5^c} \prod_{a=1}^{a=(5-1)} (b \cdot 5 - a)$$

• Suite 2 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Pour éviter de nous perdre dans des développements trop longs, nous ferons des simplifications dans chacune des prochaines parties qui nous permettront d'aller à l'essentiel. C'est-à-dire que nous n'écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Poursuivons en notant $B = b \cdot P_n$ (d'après la formule de $\varepsilon_{n,x}$, b est implicitement un nombre entier), nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) = \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a)$$

En développant, nous obtenons un résultat du type :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (B) \cdot f(B) - (P_n - 1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (B) \cdot f(B) + (P_n - 1)!$$

avec $f(B)$ un nombre entier en fonction de B . Nous constatons que $(P_n - 1)!$ apparaît suite à la multiplication de tous les “ a ” (à droite de la parenthèse) entre eux, pour “ a ” partant de 1 jusqu’à $(P_n - 1)$ et en passant par toutes les valeurs entières intermédiaires. Comme $(P_n - 1)$ est paire lorsque P_n est impaire, lors du développement, nous avons une multiplication de “ $-a$ ” un nombre paire de fois, ce qui rend positif le signe devant la factorielle. Evidemment, le reste du développement est nécessairement une somme de puissances de B (un “polynôme” dont les puissances décroissent de $(P_n - 1)$ jusqu’à 1 en passant par toutes les valeurs entières intermédiaires, ce qui nous permet une factorisation par B . Nous appellerons $f(B)$ “nombre entier polynômiale”), chaque puissance de B ayant un nombre entier pour coefficient.

En revenant aux variables de départ, nous avons donc :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) = (b \cdot P_n) \cdot f(b \cdot P_n) - (P_n - 1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B - a) = (b \cdot P_n) \cdot f(b \cdot P_n) + (P_n - 1)!$$

avec $f(b \cdot P_n)$ un nombre entier polynômiale de degré $(P_n - 1)$ en fonction de b et de P_n .

Dans le cas où P_n est paire :

si $P_n = 2 \cdot m$ (avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$)

$P_n = 2$ est le seul nombre premier qui soit paire (donc $m = 1$) car tous les autres nombres paires > 0 sont composés en produit de 2 et de $m > 1$. Nous avons donc :

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2 \cdot b - a) = (2 \cdot b) - 1$$

Ce qui signifie donc que

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2 \cdot b - a) + 1 = (2 \cdot b)$$

Et donc $\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2 \cdot b - a) + 1$ est divisible par le nombre premier 2.

Dans le cas où P_n est impaire :

P_n est impaire dans tous les autres cas. D'après le théorème de *WILSON* [2], $[(P_n - 1)! + 1]$ est divisible par P_n , ce qui peut être noté comme ceci :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n \cdot w_1 \text{ (avec } w_1 \text{ un nombre entier).}$$

Ou encore

$$(P_n - 1)! = P_n \cdot w_1 - 1$$

D'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) &= (b \cdot P_n) \cdot f(b \cdot P_n) + P_n \cdot w_1 - 1 \\ &= P_n \cdot [b \cdot f(b \cdot P_n) + w_1] - 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] + 1 = P_n \cdot [b \cdot f(b \cdot P_n) + w_1]$$

Et donc $\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] + 1$ est divisible par P_n .

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$:

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] + 1 \quad \text{divisible par } P_n.$$

• Suite 3 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Poursuivons ce dernier raisonnement en notant (pour alléger la lecture) :

$$[b \cdot f(b \cdot P_n) + w_1] = w_{2,c}$$

Avec $w_{2,c}$ un nombre entier. Nous avons maintenant :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) = P_n \cdot w_{2,c} - 1$$

Nous avons donc simplement :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a) \right] = \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1)$$

Comme précédemment, nous pouvons développer ce produit et obtenir un résultat du type (ici aussi, nous distinguons deux cas possibles) :

- Si P_n est paire (et pour $c \geq 1$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = (P_n \cdot w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) + 1$$

- Et si P_n est impaire (et pour tout $c \geq 0$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = (P_n \cdot w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) - 1$$

Avec $f(P_n \cdot w_{2,c})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{2,c}$. “ 1 ” apparaît suite à la multiplication de tous les “ 1 ” (à droite de la parenthèse) entre eux un nombre de fois qui vaut P_n puissance (c). “+1” apparaît si ce nombre de fois est paire et “−1” apparaît si ce nombre de fois est impaire. Evidemment, le reste du développement est forcément une somme de puissance de $(P_n \cdot w_{2,c})$, chacune ayant un nombre entier pour coefficient.

Cas de P_n paire :

Nous avons déjà vu qu’un seul cas n’est concerné, c’est celui de $P_n = 2$:

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = \prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1)$$

Or, $2^{(c)}$ est toujours un nombre paire pour $c \geq 1$, et donc multiple de 2 (attendre la fin de ce raisonnement pour que le cas de $c = 0$ apparaisse naturellement). En développant ce produit, nous obtenons :

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) = (2 \cdot w_{2,c}) \cdot f(2 \cdot w_{2,c}) + 1$$

Donc $\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) \right] - 1$ est divisible par le nombre premier 2.

Pour faire le lien avec le cas de P_n impaire, nous allons devoir poursuivre :

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) &= (2 \cdot w_{2,c}) \cdot f(2 \cdot w_{2,c}) + 1 \\ &= (2 \cdot w_{2,c}) \cdot f(2 \cdot w_{2,c}) + 2 - 1 \\ &= 2 \cdot [(w_{2,c}) \cdot f(2 \cdot w_{2,c}) + 1] - 1 \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2 \cdot w_{2,c} - 1) \right] + 1 \text{ est également divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Comme nous l'avons déjà vu, ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 0$).

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) &= P_n \cdot (w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) - 1 \\ \left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) \right] + 1 &= P_n \cdot (w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) \right] + 1 \text{ est divisible par } P_n.$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} \prod_{a=(P_n-1)}^{a=1} (b \cdot P_n - a) \right] + 1 \text{ est divisible par } P_n.$$

• Suite 4 de l'étude de $(P_n^x - 1)!$:

Avant de pouvoir donner une conclusion générale sur la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$, il nous faut encore traiter cette dernière étape. Rappelons que :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b=P_n^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b \cdot P_n - a)$$

Nous avons noté

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c)}} (P_n \cdot w_{2,c} - 1) = P_n \cdot (w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$$(w_{2,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{2,c}) = w_{3,x} \quad (\text{avec } w_{3,x} \text{ un nombre entier})$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n \cdot w_{3,x} - 1) = P_n \cdot (w_{3,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{3,x}) - 1 \quad \text{si } x \text{ est impaire.}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot (w_{3,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{3,x}) + 1 \quad \text{si } x \text{ est paire.}$$

Avec $f(P_n \cdot w_{3,x})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{3,x}$.

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n \cdot w_{3,x} - 1) = P_n \cdot (w_{3,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{3,x}) + (-1)^x$$

D'où

$$\varepsilon_{n,x} - (-1)^x = P_n \cdot [(w_{3,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{3,x})]$$

avec $[(w_{3,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{3,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_3 un nombre entier non fixé, nous avons toujours :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 + (-1)^x \quad \text{pour tout } P_n \in \mathbb{P} \text{ et pour tout } x \geq 1.$$

Rappelons que nous avons noté :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Nous avons donc pour $x \geq 1$:

$$\frac{(P_n^x - 1)!}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} - (-1)^x = P_n \cdot w_3$$

De la même manière pour :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M \cdot M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x\right)}} \end{aligned}$$

- Nous avons un premier cas si $M = P_n$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(P_n^x - 1)!}{P_n \cdot P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} \\ &= \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \quad (\text{autrement dit un nombre rationnel}) \end{aligned}$$

Et d'après ce que nous venons de voir :

pour $x = 1$, nous avons $\varepsilon_{n,x}$ qui équivaut au cas du théorème de WILSON [2] tel que $\varepsilon_{n,1} = P_n \cdot w_1 - 1$ (avec w_1 un nombre entier)

Et de manière générale, si x est impaire :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 - 1 \quad (\text{avec } w_3 \text{ un nombre entier})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 - 1/P_n$$

Et si x est paire :

$$\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 + 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 + 1/P_n$$

Pour $M = P_n$, nous avons donc toujours :

$$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 \pm 1/P_n$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \sin[\pi \cdot (w_3 \pm 1/P_n)] \\ \sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \pm \sin(\pi/P_n) \\ \sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) &= \sin^2(\pi/P_n) \end{aligned}$$

Et donc, pour $M = P_n$:

$$\frac{\sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/P_n)} = 1$$

- Nous avons un second cas si M est un entier tel que $M \neq P_n$:

Nous avons déjà vu que dans ce cas $\varepsilon_{M,x}$ valait un nombre entier (lors de la “**Conclusion partielle**”). Autrement dit :

$$\sin(\pi \cdot \varepsilon_{M,x}) = 0$$

Et donc (avec la formule utilisée au cas précédent, c'est-à-dire le cas de $M = P_n$)

$$\frac{\sin^2(\pi \cdot \varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/M)} = 0 \text{ (pour } M \neq P_n)$$

- En conclusion, nous sommes capables de construire la fonction Cc sur le constat de la divisibilité de $\varepsilon_{M,x}$. Rappelons que :

$$Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/M)}$$

Constatons que nous nous sommes rapprochés de la forme finale de la fonction F_p .

2.2.3 Construction de la fonction F_p

Pour accéder à la solution, nous allons devoir faire des rappels ou réécrire sous une autre forme ce qui peut se déduire de la construction d'un tableau comme le tableau de référence *T.R.2*. Tenons compte des remarques préalables faites en début de partie “**2.2 Démonstration Complète**” (page 29).

• Rappels :

—o **Règle n°1 :** Sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x - 1)$:

Il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

dont la répartition de chaque multiples de $P_n^{(k+1)}$ est régulière

puisque l'écart entre deux de ces multiples vaut $P_n^{(k+1)}$.

—o **Règle n°2 :** il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$$[(t - 1) \cdot P_n^x + 1; t \cdot P_n^x - 1] \quad \text{pour } t \in \mathbb{N}, t \geq 1,$$

Et il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^x}{2}; P_n^x - 1\right]$$

—o **Règle n°3 :** Sur l'intervalle $[1 + r; P_n^x + r]$, pour $r \in \mathbb{N}$:

la quantité des nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours

$P_n^{(x-1)}$ pour un écart de $(P_n^x - 1)$ entre les deux bornes de l'intervalle.

• Etude :

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot \dots \cdot [N - (P_n^x - 1)] \end{aligned}$$

Nous pouvons mettre en valeur essentiellement deux cas intéressants :

Le cas où $N \neq t \cdot P_n^x$ et le cas où $N = t \cdot P_n^x$ (pour $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$).

• Résolution partielle :

Pour $N < P_n^x$ (à inclure dans le cas où $N \neq t \cdot P_n^x$), nous avons

$$2 \leq N \leq (P_n^x - 1)$$

(évidemment, cette inégalité est valable pour tout P_n sauf si $P_n = 2$ et $x = 1$ où nous avons $N = P_n = 2$, donc N multiple de P_n , et donc à exclure de notre cas de toutes façons)

nous avons donc $F_p = 0$, et donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = 0 \quad (\text{un nombre entier})$$

Pour $N = P_n^x$, nous avons :

(à inclure dans le cas où $N = t \cdot P_n^x$ avec $t = 1$ et $r = 0$)

nous retrouvons $F_p = (P_n^x - 1)!$

Donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \quad (\text{avec toutes les propriétés de } \varepsilon_{n,x} \text{ vues précédemment})$$

Or, $\varepsilon_{n,x} = P_n \cdot w_3 \pm 1$ (avec w_3 un nombre entier)

Et donc

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = w_3 \pm \frac{1}{P_n}$$

Pour poursuivre l'étude, il nous faudra réécrire les règles que nous venons de revoir (en "*Rappels*") afin de pouvoir traiter les données.

Pour traiter le cas où $N \neq t \cdot P_n^x$ et le cas où $N = t \cdot P_n^x$, nous allons devoir mener la suite de l'étude sur des intervalles afin de réduire les étapes. Nous allons devoir considérer comme précédemment que :

$$N = t \cdot P_n^x + r \quad \text{pour } r \geq 0$$

D'où

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x + r - h) \\ &= (t \cdot P_n^x + r - 1) \cdot (t \cdot P_n^x + r - 2) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x + r - (P_n^x - 1)] \\ &= (t \cdot P_n^x + r - 1) \cdot (t \cdot P_n^x + r - 2) \cdot \dots \cdot [(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1] \end{aligned}$$

Où nous observons clairement que le calcul sera à traiter pour un produit de nombres entiers consécutifs appartenant à l'intervalle :

$$[(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1; t \cdot P_n^x + r - 1] \quad \text{dont la longueur vaut } (P_n^x - 2).$$

De manière simple, pour $t = 1$ et $r = 1$ (à inclure dans le cas où $N \neq t \cdot P_n^x$), nous avons :

$$\begin{aligned} Fp &= (P_n^x) \cdot (P_n^x - 1) \cdot (P_n^x - 2) \cdot \dots \cdot (3) \cdot (2) \\ &= (P_n^x) \cdot (P_n^x - 1) \cdot (P_n^x - 2) \cdot \dots \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1) \\ &= (P_n^x)! \end{aligned}$$

Or,

$$(P_n^x - 1)! = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n)$$

D'où

$$\begin{aligned} (P_n^x)! &= (P_n^x - 1)! \cdot (P_n^x) \\ &= P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}\right)} \cdot \varepsilon_{n,x} \end{aligned}$$

Donc, ici

$$\begin{aligned} \frac{F_p}{P_n^{F_c}} &= \frac{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}\right)}}{P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}} \cdot \varepsilon_{n,x} \\ &= P_n^{(x-1)} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\text{qui est un nombre entier pour } x \geq 1 \text{ et pour } r = 1) \end{aligned}$$

• Fin de la résolution partielle, suite du raisonnement :

Afin d'étudier les deux cas de $N \neq t \cdot P_n^x$ et de $N = t \cdot P_n^x$, notons donc de manière générale :

$$N = t \cdot P_n^x + r \quad (\text{avec } r \in \mathbb{N}, r \geq 0).$$

afin de traiter plus rapidement ces deux cas, constatons simplement que :

$$\begin{array}{ll} N = t \cdot P_n^x & \text{si } r = 0 \\ N \neq t \cdot P_n^x & \text{si } r \text{ est restreint à l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \end{array}$$

En effet, dans ce dernier cas, toutes les valeurs de N non multiples de P_n sont atteintes pour :

$$t = 1 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [P_n^x + 1; 2 \cdot P_n^x - 1]$$

$$t = 2 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [2 \cdot P_n^x + 1; 3 \cdot P_n^x - 1]$$

$$t = 3 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [3 \cdot P_n^x + 1; 4 \cdot P_n^x - 1]$$

$$t = 4 \text{ et } r \text{ varie sur l'intervalle } [1; P_n^x - 1] \text{ donc } N \in [4 \cdot P_n^x + 1; 5 \cdot P_n^x - 1]$$

...

etc, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ et r variant sur $[1; P_n^x - 1]$, il ne manque que le cas où $2 \leq N \leq (P_n^x - 1)$ qui a déjà été traité au début de la "résolution partielle".

$$\text{Pour } F_p = (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \cdot \dots \cdot [N - (P_n^x - 1)]$$

$$\text{Et } N = t \cdot P_n^x + r \quad (\text{avec } r \in \mathbb{N}, r \geq 0),$$

cela revient à traiter le problème sur des intervalles de type :

$$[(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1; t \cdot P_n^x + r - 1]$$

Nous garderons les mêmes notations pour le reste de la démonstration.

• Cas où $N = t \cdot P_n^x$ (et donc $r = 0$) :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x - h) \\ &= (t \cdot P_n^x - 1) \cdot (t \cdot P_n^x - 2) \cdot \dots \cdot [(t-1) \cdot P_n^x + 1] \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à une étude sur les intervalles du type :

$$[(t-1) \cdot P_n^x + 1; t \cdot P_n^x - 1]$$

D'après la Règle n°1, dans le cas de $t = 1$, et pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$:

Il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$.

Or, d'après la Règle n°2, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles de ce type quelquesoit t . D'après la Règle n°2, nous avons des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^x}{2}; P_n^x - 1\right]$$

Ce qui revient à écrire que nous avons des symétries aussi entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{P_n^{(x+1)}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{P_n^{(x+1)}}{2}; P_n^{(x+1)} - 1\right]$$

d'où nous déduisons que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$ et sur les intervalles du type :

$$[(t-1) \cdot P_n^{(x+1)} + 1; t \cdot P_n^{(x+1)} - 1]$$

il existe $(P_n^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de $P_n^{(k+1)}$,

c'est-à-dire autant que sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$

Or, sur cet intervalle, nous avons $t = 1$, ce qui correspond à :

$$(P_n^x - 1)! = P_n^x \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right)^{-x} \cdot \varepsilon_{n,x} \quad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Donc, nous avons maintenant pour tout $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x - h) \\
 &= P_n \left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} \right)^{-x} \cdot \varepsilon_{n,x,t} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n)
 \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \quad \text{qui est un nombre rationnel.}$$

Sur le modèle de la fin du paragraphe “*Suite 1 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$* ” pour $\varepsilon_{n,x}$, nous allons réécrire $\varepsilon_{n,x,t}$ sous une autre forme.

Pour retrouver $\varepsilon_{n,x,t}$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n . Ceci nous permet d’observer des “trous” à la place des multiples de P_n dont la valeur est un “reste” non divisible par P_n . Nous obtenons donc ce qui suit (produits étalés sur plusieurs pages, et ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges correspondants à des groupes de termes identiques pour les égalités qui vont suivre) : (*voir page suivante*)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} = & [t \cdot P_n^x - P_n^x + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + 2P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + 2P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + 3P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^x - P_n^x + 3P_n + 1] \cdot \dots \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^x - 1] \\
& \text{-----} \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 2P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 2P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 3P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - P_n^{(x-1)} + 3P_n + 1] \cdot \dots \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-1)} - 1] \\
& \text{-----} \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 2P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 2P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 3P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - P_n^{(x-2)} + 3P_n + 1] \cdot \dots \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^{(x-2)} - 1] \\
& \text{-----} \\
& \cdot \dots \\
& \text{-----} \\
& \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + 2P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + 2P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + 3P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^3 - P_n^3 + 3P_n + 1] \cdot \dots \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^3 - 1] \\
& \text{-----} \\
& \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + 2P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + 2P_n + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + 3P_n - 1] \\
& \cdot [t \cdot P_n^2 - P_n^2 + 3P_n + 1] \cdot \dots \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^2 - 1] \\
& \text{-----} \\
& \cdot [t \cdot P_n^1 - P_n^1 + 1] \cdot \dots \cdot [t \cdot P_n^1 - P_n^1 + P_n - 1]
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire : (*voir page suivante*)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} = & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + 1 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + 2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + 3 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + (P_n^{(x-1)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + (P_n^{(x-1)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + P_n^{(x-1)} \cdot P_n - a] \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + 1 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + 2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + 3 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + (P_n^{(x-2)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + (P_n^{(x-2)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} \cdot P_n - a] \\
& \text{-----}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + 1 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + 2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + 3 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + (P_n^{(x-3)} - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + (P_n^{(x-3)} - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + P_n^{(x-3)} \cdot P_n - a]
\end{aligned}$$

· ...

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + 1 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + 2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + 3 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + (P_n^2 - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + (P_n^2 - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + P_n^2 \cdot P_n - a]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + 1 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + 2 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + 3 \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + (P_n^1 - 2) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + (P_n^1 - 1) \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + P_n^1 \cdot P_n - a] \\
& \text{-----} \\
& \cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^1 + 1 \cdot P_n - a]
\end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} = & \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^x + b \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-2)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-1)} + b \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^{(x-3)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(x-2)} + b \cdot P_n - a] \\
& \cdot \dots \\
& \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^2} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^3 + b \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^1} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^2 + b \cdot P_n - a] \\
& \cdot \prod_{b=1}^{b=P_n^0} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^1 + b \cdot P_n - a]
\end{aligned}$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a]$$

Implicitement : a , b , c , t et x sont des nombres entiers ≥ 1 . Il nous reste à exprimer la divisibilité de $\varepsilon_{n,x,t}$ par P_n .

Comme dans la partie “*Suite 2 de l’étude de $(P_n^x - 1)!$* ” (qui servira de modèle), ici aussi, nous allons simplifier les développements pour écourter les démonstrations. C’est-à-dire que nous n’écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Rappelons que nous avons noté, d’après le théorème de *WILSON* [2] :

$$(P_n - 1)! = P_n \cdot w_1 - 1 \quad (\text{avec } w_1 \text{ un nombre entier}).$$

Décomposons la suite de cette étude en plusieurs sous-parties.

* **Sous-Partie 1 :**

$$\text{Etudions} \quad \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a]$$

Nous observons encore ici principalement deux cas : Le cas où P_n est paire et le cas où P_n est impaire.

Cas de P_n paire :

Le seul cas possible étant $P_n = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] &= \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \\ &= (t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - 1 \\ &= 2 \cdot [(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b] - 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \right\} + 1 = 2 \cdot [(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b]$$

Or, nous avons construit c de sorte qu’il soit un entier ≥ 1 , donc $[(t-1) \cdot 2^{(c-1)} + b]$ est un nombre entier, et donc

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1) \cdot 2^{(c)} + 2 \cdot b - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par le nombre premier } 2.$$

Cas de P_n impaire :

$$\begin{aligned}
& \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] \\
&= [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n] \cdot f[(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n] + (P_n - 1)! \\
&= P_n \cdot [(t-1) \cdot P_n^{(c-1)} + b] \cdot f[(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n] + P_n \cdot w_1 - 1 \\
&= P_n \cdot \left\{ [(t-1) \cdot P_n^{(c-1)} + b] \cdot f[(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n] + w_1 \right\} - 1
\end{aligned}$$

avec $f[(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n]$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n (dont l'écriture a été ici aussi réduite pour alléger les développements).

Donc

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ (c'est-à-dire pour P_n paire et impaire) :

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{divisible par } P_n.$$

* **Sous-Partie 2 :**

Notons (pour simplifier) :

$$\left\{ [(t-1) \cdot P_n^{(c-1)} + b] \cdot f[(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n] + w_1 \right\} = w_{4,c}$$

(avec $w_{4,c}$ un nombre entier)

Nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] = P_n \cdot w_{4,c} - 1$$

Etudions :

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a]$$

Ici aussi, nous pouvons distinguer les cas de P_n paire et de P_n impaire.

Cas de P_n paire :

Le seul cas étant $P_n = 2$, nous avons

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] = \prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2 \cdot w_{4,c} - 1)$$

Or, $2^{(c-1)}$ est un nombre impaire pour $c = 1$, et un nombre paire pour $c > 1$.
En développant ce produit, nous obtenons :

Pour $c = 1$

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2 \cdot w_{4,c} - 1) = 2 \cdot w_{4,c} - 1$$

Et pour $c > 1$

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2 \cdot w_{4,c} - 1) &= (2 \cdot w_{4,c}) \cdot f(2 \cdot w_{4,c}) + 1 \\ &= (2 \cdot w_{4,c}) \cdot f(2 \cdot w_{4,c}) + 2 - 1 \\ &= 2 \cdot [(w_{4,c}) \cdot f(2 \cdot w_{4,c}) + 1] - 1 \end{aligned}$$

Ce qui fera le lien avec le cas de P_n impaire (avec $f(2 \cdot w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de 2 et de $w_{4,c}$).

Nous avons donc pour tout $c \geq 1$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2 \cdot w_{4,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 1$).

$$\begin{aligned} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] &= \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n \cdot w_{4,c} - 1) \\ &= P_n \cdot (w_{4,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{4,c}) - 1 \end{aligned}$$

(avec $f(P_n \cdot w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de P_n et de $w_{4,c}$)

Donc

$$\left[\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n \cdot w_{4,c} - 1) \right] + 1 \quad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 1$:

$$\left\{ \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a] \right\} + 1 \quad \text{est divisible par } P_n.$$

* **Sous-Partie 3 :**

Voici la dernière étape. Etudions ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1) \cdot P_n^{(c)} + b \cdot P_n - a]$$

Nous avons noté

$$\prod_{b=1}^{b=P_n^{(c-1)}} (P_n \cdot w_{4,c} - 1) = P_n \cdot (w_{4,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{4,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$$(w_{4,c}) \cdot f(P_n \cdot w_{4,c}) = w_{5,x} \quad (\text{avec } w_{5,x} \text{ un nombre entier})$$

Nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n \cdot w_{5,x} - 1) = P_n \cdot (w_{5,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{5,x}) - 1 \quad \text{si } x \text{ est impaire,}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n \cdot w_{5,x} - 1) = P_n \cdot (w_{5,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{5,x}) + 1 \quad \text{si } x \text{ est paire,}$$

avec $f(P_n \cdot w_{5,x})$ un nombre entier (en fonction de P_n et de $w_{5,x}$).

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} (P_n \cdot w_{5,x} - 1) = P_n \cdot (w_{5,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{5,x}) + (-1)^{(x)}$$

D'où

$$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} = P_n \cdot (w_{5,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{5,x})$$

avec $[(w_{5,x}) \cdot f(P_n \cdot w_{5,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_6 un nombre entier non fixé, pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour tout x et $t \in \mathbb{N}$, tel que $x \geq 1$ et $t \geq 1$, nous avons toujours :

$$\varepsilon_{n,x,t} = P_n \cdot w_6 + (-1)^{(x)}$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit ainsi :

$$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Rappelons que nous avons noté :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \quad \text{qui est un nombre rationnel } (\varepsilon_{n,x,t} \text{ non divisible par } P_n)$$

En remplaçant $\varepsilon_{n,x,t}$ convenablement dans cette dernière expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{F_P}{P_n^{F_c}} &= \frac{P_n \cdot w_6 + (-1)^{(x)}}{P_n} \\ &= w_6 + \frac{(-1)^{(x)}}{P_n} \end{aligned}$$

Donc, de manière générale, si x est impaire :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 - \frac{1}{P_n}$$

Et si x est paire :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 + \frac{1}{P_n}$$

Pour le cas où $N = t \cdot P_n^x$, Nous avons donc toujours :

$$\frac{F_P}{P_n^{F_c}} = w_6 \pm \frac{1}{P_n}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right) &= \sin \left[\pi \cdot \left(w_6 \pm \frac{1}{P_n} \right) \right] \\ &= \pm \sin \left(\frac{\pi}{P_n} \right) \\ \Rightarrow \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right) &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right) \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_P}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1$$

• Cas où $N \neq t \cdot P_n^x$:

Nous avons noté $N = t \cdot P_n^x + r$ pour $t \geq 1$ et $r \geq 0$. Rappelons que le cas de $r = 0$ pour tout t , et celui de $r = 1$ pour $t = 1$ ont déjà été traités en début de partie “**2.2.3 Construction de la fonction F_p** ” (page 75).

Et nous avons noté :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x + r - h) \quad \text{pour } r \text{ variant sur } [1; P_n^x - 1] \\ &= (t \cdot P_n^x + r - 1) \cdot (t \cdot P_n^x + r - 2) \cdot \dots \cdot [(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1] \end{aligned}$$

Sur les intervalles de type $[(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1 ; t \cdot P_n^x + r - 1]$, le nombre de multiples de P_n est variable en fonction de r . Sur ces intervalles et selon r , nous recontrerons des cas où le nombre de multiples de P_n est minimum et des cas où il est maximum. Nous allons d’abord traiter les cas où le nombre de multiples de P_n est minimum pour simplifier la suite de l’étude.

Pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$, le nombre de multiples de P_n est minimum lorsque la différence entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n de l’intervalle, et la différence entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n de l’intervalle sont toutes les deux maximums. Recherchons quand ces différences sont maximums en plusieurs sous-parties, toujours à propos du cas où $N \neq t \cdot P_n^x$.

Notons d et $d' \in \mathbb{N}$, tel que $d \geq 1$ et $d' \geq 1$.

* Sous-partie pour les multiples de P_n :

A propos des bornes des intervalles de type $[(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t \cdot P_n^x + r - 1]$ et des différences évoquées dans les quelques lignes précédentes pour ce cas ($N \neq t \cdot P_n^x$).

Relation entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 < (t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n$$

Relation entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n < t \cdot P_n^x + r - 1$$

Or, en notant Δ_1 cette différence, nous avons la plus grande différence possible pour $\Delta_1 = P_n - 1$, puisque cette différence est le nombre entier le plus grand ne contenant pas de multiple de P_n . Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [(t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n] - [(t-1) \cdot P_n^x + r + 1] \\ &= d \cdot P_n - r - 1 \\ &= P_n - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (d-1) \cdot P_n \end{aligned}$$

et pour la seconde borne

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [t \cdot P_n^x + r - 1] - [t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n] \\ &= d' \cdot P_n + r - 1 \\ &= P_n - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (1 - d') \cdot P_n \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1) \cdot P_n \\ &= (1 - d') \cdot P_n \\ \text{D'où} \quad d' &= 2 - d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1) \cdot P_n$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n$

et le dernier multiple de P_n vaut $t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n$

Or, le nombre de multiples de P_n se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n ; t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n ; P_n \cdot (P_n^{(x-1)} - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de P_n vaut $(P_n^{(x-1)} - 1)$, dont P_n^x est un multiple appartenant à ces intervalles car pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1 ; t \cdot P_n^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t - 1) \cdot P_n^x + r + 1 \leq t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x + r - 1$$

En effet, puisque pour $r = 1$, l'inégalité devient :

$$(t - 1) \cdot P_n^x + 2 \leq t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x$$

Et pour $r = P_n^x - 1$, l'inégalité devient :

$$t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x \leq (t + 1) \cdot P_n^x - 2$$

* Sous-partie pour les multiples de P_n^2 :

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de P_n^2 .

$$(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 < (t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^2$$

Et

$$t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n^2 < t \cdot P_n^x + r - 1$$

Or, $\Delta_2 = P_n^2 - 1$ ne contient pas de multiple de P_n^2 et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= [(t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^2] - [(t-1) \cdot P_n^x + r + 1] \\ &= d \cdot P_n^2 - r - 1 \\ &= P_n^2 - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (d-1) \cdot P_n^2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= [t \cdot P_n^x + r - 1] - [t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n^2] \\ &= d' \cdot P_n^2 + r - 1 \\ &= P_n^2 - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (1-d') \cdot P_n^2 \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1) \cdot P_n^2 \\ &= (1-d') \cdot P_n^2 \\ \text{D'où} \quad d' &= 2-d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1) \cdot P_n^2$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^2$

et le dernier multiple de P_n vaut $t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n^2$

Or, le nombre de multiples de P_n^2 se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^2 ; t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n^2]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n^2 ; P_n^2 \cdot (P_n^{(x-2)} - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de P_n^2 vaut $(P_n^{(x-2)} - 1)$, dont P_n^x fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

...

(même raisonnement pour les multiples des puissances de P_n intermédiaires)

...

* Sous-partie pour les multiples de $P_n^{(x-1)}$:

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de $P_n^{(x-1)}$.

$$(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 < (t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^{(x-1)}$$

Et

$$t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n^{(x-1)} < t \cdot P_n^x + r - 1$$

Or, $\Delta_{(x-1)} = P_n^{(x-1)} - 1$ ne contient pas de multiple de $P_n^{(x-1)}$ et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_{(x-1)} &= [(t-1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^{(x-1)}] - [(t-1) \cdot P_n^x + r + 1] \\ &= d \cdot P_n^{(x-1)} - r - 1 \\ &= P_n^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (d-1) \cdot P_n^{(x-1)} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Delta_{(x-1)} &= [t \cdot P_n^x + r - 1] - [t \cdot P_n^x - d' \cdot P_n^{(x-1)}] \\ &= d' \cdot P_n^{(x-1)} + r - 1 \\ &= P_n^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc} \quad r &= (1-d') \cdot P_n^{(x-1)} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} r &= (d-1) \cdot P_n^{(x-1)} \\ &= (1-d') \cdot P_n^{(x-1)} \\ \text{D'où} \quad d' &= 2-d \end{aligned}$$

Finalement, si $r = (d - 1) \cdot P_n^{(x-1)}$,

le premier multiple de P_n vaut $(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^{(x-1)}$

et le dernier multiple de P_n vaut $t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n^{(x-1)}$

Or, le nombre de multiples de $P_n^{(x-1)}$ se trouvant sur les intervalles de type $[(t - 1) \cdot P_n^x + d \cdot P_n^{(x-1)} ; t \cdot P_n^x + (d - 2) \cdot P_n^{(x-1)}]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$$[P_n^{(x-1)} ; P_n^{(x-1)} \cdot (P_n - 1)]$$

Et donc le nombre de multiples de $P_n^{(x-1)}$ vaut $(P_n - 1)$, dont P_n^x fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

* Sous-partie pour les multiples de P_n^x :

Nous avons déjà vu que pour r variant sur $[1; P_n^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t \cdot P_n^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 \leq t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x + r - 1$$

En effet, si $r = 1$:

$$(t-1) \cdot P_n^x + 2 \leq t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x$$

Et si $r = P_n^x - 1$:

$$t \cdot P_n^x \leq t \cdot P_n^x \leq (t+1) \cdot P_n^x - 2$$

Et donc $t \cdot P_n^x$ se situe toujours dans les intervalles de type :

$$[(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t \cdot P_n^x + r - 1]$$

* Synthèse :

Pour $N = (t \cdot P_n^x + r)$ et r variant sur l'intervalle $[1; P_n^x - 1]$, sur les intervalles de type $[(t-1) \cdot P_n^x + r + 1 \quad ; \quad t \cdot P_n^x + r - 1]$:

nous avons donc 1 seul multiple de P_n^x .

Et pour $k \in \mathbb{N}$ sur l'intervalle $[1; x-1]$:

au moins $(P_n^{(x-k)} - 1)$ multiples de P_n^k , dont P_n^x fait partie.

(l'intervalle peut même être étendu à $k \in [0; x-1]$ car l'ensemble reste cohérent, même si $k = 0$ ne présente a priori pas d'intérêt).

Nous pouvons donc regrouper chacun de ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n à partir de ce que nous venons de voir (en notant E ce qui reste du produit suivant, donc un nombre entier non divisible par P_n) :

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (t \cdot P_n^x + r - h) \\
 &= P_n^{(P_n^{(x-1)}-1)} \cdot P_n^{(P_n^{(x-2)}-1)} \cdot \dots \cdot P_n^{(P_n^2-1)} \cdot P_n^{(P_n-1)} \cdot P_n^{(1)} \cdot E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}-1+P_n^{(x-2)}-1+\dots+P_n^2-1+P_n-1+1]} \cdot E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+\dots+P_n^2+P_n-(x-1)+1]} \cdot E \\
 &= P_n^{[P_n^{(x-1)}+P_n^{(x-2)}+\dots+P_n^2+P_n+1-(x-1)]} \cdot E
 \end{aligned}$$

Or,

$$P_n^{(x-1)} + P_n^{(x-2)} + \dots + P_n^2 + P_n + 1 = \frac{P_n^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc, dans notre cas :

$$\begin{aligned}
 F_p &= P_n^{\left[\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-(x-1)\right]} \cdot E \\
 &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)} \cdot E
 \end{aligned}$$

Et comme nous avons :

$$P_n^{F_c} = P_n^{\left(\frac{P_n^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}$$

Nous pouvons effectuer

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = E$$

$\frac{F_p}{P_n^{F_c}}$ est donc toujours un nombre entier pour $x \geq 1$, nous avons donc ici :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Le fait d'avoir cherché à regrouper ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p nous permet d'abrégier ici l'étude les concernant. En effet, les autres cas de r faisant intervenir un nombre plus important de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p , nous aurons forcément :

$$\frac{F_p}{P_n^{F_c}} = E'$$

c'est-à-dire un nombre entier E' divisible par une puissance de P_n , cette puissance est obligatoirement ≥ 1 .

Nous retrouvons donc ici aussi :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0$$

Ce qui permet de conclure de manière générale à propos du cas où $N \neq t \cdot P_n^x$ ainsi :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0$$

Conclusion et synthèse :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 1 \text{ si } N \text{ est un multiple de } P_n^x.$$

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{P_n^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{P_n} \right)} = 0 \text{ si } N \text{ n'est pas un multiple de } P_n^x.$$

2.2.4 Supposons P_n non connu (construction de F_p , suite)

Supposons que nous ne connaissions pas les nombres premiers P_n . Comme $P_n \in \mathbb{P}$, remplaçons P_n dans la formule de F_p par une autre variable M , définie telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Nous verrons pourquoi $M \geq 2$ en cours d'étude. Reprenons brièvement les points essentiels des études précédentes en se concentrant uniquement sur les cas où $M \neq P_n$ (car les cas où $M = P_n$ ont tous été traité dans les études précédentes).

Nous avions noté :

$$\begin{aligned}
 F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n^x-1)} (N-h) \\
 &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-P_n^x+2) \cdot (N-P_n^x+1) \\
 &= P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x\right)} \cdot \varepsilon_{n,x,t} \quad (\text{avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n)
 \end{aligned}$$

Et

$$P_n^{F_c} = P_n^{\left(\frac{P_n^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}$$

En remplaçant P_n par M nous obtenons :

$$F_p = \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)$$

Et

$$M^{F_c} = M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

Et donc $\frac{F_p}{P_n^{F_c}}$ devient $\frac{F_p}{M^{F_c}}$, pour finalement obtenir :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}$$

A partir de cette égalité, reprenons l'étude en trois nouvelles sous-parties.

• **Etude :**

* **Sous-Partie 1 :**

$$1 < N < M^x$$

C'est un cas simple. En effet, nous avons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-M^x+2) \cdot (N-M^x+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = 0$$

Et donc (pour $M \in \mathbb{N}$, la formule suivante impose que $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

* Sous-Partie 2 :

$$N = M^x$$

C'est aussi un cas simple. En effet, puisque nous retrouvons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h) \\ &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (M^x - h) \\ &= (M^x - 1)! \end{aligned}$$

dont la démonstration a déjà été faite, rappelons donc que nous avons :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1} - x + 1\right)}}$$

avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout M étant un nombre entier et n'étant pas un nombre premier, sauf pour le seul cas où $M = 4$ et $x = 1$.

Donc, ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \varepsilon_{M,x} \quad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (pour $M \in \mathbb{N}$, la formule suivante impose que $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Nous pourrions corriger cela en donnant une formule valable pour tous les cas (et donc pour $M = 4$ et $x = 1$ inclus). Nous chercherons alors une formule qui soit nulle pour ce seul cas (ou au moins pour les multiples de 4) et qui prenne pour valeur 1 sinon (ou au moins lorsque $M = P_n$), ceci afin de ne pas perturber le fonctionnement général de la formule finale. Nous donnerons une étude plus détaillée de la cette fonction de correction “ A ” plus loin dans le paragraphe le signalant.

* Sous-Partie 3 :

$$N > M^x$$

C'es le cas le moins simple. Raisonnement :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-M^x+2) \cdot (N-M^x+1) \end{aligned}$$

Remarquons que, dans ce cas, il existe une différence non nulle entre N et M^x , notons cette différence Λ telle que :

$$\Lambda = N - M^x \quad (\text{et donc non nulle, c'est-à-dire } \Lambda \geq 1)$$

D'où

$$N = M^x + \Lambda$$

Donc

$$\begin{aligned} F_p &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-M^x+2) \cdot (N-M^x+1) \\ &= (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (\Lambda+2) \cdot (\Lambda+1) \\ &= [(N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (\Lambda+2) \cdot (\Lambda+1)] \cdot \frac{\Lambda!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(N-1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(M^x + \Lambda - 1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{[(M^x + \Lambda - 1) \cdot (M^x + \Lambda - 2) \cdot \dots \cdot (M^x + 1) \cdot (M^x)] \cdot [(M^x - 1)!]}{\Lambda!} \\ &= [(M^x - 1)!] \cdot \frac{[(M^x + \Lambda - 1) \cdot (M^x + \Lambda - 2) \cdot \dots \cdot (M^x + 1) \cdot (M^x)]}{\Lambda!} \\ &= (M^x - 1)! \cdot \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!} \end{aligned}$$

Or,
$$\frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!}$$
 est toujours un nombre entier.

Explications :

Notons $G = \prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda')$

Donc

$$\frac{G}{\Lambda!} = \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!}$$

Si $\Lambda = 1$, alors $G = M^x$ divisible par $(\Lambda!) = 1! = 1$. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 2$, alors $G = (M^x) \cdot (M^x + 1)$ divisible par $(\Lambda!) = 2!$ puisque sur 2 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 2 est divisible par 2 (et forcément l'autre est divisible par 1). Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 3$, alors $G = (M^x) \cdot (M^x + 1) \cdot (M^x + 2)$ divisible par $(\Lambda!) = 3!$ puisque sur 3 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 3 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 4$, alors $G = (M^x) \cdot (M^x + 1) \cdot (M^x + 2) \cdot (M^x + 3)$ divisible par $(\Lambda!) = 4!$ puisque sur 4 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 4 est divisible par 4, au moins un des 4 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 5$, alors $G = (M^x) \cdot (M^x + 1) \cdot (M^x + 2) \cdot (M^x + 3) \cdot (M^x + 4)$ divisible par $(\Lambda!) = 5!$ puisque sur 5 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 5 est divisible par 5, au moins un des 5 est divisible par 4, au moins un des 5 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

...

(nous pouvons poursuivre ce raisonnement à l'infini pour chaque valeur de Λ)

...

Pour $\Lambda \geq 1$, nous avons $G = (M^x) \cdot (M^x + 1) \cdot \dots \cdot (M^x + \Lambda - 2) \cdot (M^x + \Lambda - 1)$ divisible par $(\Lambda!)$ puisque sur Λ nombres entiers consécutifs, au moins l'un des Λ nombres est divisible par Λ , au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda - 1)$, au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda - 2)$, ... , au moins un des Λ nombres est divisible par 3 et au moins un autre parmi ces Λ nombres est divisible par 2 (et forcément l'ensemble de ces Λ nombres est divisible par 1). Et donc $\frac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

En notant $\frac{G}{\Lambda!} = G'$ un nombre entier quelquesoit $\Lambda \geq 1$, nous avons donc maintenant :

$$\begin{aligned} F_p &= (M^x - 1)! \cdot \frac{\left[\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda') \right]}{\Lambda!} \\ &= (M^x - 1)! \cdot G' \end{aligned}$$

En rappelant que

$$\begin{aligned} (M^x - 1)! &= M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)} \cdot \varepsilon_{M,x} \\ &= M^{F_c} \cdot \varepsilon_{M,x} \end{aligned}$$

Nous déduisons

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = G' \cdot \varepsilon_{M,x} \quad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

* Synthèse de ces trois sous-parties :

Nous avons donc pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ avec tout $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

• Conclusion et synthèse :

Nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \in \mathbb{P}$ (autrement dit pour $M = P_n$) :

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1 \quad \text{si } N \text{ est un multiple de } M^x \text{ (où } M^x = P_n^x \text{)}.$$

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \quad \text{si } N \text{ n'est pas multiple de } M^x.$$

• Construction de la “fonction” de Correction “ A ” :

Nous voulons obtenir une “fonction” de correction “ A ” pour le cas où $M = 4$ et $x = 1$ telle que :

pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$

$$A \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$

$$A \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

Nous voulons donc

$A = 0$ si $M = 4$ et $x = 1$ (ou “si M est multiple de 4” est aussi acceptable)
 $A = 1$ sinon (ce qui inclu les cas où $M = P_n$)

En effet, en partant de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{F_p}{M^{F_c}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}} \end{aligned}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier si $M \notin \mathbb{P}$ sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$)

pour $N = M^x$, lorsque $M = 4$ et $x = 1$, nous obtenions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(4 - 1)!}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas seulement, $\varepsilon_{M,x}$ est rationnel alors que $M \notin \mathbb{P}$.

Etudions maintenant ce qui suit :

$$\frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} = \frac{M^3 - 6 \cdot M^2 + 11 \cdot M - 6}{4}$$

Si M est un multiple de 4, notons $M = 4 \cdot t'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} &= \frac{(4t'-1) \cdot (4t'-2) \cdot (4t'-3)}{4} \\ &= \frac{(4t')^3 - 6 \cdot (4t')^2 + 11 \cdot (4t') - 6}{4} \\ &= 16 \cdot (t')^3 - 24 \cdot (t')^2 + 11 \cdot (t') - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Or, $[16 \cdot (t')^3 - 24 \cdot (t')^2 + 11 \cdot (t')]$ est un nombre entier pour $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \sin^2 \left[\frac{\pi \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] &= \sin^2 \left[\frac{\pi \cdot (4t'-1) \cdot (4t'-2) \cdot (4t'-3)}{4} \right] \\ &= \sin^2 \left\{ \pi \cdot \left[16 \cdot (t')^3 - 24 \cdot (t')^2 + 11 \cdot (t') - \frac{3}{2} \right] \right\} \\ &= \sin^2 \left(\frac{3 \cdot \pi}{2} \right) \\ &= 1 \quad \text{si } M \text{ est un multiple de 4.} \end{aligned}$$

Si M n'est pas un multiple de 4, notons $M = 4t' + r'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$ et $r' \in \mathbb{N}$, nous pouvons restreindre r' à l'intervalle $[1; 3]$ (en effet, toutes les valeurs non multiple de 4 sont présente avec $r' \in [1; 3]$ et pour chaque valeur de t'), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \\
= & \frac{(4t' + r' - 1) \cdot (4t' + r' - 2) \cdot (4t' + r' - 3)}{4} \\
= & \frac{(4t' + r')^3 - 6 \cdot (4t' + r')^2 + 11 \cdot (4t' + r') - 6}{4} \\
= & \frac{64(t')^3 + 52(t')^2 \cdot r' + 12t' \cdot (r')^3 + (r')^3 - 96(t')^2 - 48t' \cdot r' - 6(r')^2 + 44t' + 11r' - 6}{4} \\
= & 16(t')^3 + 13(t')^2 \cdot r' + 3t' \cdot (r')^2 - 24(t')^2 - 12t' \cdot r' + 11t' + \frac{(r')^3 - 6(r')^2 + 11r' - 6}{4} \\
= & 16(t')^3 + 13(t')^2 \cdot r' + 3t' \cdot (r')^2 - 24(t')^2 - 12t' \cdot r' + 11t' + \frac{(r' - 1) \cdot (r' - 2) \cdot (r' - 3)}{4}
\end{aligned}$$

Or, pour la partie suivante de cette dernière formule :

$[16(t')^3 + 13(t')^2 \cdot r' + 3t' \cdot (r')^2 - 24(t')^2 - 12t' \cdot r' + 11t']$ vaut un nombre entier

Et de plus, nous avons :

$$\frac{(r' - 1) \cdot (r' - 2) \cdot (r' - 3)}{4} = 0 \text{ pour } r' \in \mathbb{N} \text{ et restreint à l'intervalle } [1; 3]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1)(M-2)(M-3)}{4} \right] &= \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(4t' + r' - 1)(4t' + r' - 2)(4t' + r' - 3)}{4} \right] \\
&= 0 \quad \text{si } M \text{ n'est pas un multiple de 4.}
\end{aligned}$$

Pour faire la synthèse, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] &= 1 \text{ si } M \text{ est multiple de } 4, \\ \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] &= 0 \text{ si } M \text{ n'est pas multiple de } 4.\end{aligned}$$

Or, nous sommes en train de rechercher une fonction qui est exactement complémentaire à celle-ci puisque nous voulons :

$A = 0$ si M est multiple de 4

$A = 1$ si M n'est pas multiple de 4

Nous avons donc simplement :

$$\begin{aligned}A &= 1 - \sin^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \\ &= \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right]\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de généraliser :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est un multiple de M^x :

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x :

$$\cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0$$

2.2.5 Construction de la fonction α_M

Toutes ces données vont nous permettre de construire une mécanique pour les puissances des nombres premiers. En effet, pour simplifier les données principales, notons :

$$f(M; x) = \cos^2 \left[\pi \cdot \frac{(M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-3)}{4} \right] \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot F_p}{M^{F_c}} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Et notons à nouveau ces généralisations précédentes, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$:

$f(M; x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x .

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Ceci signifie encore que :

$M^{f(M; x)} = M$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

$M^{f(M; x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x .

$M^{f(M; x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Poursuivons avec le cas le plus intéressant pour la suite de l'étude, c'est-à-dire avec le cas où :

$f(M; x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x .

Dissociation de variables :

Afin de dissocier un nombre N d'un nombre M^x , nous allons devoir adopter d'autres variables : α_M et g . En effet, nous devons adopter une notation pour N qui le distingue du reste de la formule recherchée. Notons :

$$N = g \cdot M^{(\alpha_M)} \quad \text{avec } g \in \mathbb{N}, g \geq 1 \text{ et } \alpha_M \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, N peut représenter tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 ($N \in \mathbb{N}, N \geq 1$). Effectivement :

- si N est multiple de $M^{(\alpha_M)}$, le coefficient multiplicateur est représenté par g .
- si N n'est pas multiple de $M^{(\alpha_M)}$, alors $\alpha_M = 0$ et donc $N = g$.

En réalité, cette écriture va nous permettre de dissocier α_M et x , afin de constater que le nombre $N = g \cdot M^{(\alpha_M)}$ étant donné et fixé, N est multiple de M^x si $x \leq \alpha_M$, mais aussi N est multiple de M élevé à toutes les puissances inférieures à x ($x \in \mathbb{N}, x \geq 1$).

Nous avons donc

N est multiple de M (pour $x = 1$),
 N est multiple de M^2 (pour $x = 2$),
 N est multiple de M^3 (pour $x = 3$),
...
Jusqu'au cas où N est multiple de M^x (pour $x = \alpha_M$),

 N n'est plus multiple de M^x dès que $x > \alpha_M$.

Tout ceci signifie que dans tous ces cas :

$f(M; 1) = 1$ (pour $x = 1$)
 $f(M; 2) = 1$ (pour $x = 2$)
 $f(M; 3) = 1$ (pour $x = 3$)
...
Jusqu'à $f(M; \alpha_M) = 1$ (pour $x = \alpha_M$)

Et $f(M; x) = 0$ pour $x > \alpha_M$.

Ce qui nous permet de retrouver la puissance α_M puisque nous avons :

$$\begin{aligned} f(M; 1) + f(M; 2) + f(M; 3) + \cdots + f(M; \alpha_M) &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \alpha_M \end{aligned}$$

Ce qui peut encore être écrit :

$$\alpha_M = f(M; 1) + f(M; 2) + \cdots + f(M; \alpha_M) + f(M; \alpha_M + 1) + f(M; \alpha_M + 2) + \cdots$$

puisque dès que $x > \alpha_M$ et jusqu'à l'infini (pour x), nous avons $f(M; x) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \end{aligned}$$

Or, $f(M; x)$ est connue car elle a déjà été formulée. Nous avons finalement une formule de “mécanique des puissances” pour les nombres premiers.

Pour tout nombre $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, nous pouvons déduire α_M la puissance maximum de M (lorsque M est un nombre premier) qui le compose. Ainsi :

$$N = g \cdot M^{(\alpha_M)} \quad \text{avec} \quad \alpha_M = \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x)$$

Pour retrouver tous les nombres premiers qui compose N (par exemple en notant q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , ... , q_n des nombres premiers quelconques mais distincts les uns des autres et en supposant que N soit composé du produit de ces nombres), il suffit alors de faire varier M sur l'ensemble des nombres premiers (ainsi, M prend forcément pour valeur q_1 , puis q_2 , puis q_3 , puis q_4 , ... , puis q_n) , ce qui permettrait d'obtenir par exemple :

$$N = q_1^{(\alpha_{q_1})} \cdot q_2^{(\alpha_{q_2})} \cdot q_3^{(\alpha_{q_3})} \cdot q_4^{(\alpha_{q_4})} \cdot \quad \dots \quad \cdot q_n^{(\alpha_{q_n})}$$

Concentrons nous maintenant sur les cas suivant, rappelons que :

Si N n'est pas multiple d'un de ces nombres premiers (d'après l'exemple précédent : $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$), alors $f(M; x) = 0$

donc, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x .

Et rappelons d'autre part que :

$f(M; x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Donc, dans ces deux derniers cas,

$$\begin{aligned}\alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} f(M; x) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.

Or, dans un produit, 1 est l'élément neutre. Ce qui va nous permettre de construire une formule "plus générale" sur la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs de nombres premiers. En tenant compte de toutes ces données, nous pouvons alors conclure finalement :

$$N = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M^{\alpha_M}$$

Nous pouvons borner ce produit par 2 pour la borne inférieure puisqu'il s'agit également de la borne inférieure pour le domaine de définition de M (nous avons $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$). Compte tenu qu'il n'est pas nécessaire de faire varier M jusqu'à l'infini puisque N ne peut pas être composé de facteur premier qui soit supérieur à N lui-même. Au maximum, si N est lui-même un nombre premier, nous pouvons faire varier M jusqu'au plus grand nombre premier possible, c'est-à-dire jusqu'à N lui-même. ce qui impose alors de restreindre le domaine de définition de N à celui de M , c'est-à-dire pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Et si nous voulons faire apparaître tous les travaux de l'étude en une seule formule, nous pouvons mettre en facteur les formules de "fonction coefficient correcteur" Cc et de "fonction élimination du défaut" A (lorsque $M = 4$ et $x = 1$) que l'on retrouve dans chaque formule de $f(M; x)$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, nous pouvons alors noter :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N - h)}{M \left(\frac{M^x - 1}{M - 1} \right)^{-x+1}} \right) \right]$$

Ce que je me suis efforcé de démontrer (attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des "valeurs absolues", ni de ceux des "parties entières" : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_M , c'est-à-dire la puissance de M). Ceci servira de synthèse générale de la démonstration concernant l'étude sur la factorisation d'un nombre entier en produits de facteurs premiers. Notons simplement $D(N)$ ce processus de "décomposition" (ou de factorisation d'un nombre entier en produit de facteurs premiers), et appelons finalement cette formule $D(N)$ la "Décomposée" de N telle que :

$$\begin{aligned} N &= D(N) \\ &= \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} M^{\alpha_M} \\ &= \prod_{M=2}^{M=N} M^{\alpha_M} \end{aligned}$$

Il existe donc une règle permettant la décomposition d'un nombre entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers. Nous pouvons alors considérer que le tableau de référence *T.R.1* (voir le début de la partie intitulée “**1 Factorisation et mécanique des puissances**” page 8), dont le nombre de colonnes est infini et dont le nombre de lignes est également infini, peut être donné par la formule $D(N)$ pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

Remarque 1 :

Lorsque nous notons que nous devons avoir $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, il faut comprendre que tout nombre N est décomposable en produit de facteurs premiers seulement si N est supérieur ou égal à 2. En d'autres termes, les nombres 0 et 1 (les seuls entiers positifs à être inférieurs à 2) ne sont pas décomposables de manière explicite en produit de facteurs premiers, la formule de décomposition $D(N)$ ne peut logiquement pas les concerner.

Autrement dit, la raison pour laquelle les nombres entiers 0 et 1 ne peuvent pas être concernés par cette formule est que cette formule ne traite que la propriété de “primalité” de chaque nombre entier consécutif (par le produit des $(N - h)$), et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, l'entier N ne peut être que premier ou composé (ce qui n'est pas le cas des nombre 0 et 1).

Remarque 2 :

A l'aide des congruences, le lien entre la fonction *SINUS* et le cercle doit pouvoir permettre une interprétation géométrique équivalente.

Remarque 3 :

Il existe une formule “plus générale” de $D(N)$ dont la formule qui en résulte est donnée en partie “**La formule**” (page 3). Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x}} \right)^m \cdot \frac{\pi}{M} \right] \right\}$$

2.3 Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers

D'après les démonstrations effectuées précédemment à propos de la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers, pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, la formule $D(N)$ est donnée par :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M-v) \right)}{\sin^2(\pi/M)} \cdot \sum_{x=1}^{x \rightarrow +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M \left(\frac{M^x-1}{M-1} \right)^{-x+1}} \right) \right]$$

Ceci conclut la démonstration.

3

Compléments et hypothèses

Ces travaux m’ont permis d’établir des liens avec d’autres disciplines, lorsque cela a été possible.

- Nous avons vu dans la partie “**La formule**” (page 3) que lorsqu’on cherche seulement à savoir si un nombre M est premier ou pas, il n’est pas nécessaire de conserver x allant de 1 à $+\infty$, le calcul pour $x = 1$ suffit. En remplaçant alors simplement N par M dans la formule de α_M et en notant cette formule α_M simplifiée $s(M)$, nous avons :

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-1)!^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 1 \text{ si } M \text{ est un nombre premier.}$$

Et

$$s(M) = \frac{\sin^2 \left[(M-1)!^2 \cdot \frac{\pi}{M} \right]}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} = 0 \text{ si } M \text{ n'est pas un nombre premier.}$$

Remarquons que la formule $s(M)$ est équivalente à la formule de *MINÁC-WILLANS* [1], ce qui en fait un cas particulier de la formule de α_M .

La formule $s(M)$ nous permet d'établir un lien direct et profond avec la fonction ζ (Zêta) de *RIEMANN* [3], pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Au moins 3 réécritures de cette fonction $\zeta(s)$ sont possibles :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - M^{-s} \cdot s(M)}$$

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{s(M)}{1 - M^s} \right]$$

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{1 - M^{-s}} \right)^{s(M)} \right]$$

- La formule $s(M)$ évoquée précédemment peut être exprimée en fonction d'elle-même de différentes manières tout en restant cohérente, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq \{0; 1\}$:

$$s(M) = \frac{1 - (1 - z)^{s(M)}}{z} = \frac{z^{s(M)} - 1}{z - 1}$$

Il est encore possible de choisir $z = M$ ou, pour simplifier, $z = 2$.

- La formule $D(N)$ appliquée à une onde (phénomène physique) permet de décomposer toute onde dans le domaine de définition de $D(N)$. En appliquant cette formule par hypothèse à la longueur d'onde ou à la période d'un photon (peu importe, car les résultats sont identiques), on doit alors admettre qu'il existe un minimum de longueur et un minimum de période. L'espace et le temps ne peuvent plus être considérés que comme étant discontinus, conformément aux limites représentées par la longueur de *PLANCK* et par le temps de *PLANCK*.

- La formule $D(N)$ contient la formule $f(M; x)$, dont le cas particulier de la formule $s(M)$, qui ne donnent que des résultats “binaires” (0 ou 1, voir l’étude correspondante en partie “**2.2.5 Construction de la fonction α_M** ”, page 115). Il est même possible (par substitution de variable) d’en extraire d’autres formules permettant de reconstituer une porte logique *NAND* ou bien une porte logique *NOR* (algèbre de *BOOLE*). Le calcul propositionnel classique devient donc intégralement interprétable en fonction de ces formules qui traitent uniquement la primalité des entiers. Menons pour cela une étude complémentaire.

Partant du constat qu’il n’existe que deux nombres premiers qui soient des entiers consécutifs (il s’agit de 2 et de 3), nous pouvons construire une nouvelle formule que nous appellerons Impulsion de variable M (à cause de la forme de son graphique) basée sur cette propriété.

Partant de la formule de $s(M)$, si nous apportons des modifications dans ses parenthèse (en substituant la variable M à une modification), nous pouvons élaborer une formule différente mais qui reste vraie.

La formule $s(M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ est une formule qui vaut :

$$\begin{array}{lll} s(M) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

La formule $s(2M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$ est une formule qui vaut :

$$\begin{array}{lll} s(2M) = 1 & \text{si } M = 1 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(2M) = 0 & \text{si } M > 1 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

Nous pouvons modifier cette formule de manière à ce qu’elle soit définie pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 0$ en effectuant un “décalage” (de M vers $M + 1$) :

$$\begin{array}{lll} s(2M + 2) = 1 & \text{si } M = 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ s(2M + 2) = 0 & \text{si } M > 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

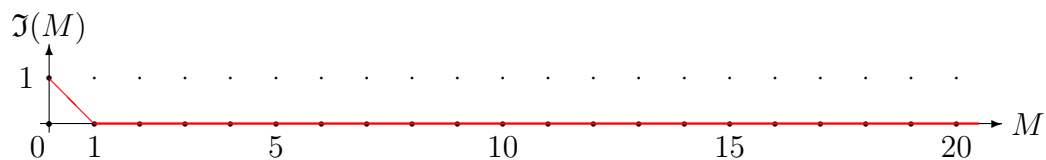
Notons $\mathfrak{I}(M)$ la fonction d'Impulsion de M telle que :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2M + 2)$$

Nous avons donc

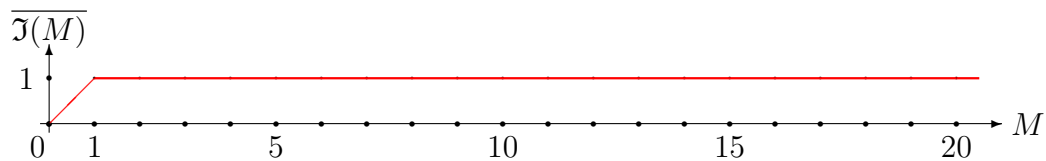
$$\begin{array}{lll} \mathfrak{I}(M) = 1 & \text{si } M = 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \\ \mathfrak{I}(M) = 0 & \text{si } M > 0 & (\text{la réciproque est vraie}) \end{array}$$

Graphiques (pour plus de confort visuel, des lignes rouges sont trac  es entre les points aux valeurs ent  res du domaine de définition) :



Avec son complément (une fonction ‘‘carr  e’’):

$$\overline{\mathfrak{I}(M)} = 1 - \mathfrak{I}(M)$$



Cette formule de $\mathfrak{I}(M)$ va nous permettre la construction de formules équivalentes aux portes logiques en algèbre de *BOOLE* [4].

Construction de portes logiques :

Nous pouvons reconstruire toutes les tables de vérités définies par l'algèbre de *BOOLE* [4] grâce à la formule de $\mathfrak{I}(M)$. Par exemple en prenant deux fois cette formule de $\mathfrak{I}(M)$ et en les dissociant comme si elles étaient de simples variables. Notons ces deux nouvelles variables $\mathfrak{I}(M_1)$ et $\mathfrak{I}(M_2)$, et notons L une “porte logique” à deux entrées $\mathfrak{I}(M_1)$ et $\mathfrak{I}(M_2)$.

*** Exemple 1 :**

$$L = \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) \quad (\text{symbole “} \cdot \text{” : } ET \text{ de l'algèbre de } BOOLE)$$

dont la table de vérité est la suivante :

$\mathfrak{I}(M_1)$	$\mathfrak{I}(M_2)$	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique “*ET*” en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique (c'est-à-dire en utilisant le symbole “ $\cdot$ ” mathématique correspondant à la multiplication), nous pouvons écrire :

$$L = \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

*** Exemple 2 :**

$$L = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) \quad (\text{symbole “ + ” : } OU \text{ de l'algèbre de } BOOLE)$$

dont la table de vérité est la suivante :

$\mathfrak{I}(M_1)$	$\mathfrak{I}(M_2)$	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique “OU” en algèbre de *BOOLE*.
D'un point de vue strictement mathématique (c'est-à-dire, maintenant, avec les symboles mathématiques uniquement), nous pouvons écrire :

$$L = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - [\mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)]$$

Ce qui revient également à écrire :

$$L = [\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

En effet, puisque nous avons :

$$[\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = \mathfrak{I}(M_1)^2 + \mathfrak{I}(M_2)^2 - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

Or,

$$\mathfrak{I}(M)^m = \mathfrak{I}(M) \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}, m \geq 1.$$

D'où

$$[\mathfrak{I}(M_1) - \mathfrak{I}(M_2)]^2 + \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

Remarquons que nous aurions pu adopter d'autres "variables". Par exemple, il en aurait été de même pour les variables $s(M_1)$ et $s(M_2)$ (possédant les mêmes propriétés que $s(M)$) à la place des variables $\mathfrak{J}(M_1)$ et $\mathfrak{J}(M_2)$ (respectivement). Ce qui permet de constater un lien possible entre les tables de vérité de l'algèbre de *BOOLE* et la formule $s(M)$ ou la formule $\mathfrak{J}(M)$, et donc un lien avec les propriétés des nombres entiers. Une interprétation entre l'algèbre de *BOOLE* et les propriétés des nombres entiers (propriété de primalité ou autres propriétés) est donc possible.

Remarque : Notons qu'une interprétation entre l'algèbre de *BOOLE* et les propriétés d'autres nombres est aussi possible grâce à toutes fonctions dont les résultats ne peuvent être que 0 ou 1.

*** Sur le même principe :**

Poursuivons les correspondances avec d'autres exemples. Soient B_1 et B_2 deux variables binaires (ne pouvant prendre pour état que 0 ou 1).

*** Exemple 3 :**

$$L = \mathfrak{J}(M) \quad \text{avec } M = B_1.$$

Pour B_1 ne pouvant prendre pour valeurs que 0 ou 1, avec les symboles mathématiques uniquement, nous avons donc :

$$\mathfrak{J}(B_1) = 1 - B_1$$

Ce qui correspond à une porte logique "*COMPLEMENT*" en algèbre de *BOOLE* (c'est-à-dire que la variable binaire de sortie est complémentaire à la variable binaire d'entrée).

Remarque : à ce stade, il serait déjà possible de construire une porte logique "*NAND*" ("*NON ET*" en algèbre de *BOOLE*) grâce à l'*Exemple 1* et à l'*Exemple 3*, et une porte logique "*NOR*" ("*NON OU*" en algèbre de *BOOLE*) grâce à l'*Exemple 2* et à l'*Exemple 3*. Cependant, nous pouvons encore étendre notre raisonnement.

*** Exemple 4 :**

$L = \mathfrak{I}(M)$ avec $M = B_1 \cdot B_2$ (symbole “ $\cdot$ ” : multiplication en mathématiques)

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \mathfrak{I}(B_1 \cdot B_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique “*NAND*” (c’est-à-dire *NON ET*) en algèbre de *BOOLE*. D’un point de vue strictement mathématique (avec les symboles mathématiques uniquement), nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{I}(B_1 \cdot B_2) = 1 - (B_1 \cdot B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d’autres exemples sont possibles) :

$$\mathfrak{I}(B_1 \cdot B_2) = s(2 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2 , prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{I}(M_1) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) = 0 & \text{pour } M_1 \geq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{I}(M_2) = 1 & \text{pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_2) = 0 & \text{pour } M_2 \geq 1 \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\
\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\
\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = 1 & \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\
\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) = 0 & \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1
\end{array}$$

Or,

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\
\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\
\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = 1 & \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\
\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = 0 & \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1
\end{array}$$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1 \cdot B_2) = 1 - (B_1 \cdot B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1 \cdot M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} \cdot (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

Ceci permet d'établir un lien entre les nombres entiers (comme M_1 et M_2) et la porte logique “*NAND*” (c'est-à-dire *NON ET*) en algèbre de *BOOLE*.

*** Exemple 5 :**

$L = \mathfrak{I}(M)$ avec $M = B_1 + B_2$ (symbole “ + ” : addition en mathématiques)

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \mathfrak{I}(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique “*NOR*” (c’est-à-dire *NON OU*) en algèbre de *BOOLE*. D’un point de vue strictement mathématique (avec les symboles mathématiques uniquement), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(B_1 + B_2) &= 2^{(B_1 \cdot B_2)} - (B_1 + B_2) \\ &= 1 - (B_1 + B_2) + (B_1 \cdot B_2)\end{aligned}$$

Or, nous pouvons également remarquer que (en algèbre de *BOOLE*) :

$\mathfrak{I}(B_1)$	$\mathfrak{I}(B_2)$	$L = \mathfrak{I}(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

D’un point de vue strictement mathématique, nous pouvons déduire :

$$\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = \mathfrak{I}(B_1) \cdot \mathfrak{I}(B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d’autres exemples sont possibles) :

$$\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = s(7 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2 , prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 = 0 \text{ et pour } M_2 \geq 1 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1 + M_2) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \text{ et pour } M_2 \geq 1\end{aligned}$$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = \mathfrak{I}(M_1) \cdot \mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = 1 - (B_1 + B_2) + (B_1 \cdot B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)} + (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} \cdot (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

Ce qui revient également à écrire :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - [(M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}]^2 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} \cdot (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

En effet puisqu'en développant les crochets élevés au carré, pour M_1 , nous avons à traiter (le principe étant le même pour M_2) :

$$(M_1)^{2 \cdot \mathfrak{I}(M_1)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(M_1) &= 1 && \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) &= 0 && \text{pour } M_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (M_1)^{2 \cdot \mathfrak{I}(M_1)} &= (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} = 0 && \text{pour } M_1 = 0 \\ (M_1)^{2 \cdot \mathfrak{I}(M_1)} &= (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} = 1 && \text{pour } M_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Ce qui explique l'égalité donnée sous les deux formes précédentes.

Ceci permet d'établir un lien entre les nombres entiers (comme M_1 et M_2) et la porte logique “*NOR*” (c'est-à-dire *NON OU*) en algèbre de *BOOLE*.

Nous allons voir avec l'exemple suivant qu'il est possible de construire l'équivalent mathématique d'une porte logique également à l'aide de la formule $s(M)$.

*** Exemple 6 :**

- Equivalent mathématique d'une porte *NAND* à l'aide de la formule $s(M)$ définie précédemment et de la table de vérité suivante, pour M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$ tels que M_1 et $M_2 \geq 2$:

$s(M_1)$	$s(M_2)$	$L_{(NAND)}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

D'un point de vue strictement mathématique (c'est-à dire avec les symboles mathématiques uniquement), nous pouvons écrire :

$$L_{(NAND)} = 1 - s(M_1) \cdot s(M_2)$$

Ce qui permet d'exprimer des résultats équivalents à une porte logique *NAND* en fonction de la primalité des nombres M_1 et M_2 .

- Equivalent mathématique d'une porte *NOR* toujours à l'aide de la formule $s(M)$ et de la table de vérité suivante, pour M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$ tels que M_1 et $M_2 \geq 2$:

$s(M_1)$	$s(M_2)$	$L_{(NOR)}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

D'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons écrire :

$$L_{(NOR)} = 1 - s(M_1) - s(M_2) + s(M_1) \cdot s(M_2) = 2^{s(M_1) \cdot s(M_2) - s(M_1) - s(M_2)}$$

Ce qui permet d'exprimer des résultats équivalents à une porte logique *NOR* en fonction de la primalité des nombres M_1 et M_2 .

Remarque importante :

D'après le calcul propositionnel "classique", il est possible de former toutes les propositions à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NOR*, ou bien à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NAND*. Cela nous permet de conclure que toutes les propositions du calcul propositionnel classique peuvent être formées à partir des formules du type $\mathfrak{J}(M)$ ou du type $s(M)$. Dans le cas de formules du type $s(M)$, cela nous permet aussi de conclure que toutes les propositions du calcul propositionnel classique peuvent être interprétées en fonction de la primalité des variables M_1 et M_2 tel que nous l'avons vu dans les exemples précédents.

- En appliquant cette formule à une longueur d'onde ou à une période (par exemple d'un photon), cette dernière hypothèse permettrait finalement d'établir un lien entre des informations codées de manière binaire et des phénomènes physiques : plus profondément entre la primalité des nombres entiers, le calcul propositionnel et les ondes physiques.

Bibliographie

- [1] C.N.R.S. : *Formule de MINÁC-WILLANS*.
<http://www.cnrs.fr/Cnrspresse/math2000/pdf/Maths10.pdf>
- [2] Wikipédia : *Théorème de WILSON*.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wilson
- [3] C.N.R.S : *Fonction ζ de RIEMANN*.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_z%C3%AAta_de_Riemann
- [4] Wikipédia : *Algèbre de BOOLE (logique)*.
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Boole_\(logique\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Boole_(logique))